空気ダンパの設計法に関する一考察*

浅見 敏彦^{*1}, 桃瀬 一成^{*1}
入部 恭輔^{*2}, 細川 欽延^{*1}

Method for Designing an Air Damper

Toshihiko ASAMI, Kazunari MOMOSE,
Kyosuke IRIBE and Yoshinobu HOSOKAWA

In this paper, we discuss a method for designing an air damper composed of a piston and a cylinder. When we design an air damper, we usually attend to obtain heavy damping. The amount of damping in the air damper, however, is limited by the compressibility of air. In an incompressible fluid damper such as the oil damper, the damping would increase with an increase in the length of the piston and a decrease in the clearance between the piston and the cylinder. In the air damper, the maximum damping is achieved at a finite piston length and clearance. Infinite length of the piston and zero clearance produce no damping, because the air does not flow through the clearance. This paper presents a simple expression for calculation of the optimum piston length and clearance. The optimum design conditions of the air damper are tested on a vibratory model. The experiments showed that the present expression is useful for designing air dampers.

Key Words: Damping, Damper, Forced Vibration, Vibration Isolation, Air Damper, Viscous Damping, Optimum Design

1. 緒 言

空気を持つ減衰作用を防振機器に利用しようとする試みは古くからあり、著者らの知る限りでは、萩原⁽¹⁾による粘性空気ダンパの理論がその最初のものである。その後、面外振動をする二平板間に挟まれた薄い空気層の制動効果⁽²⁾、オリフィスにより減衰を付与された空気ばね^{(3)~(5)}、空気軸受・磁気軸受における空気減衰^{(6),(7)}などの研究が報告されている。しかしながら、ピストン・シリンダ構造の空気ダンパについては、上記の萩原の研究以降は報告されていないようである。

そこで我々は萩原の粘性空気ダンパの研究に改良を加えると共に、新たに動圧(非粘性)空気ダンパについて解析し、これらのダンパの設計式を提案した^{(8),(9)}。その設計式を整理して表1に示している。これらの空気ダンパにおける基本的な違いは、粘性空気ダンパから得られる減衰力はピストンの速度に比例するのに対して、動圧空気ダンパの減衰力はピストン速度の二乗に比例するという点である。この表に示された設計式は、これらの空気ダンパの減衰特性をほぼ正確に表現

表1 空気ダンパの設計図表(その1)

	Viscous air damper	Nonviscous air damper
Configuration		
Damping coefficient	$c = \frac{\gamma p_0 A_p}{\omega h_p} \cdot \frac{N}{1 + N^2}$ $c = \alpha_0 A_p^2 \cdot \frac{N}{N_0(1 + N^2)}$	$c = \alpha_1 A_p^2 \cdot \frac{N}{N_1(1 + N^2)}$
Spring constant	$k_a = \frac{\gamma p_0 A_p}{h_p} \cdot \frac{N^2}{1 + N^2}$	
Dimensionless frequency	$N_0 = \frac{\alpha_0 \omega A_p h_p}{\gamma p_0}$ $N = \frac{N_0}{1 + 3\epsilon^2/2}; \quad \epsilon = \frac{\Delta h}{h}$	$N_1 = \frac{\alpha_1 \omega A_p h_p}{\gamma p_0}$ $N = \sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{1 + N_1^4} - 1)}$
Coefficient of discharge resistance	$\alpha_0 = \frac{12\mu_0 l}{bh^3}$	$\alpha_1 = \frac{\sqrt{\gamma p_0 \rho_0 y_0 / h_p}}{b_1(c_o A_o + c_d A_d)}$
Nomenclature	$b = \pi(d_c + d_p)/2$ $h = (d_c - d_p)/2$: radial clearance l : length of the piston	b_1 : constant (=1.112835789) c_o, c_d : flow coefficients A_o, A_d : areas of the clearance and the orifice
	d_p, A_p : diameter, area of the piston, d_c : inner diameter of the cylinder h_p : height from the bottom of the cylinder to the piston ρ_0, p_0 : atmospheric air density and pressure, γ : ratio of the specific heat of air (=1.4) μ_0, ν_0 : viscosity and kinematic viscosity of air ($\mu_0 = \rho_0 \nu_0$)	

