振動平板における音響放射パワーの計算法について*

田 中 信 雄^{*1}, Scott D. SNYDER^{*2}
菊 島 義 弘^{*1}, 黒 田 雅 治^{*1}

Total Acoustic Power Radiated by Planar Vibrating Structures

Nobuo TANAKA, Scott D. SNYDER,
Yoshihiro KIKUSHIMA and Masaharu KURODA

Over the last twenty years a great deal of work has been devoted to obtaining expressions describing the radiation efficiencies of structural mode shape functions, in an effort to qualify the radiation characteristics of the structure. These modal radiation efficiencies cannot, however, be used directly in the calculation of total radiated acoustic power, as this latter quantity is not equal to the sum of the acoustic power radiated by each mode vibrating on its own. This paper addressed the problem of using modal radiation efficiencies to calculate the total acoustic power output of a simply supported rectangular panel. It is shown that there is an extremely simple way to use modal radiation efficiencies to calculate the total acoustic power output of the panel, the accuracy of which is limited only by the same low frequency constraints placed upon the accuracy of the modal radiation efficiencies themselves.

Key Words: Sound, Structure-Borne Noise, Acoustic Power, Auto-radiation Efficiency, Cross-radiation Efficiency, Structural Acoustics, Plate, Acoustic Intensity, Power Transfer Matrix

1. 緒 言

振動構造物より放射される音響パワーの能動制御法としては、基本的には2種類の手法があり、一つは音を音で制する騒音制御法⁽¹⁾⁽²⁾と、一つは対象構造物の振動を制御することで音響パワーの抑制を図る振動制御法^{(3)~(5)}である。前者は、マイクロプロセッサの急速な発展を背景として、最近急速に普及している手法であり、現場サイドでも積極的にその導入⁽⁶⁾⁽⁷⁾が試みられている。これに対して、後者は、振動放射音パワーが最小となるように、構造物の振動特性を制御する方法であり、本研究は、振動と騒音を同時に制御するこの発生源対策の立場に立つ。

振動放射音パワーを振動制御の観点より抑制しようとする、当然のことながら振動と放射音の関係を明らかにする必要がある。すなわち、振動が完全に抑制され、対象平板の運動エネルギーが零となれば、音響放射パワーも零となることは自明であるが、能動制御手法を適用しても、この状態を実現するのは不可能に近い。したがって、ある振動レベルまで抑制しようと

いう段になると、複数の振動モードが励起されている状態から、ある振動レベルまで推移する過程で、音響放射パワーは運動エネルギーに必ずしも比例しないというむずかしさがある。すなわち、振動放射音には音のキャンセレーション・メカニズム⁽⁸⁾が存在し、振動制御を講ずることによりそのメカニズムを破壊することで、振動エネルギーは減少しても、逆に音響パワーは増大するという現象^{(8)~(10)}が発生することもあり得る。

さて、音響放射パワーの支配因子は、各々の振動モードに対応した音響放射効率であることから、これまでも、はり^{(11)~(13)}や種々の境界条件を有する平板の音響放射効率^{(13)~(18)}に関する報告が多く見られる。しかしながら、音響放射効率をそのまま音響放射パワーの計算に用いることができないのも事実である。すなわち、各モードに対する音響放射効率の単純和として音響パワーを導出することはできず、各モード間の相互影響まで考慮する必要がある。Williams⁽¹⁸⁾は、級数展開の手法により音響放射パワーの算出式を提示しており、音響パワーを計算するだけの目的ならば、これで十分であるといえよう。しかしながら、振動制御を講ずる立場に立つならば、振動放射パワーに寄与する振動モードを見すえた上で制御を講ずる必要があり、

* 原稿受付 平成5年1月27日。

^{*1} 正員、工業技術院機械技術研究所(●305 つくば市並木1-2)。^{*2} アデレード大学(オーストラリア)。

この視点からすれば、Williams の提示した音響パワーの算出式は不十分であり、音響放射効率ないしは振動モードと音響放射パワーの関係を見通しよく記述し得る、音響放射パワー算出式の導出が望まれる。

上述の問題点を考慮し、本論文は無限大バフル内におかれた平板構造物が固体加振を受けた際に放射される音響パワーの算出式を、Wallace の提示した音響放射効率⁽¹⁵⁾を基調として導出するものである。まず、振動平板から放射される音響パワーの一般的記述からはじめ、レーリー積分で記述される音響パワーが、モード速度ベクトルおよびパワー伝達マトリックスからなる実二次形式として記述されることを示す。ついで、パワー伝達マトリックスを波数空間にて級数展開する。さらに、この音響パワー表記式に、単純支持平板を適用し、奇数次および偶数次のモード関数の特性を考慮してパワー伝達マトリックスの展開を図る。次に、Wallace による音響放射効率を当該マトリックスに導入し、音響パワーを音響放射効率の関数として陽に表記する。最後に、本論文で提示した音響パワー算出法と数値積分法の比較を通じて精度の検証を行う。

2. 音響放射パワーの記述

図 1 に示すように、無限大バフル内におかれた平板構造物が調和加振を受ける場合、その際放射される音響パワー P_w の計算手法としては、基本的に 2 種類の方法⁽¹⁸⁾がある。第 1 の方法は、ファーフールドにおいて、当該構造物を閉じ囲むように音響インテンシティを半球面にわたり積分する方式で、次式のように記述される。

$$P_w = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi/2} \frac{|p(r)|^2}{2\rho_0 c_0} r^2 \sin \theta d\theta d\varphi \quad \cdots (1)$$

ここで、 $P(r)$ は半球面上の任意点 $r=(r, \theta, \varphi)$ における複素音圧、 ρ_0 および c_0 は空気密度および音速を表す。第 2 の方法は、振動構造物の表面における音響インテンシティを積分する方式で、次式のようになる。

$$P_w = \frac{1}{2} \int_s \operatorname{Re}(p^*(x)v(x)) dx \quad \cdots (2)$$

ただし、上式は振動構造物の面積分を表し、 $v(x)$ は表面上の任意点 $x=(x, y)$ における複素速度、 Re は実数成分、 $*$ は共役複素数を表す。

本研究は、振動制御を基調とする音響放射パワーの抑制を志向する立場上、音響パワーの算出に当たっては第 2 の方法を採用するものとする。すると、式(2)における音圧 p は、レーリー積分形式により構造物の表面速度 v を用い、次のように記述することができ

図 1 無限大バフル内におかれた平板構造物の座標系

る。

$$p(x_1) = \frac{j\omega\rho_0}{2\pi} \int_s v(x_2) \frac{e^{-jk|x_1-x_2|}}{|x_1-x_2|} dx_2 \quad \cdots (3)$$

$$= \frac{j\omega\rho_0}{2\pi} \int_s v(x_2) \frac{e^{-jkr}