* 原稿受付 平成5年3月22日。

^{*1} 正員, 姫路工業大学(〒671-22 姫路市書写 2167)。^{*2} 学生員, 姫路工業大学大学院。

していることが実験により確認されており⁽⁹⁾、すでに動吸振器の設計に応用されている⁽¹⁰⁾。

ところが表1に示された式だけでは、空気ダンパの設計にはなお不十分である。なぜなら、空気ダンパは動的な力に対しては減衰力だけでなく復元力が生じ、しかもそれらが振動数によって変化するので、一定減衰を仮定して導かれていたこれまでの減衰器や動吸振器の設計理論は空気ダンパに対しては適用できないからである。図1は1自由度振動系と見なせる機械本体(m - k 系および m_1 - k_1 系)に空気ダンパを取り付けた状態を表している。(a)は通常の減衰器として、(b)は動吸振器と呼ばれる副振動系の減衰器として用いた場合である。このように構成された機械振動系の振動特性を最適化するための空気ダンパの設計法はいまだ報告されていない。ただし、空気ダンパと類似した構造を持つ空気ばねについては、図1(a)のように構成された1自由度空気ばね系に最適減衰を付与するためのオリフィス径の計算式が報告されている⁽⁹⁾。

表1に示された2種類の空気ダンパを、図1のような2通りの方法で振動系に取り付ける組合せは合計4種類あるが、このうち本論文では粘性空気ダンパを(a)のような通常の減衰器として取り付ける場合の設計法について報告する。それはこの組合せが解析上最も容易であるからである。なお、残る組合せについては今後も引き続いて検討していく予定である。

2. 空気ダンパを含む振動系の振動特性

図2(a)は、粘性空気ダンパが取り付けられた1自由度の振動系を表している。空気ダンパは静的な力に対しては復元力を生じないので、この図のように質量 m とピストンを支持するためのばね k が必要になる。この振動系を正弦波加振すると、空気ダンパのシリンダ

内に含まれている空気がばねとして働くので、空気ダンパは減衰器としての特性とばねとしての特性を併せ持つことになる。したがって、同図の下に示されるように、空気ダンパはダンパとばねの並列モデルとして表現できる。その減衰係数 c とばね定数 k_a には著しい周波数依存性がある。これらの値は図の下に示された式によって計算できる。なお、式中の N は励振振動数 ω に比例する無次元振動数を表している。

空気ダンパの主要な設計パラメータとしては、ピストン直径 d_p 、ピストン長さ l 、半径すきま h およびシリンダ底面からピストン下面までの高さ h_p がある。このうち d_p と h_p を一定値に固定して図2(a)の振動系の周波数応答曲線を計算した結果を同図(b)-(d)に示す。その計算条件は図2(a)に一覧表にされている。これらの図の横軸には、励振振動数 ω を装置の固有振動数 $\omega_n = \sqrt{k/m}$ で除した比 λ がとられている。図2(b)ではピストン長さ l 、(c)では半径すきま h が変化するときの共振曲線の変化の様子が描かれている。また同図(d)は、ピストンとシリンダの中心軸がずれている場合の共振曲線を表している。このずれの大きさは、ピストンとシリンダの中心軸間距離 Δh を半径差 h で除した比率 ε で定義されている。このように定義された偏心率 ε は0から1までの値をとる。

これらの図において、 $l=0$ と $h=\infty$ で示された曲線は、空気ダンパが取り付けられていない系の周波数応答曲線であり、振動系はその固有振動数 ω_n において鋭い共振を生じている。一方、 $l=\infty$ と $h=0$ では、空気ダンパは減衰のない空気ばねとして働き、振動系はより高い固有振動数 $\sqrt{(k+k_a)/m}$ において共振を生じるようになる。これは、ピストンを長くするかすきまを狭くして流路を流れる流体の流動抵抗を大きくすると、空気は流路を流れにくくなり、その結果シリンダ内で圧縮と膨張を繰り返すだけとなるからである。

このような流体の「流れ難さ」を表すファクターとして、流量抵抗係数がある。幅 b 、厚さ h 、長さ l の平行二平板間の流路を流れる粘性係数 μ_0 の流体の流量抵抗係数は次のように表される。

$$\alpha_0 = \frac{12\mu_0 l}{bh^3} \quad \text{Ns/m}^5 \quad \dots\dots\dots(1)$$

一般に非圧縮性流体と見なすことのできるオイルダンパの場合には、この流量抵抗係数を大きくするほど減衰力も増加する。ところが空気ダンパの場合には、この係数を大きくし過ぎると、上に述べた理由によって逆に減衰が小さくなるという性質がある。この傾向はピストンの振動数が高くなるほど顕著に現れる。図2(e), (f)は、それぞれ同図(b), (c)と同じ条件で計算さ

図1 空気ダンパの取付け方法

れた振動系の減衰比 ζ の周波数特性を表している。ただし、 l と h が0と ∞ の場合にはすべての振動数において ζ が零となるので表示されていない。これらの図から、 l が長くなるか h が狭くなれば、振動数の増加と共に急に減衰が小さくなることが分かる。

こうして、 $l=0$ と ∞ 、あるいは $h=\infty$ と0において振動系は不減衰になり、その固有振動数における振幅はいずれも無限大になる。さらに $l=\infty$ または $h=0$ の場合には、系の固有振動数が高くなるので、これらの二つの共振曲線はある一点(この点をP点と呼ぶことに

する)で交わることになる。図2から明らかなように、この点Pは、ピストン長さ l と半径すきま h を変化させたときにすべての共振曲線が通過する定点となっている。したがって、P点の高さを低くして、この点で曲線が極大値をとるように空気ダンパを設計すれば、それが空気ダンパの最適の設計条件になる。このような一定点を利用する設計法は、空気ばね⁽⁹⁾やランチェスターダンパ⁽¹¹⁾の設計法と同じである。

以下、この定点の存在を数学的に証明し、空気ダンパの最適設計条件を求めることにする。

(a) 振動系モデル

(b) 周波数応答曲線 ($h = 50 \mu\text{m}$, $\epsilon = 0$) (c) 周波数応答曲線 ($l = 20 \text{ mm}$, $\epsilon = 0$) (d) 周波数応答曲線 ($h = 50 \mu\text{m}$, $\epsilon = 0.8$) (e) 減衰比 ($h = 50 \mu\text{m}$, $\epsilon = 0$) (f) 減衰比 ($l = 20 \text{ mm}$, $\epsilon = 0$)

図2 粘性空気ダンパが取り付けられた1自由度振動系の周波数応答曲線と減衰比の周波数特性

3. 理論解析

3.1 運動方程式 図2(a)に示された振動系の運動方程式は次式で与えられる。

$$m\ddot{x} + c(\dot{x} - \dot{x}_0) + (k + k_a)(x - x_0) = 0 \quad \dots\dots\dots(2)$$

この方程式において、粘性空気ダンパの減衰係数 c とばね定数 k_a は励振振動数 ω によって変化するが、時間 t (この方程式における独立変数) や変位 x (同じく従属変数) の関数でない。したがって、式(2)は定数係数の線形微分方程式であり、よく知られた未定係数法で解くことができる。その定常解は次式で与えられる。

$$\left| \frac{x}{x_0} \right| = \sqrt{\frac{(k + k_a)^2 + (c\omega)^2}{(k + k_a - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2}} \quad \dots\dots\dots(3)$$

分母・分子を $m\omega_n^2$ で除して式(3)を無次元表示すると

$$\left| \frac{x}{x_0} \right| = \sqrt{\frac{(1 + \kappa)^2 + (2\zeta\lambda)^2}{(1 + \kappa - \lambda^2)^2 + (2\zeta\lambda)^2}} \quad \dots\dots\dots(4)$$

ここで

$$\left. \begin{aligned} \lambda &= \frac{\omega}{\omega_n} && \text{振動数比} \\ \kappa &= \frac{k_a}{k} && \text{ばね定数比} \\ \zeta &= \frac{c}{2m\omega_n} && \text{減衰比} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots(5)$$

式(4)で表された解において、 κ と ζ が振動数比 λ の関数となっている点に注意されたい。

3.2 定点理論 空気ダンパを含む振動系の減衰比 ζ とばね定数比 κ を独立に変化させることはできない。すなわち、ピストンの長さ l や半径すきま h を変えると、系の減衰比 ζ だけでなくばね定数比 κ まで変化してしまう。そこで式(4)における κ と ζ を次式で定義される一つの無次元パラメータ N_n で表現する。

$$N_n = \frac{\alpha_0 \omega_n A_p h_p}{\gamma p_0 (1 + 3\varepsilon^2/2)} \quad \dots\dots\dots(6)$$

ここで α_0 は式(1)で定義された流量抵抗係数であり、ピストン長さ l や半径すきま h の影響はこの中に含まれている。この N_n と κ , ζ の間には次の関係がある。

$$\kappa = \frac{\eta \lambda^2 N_n^2}{1 + \lambda^2 N_n^2}, \quad 2\zeta\lambda = \frac{\kappa}{\lambda N_n} \quad \dots\dots\dots(7)$$

ここで、 η は次式で定義される無次元定数である。

$$\eta = \frac{\gamma p_0 A_p}{m \omega_n^2 h_p} \quad \dots\dots\dots(8)$$

式(7)の関係を式(4)に代入して整理すると

$$\left| \frac{x}{x_0} \right| = \sqrt{\frac{1 + [1 + \eta(2 + \eta)]\lambda^2 N_n^2}{(1 - \lambda^2)^2 + [(1 - \lambda^2)^2 + \eta(2 + \eta - 2\lambda^2)]\lambda^2 N_n^2}} \quad \dots\dots\dots(9)$$

上式において、パラメータ N_n のみがピストン長さ l と半径すきま h の関数となっている。したがって、周波

数応答曲線 $|x/x_0|$ が l と h の値に関係なく点 P を通過するためには、式(9)が N_n に依存しなくなればよい。このことは、次の条件が満たされるときに成立する。

$$\frac{1}{(1 - \lambda^2)^2} = \frac{1 + \eta(2 + \eta)}{(1 - \lambda^2)^2 + \eta(2 + \eta - 2\lambda^2)} \quad \dots\dots\dots(10)$$

式(10)を満たす λ は二つ存在し、それらを振動数の低い方から順に λ_0 , λ_p と置くと、これらは次のように求められる。

$$\lambda_0 = 0 \quad \dots\dots\dots(11)$$

$$\lambda_p = \sqrt{\frac{2(1 + \eta)}{2 + \eta}} \quad \dots\dots\dots(12)$$

このうち、 λ_p が定点 P の横座標を表している。

次に、式(12)の λ_p を式(9)の λ に代入して、定点 P の縦座標を求めると

$$\left| \frac{x}{x_0} \right|_p = 1 + \frac{2}{\eta} \quad \dots\dots\dots(13)$$

最後に、共振曲線が定点 P で極大値をとる条件を探る。この条件は、式(9)を無次元振動数 λ で偏微分して零と置くことによって求められる*。点 P において式(10)が成立することを利用してその微分式を簡単化すると、次式が得られる。

$$N_{n\text{opt}}^2 = -\frac{1 - \lambda^2}{\lambda^2(1 + \eta - \lambda^2)} \quad \dots\dots\dots(14)$$

この式の λ に P 点の座標値 λ_p を代入すると

$$N_{n\text{opt}} = \frac{1}{1 + \eta} \sqrt{1 + \frac{\eta}{2}} \quad \dots\dots\dots(15)$$

これが空気ダンパの最適設計条件の一般式である。この式から図2(b)-(d)に示されたピストン長さ l と半径すきま h の最適値 l_{opt} , h_{opt} の計算式が

$$l_{\text{opt}} = \frac{b h^3}{12 \mu_0} \frac{\gamma p_0 (1 + 3\varepsilon^2/2)}{\omega_n A_p h_p} \frac{\sqrt{1 + \eta/2}}{1 + \eta} \quad \dots\dots\dots(16)$$

$$h_{\text{opt}} = \sqrt[3]{\frac{12 \mu_0 l}{\pi (d_p + h)} \frac{\omega_n A_p h_p}{\gamma p_0 (1 + 3\varepsilon^2/2)} \frac{1 + \eta}{\sqrt{1 + \eta/2}}} \quad \dots\dots\dots(17)$$

と求められる。式(17)の右辺には h が含まれているので、 h_{opt} の導出には反復計算を必要とする。

このように定点 P の座標は、空気ダンパの四つの主要な設計パラメータのうち、ピストン直径 d_p とピストン高さ h_p によって定まり、この定点 P で共振曲線が極大値をとる条件から、残り二つのパラメータのピストン長さ l と半径すきま h の最適値が求められる。

* 実際には $\partial(|x/x_0|^2)/\partial(\lambda^2) = 0$ を計算する方が便利である。これは極値の判定式であり、曲線がこの点で極小値をとるか変曲点となる可能性も含まれている。そこで第2階導関数を計算し、点 P において式(14)が成立することを利用して $\partial^2(|x/x_0|^2)/\partial(\lambda^2)^2 = -(1 + 2/\eta)^4 < 0$ となることがわかり、曲線が極大値をとることが保証される。

このようにして得られた空気ダンパの設計式は、表2のように整理できる。この表で用いられている記号の意味については、表1で説明されている。

表2 空気ダンパの設計図表(その2)

System with an air damper
	Equation of motion	$m\ddot{x} + c(\dot{x} - \dot{x}_0) + (k + k_a)(x - x_0) = 0$
	Steady-state response	$\left \frac{x}{x_0} \right = \sqrt{\frac{1 + [1 + \eta(2 + \eta)]\lambda^2 N_n^2}{(1 - \lambda^2)^2 + [(1 - \lambda^2)^2 + \eta(2 + \eta - 2\lambda^2)]\lambda^2 N_n^2}}$
	Coordinates of fixed point P	$\eta = \frac{\gamma p_0 A_p}{m \omega_n^2 h_p}$ $\lambda_p = \sqrt{\frac{2(1 + \eta)}{2 + \eta}}$ $\left \frac{x}{x_0} \right _P = 1 + \frac{2}{\eta}$
Optimum condition	N_n	$N_n = \frac{\alpha_0 \omega_n A_p h_p}{\gamma p_0 (1 + 3\varepsilon^2/2)}$
	where α_0	$\alpha_0 = \frac{12\mu_0 l}{bh^3}$
	$N_{n\text{opt}}$	$N_{n\text{opt}} = \frac{1}{1 + \eta} \sqrt{1 + \frac{\eta}{2}}$

4. 数値計算例

図3は、式(9)によって計算された図2の振動系の周波数応答曲線を表している。無次元量 η が大きくなるほど定点 P の高さは低くなり、同時に N_n の最適値も減少していくことが分かる。また図4は、図3と同じ条件で計算された系の減衰比 κ とばね定数比 κ を表している。これらの図から、空気ダンパの設計法に関して以下のことが明らかになった。

- (1) 定点 P の高さは式(8)によって定義された無次元量 η によって一意に定まり、 η が大きくなるほど点 P は低くなる。 η は A_p に比例し、 h_p に反比例するので、 η を大きくするにはピストン直径 d_p を大きくするか、シリンダ底面からピストン下面までの高さ h_p を低くすればよい。
- (2) ピストンとシリンダの中心軸が偏心して取り付けられていても、定点 P の座標には影響を与えない(図2(b)と(d))。
- (3) η の値が定まると、共振曲線が定点で極大値をとる条件は、式(6)によって定義された無次元量 N_n によって決定される。したがって、 N_n を式(15)で計算される最適値 $N_{n\text{opt}}$ になるようにピストン長さ l と半径すきま h を決めれば、それが最適のピストン長さ l_{opt} と半径すきま h_{opt} になる。
- (4) 空気ダンパは空気ばねとしての特性も有しているので、最適に調整された振動系において必ずしも最大の減衰比が得られている訳ではない。

図3 粘性空気ダンパが取り付けられた1自由度振動系の周波数応答曲線

5. 実 験

図5(a)は空気ダンパの実験装置を示している。装置の中央に空気ダンパが取り付けられ、それを取り囲む形で3個のループばねが対称に配置されている。空気ダンパのピストン棒の長さは自由に調整でき、シリンダ底面からピストン下面までの高さ h_p が変えられるようになっている。また、ピストンを交換することによって様々な長さのピストンに対する装置の振動特性が測定できる。

図5(b)は、 $h_p=2.5\text{ mm}$ における系の定常応答の測定結果を示している。この実験では、ピストンの長さ l を2mmから40mmまで変化させている。図中の曲線は、式(3)によって計算された理論曲線である。なお、この計算においては、支持ばねの質量 m_s と振動系の内部減衰・構造減衰等による等価粘性減衰係数 c_e の影響も考慮されている⁽⁹⁾。また、ピストンとシリンダの中心軸のずれの大きさについては測定できず、この図では実験結果との比較による推定値 $\varepsilon=0.5$ を用いて理論曲線が計算されている。支持ばねの質量の影響によって理論

図4 粘性空気ダンパが取り付けられた1自由度振動系の減衰比とばね定数比の周波数特性

図5 実験装置と実験結果

曲線は完全に1点で交わっている訳ではないが、その誤差は無視できるほど小さい。また $l=10$ mm の曲線がこの定点の近傍で極大値をとっており、これがほぼ最適のピストン長さになっていることがわかる。一方、実験値においても定点の存在が認められ、 $l=10$ mm における実験値が最適のピストン長さとなっている。これは理論解析の予測と一致している。

次に、図5(c)と(d)は本実験に用いられた空気ダンパの減衰係数 c とばね定数 k_a の周波数特性を表している。これらの値は、本実験装置が1自由度の線形振動系であるという仮定に基づいて同定されたものである。この実験により、励振振動数の増加と共に空気ダンパの減衰係数は小さくなり、ばね定数が大きくなることが確かめられた。図中の曲線は表2に示された式によって計算された理論曲線であり、実験値とよく一致している。また最適に設計された空気ダンパ ($l=10$ mm) は、広い振動数範囲に渡って比較的大きな減衰力を安定して供給していることが分かる。

6. 結 言

1自由度線形振動系に粘性空気ダンパを取り付けると、その周波数応答曲線に一つの定点が現れることを

理論解析と実験によって明らかにした。この定点は、空気ダンパのピストンの長さ l やシリンダとのすきま h を変えても移動しないし、ピストンとシリンダの中心軸のずれにも影響されない。このような性質を利用すれば、空気ダンパの最適設計が容易に行える。すなわち、この定点の高さはピストン直径 d_p とシリンダ底面からピストン下面までの距離 h_p によって決まるので、まず定点ができるだけ低くなるようにこれらの値を定め、次にこの定点で共振曲線が極大値をとるようにピストンの長さ l とすきま h を決めればよい。

文 献

- (1) 萩原尊禮, 震研彙報, 13 (1935), 783.
- (2) 早坂壽雄, 電気通信学会雑誌, No.232 (1942).
- (3) 国枝正春, 鉄道技術研究報告, No.6 (1958-4), 1.
- (4) 小田尚輝・西村誠一, 機論, 35-273 (1969), 996.
- (5) 小柳志郎, 機論, 49-439, C(1983), 410.
- (6) 矢部 寛, 機論, 56-522, C(1990), 442.
- (7) 市原順一, 機論, 56-522, C(1990), 449.
- (8) 浅見敏彦・関口久美, 機論, 56-526, C(1990), 1400.
- (9) 浅見敏彦・関口久美, 機論, 56-532, C(1990), 3201.
- (10) 松田博行・鈴木延明, 機講論, No.920-55 (1992-7), 474.
- (11) Den Hartog, J. P., *Mechanical Vibrations*, 4th ed. (1956), 102, McGraw Hill.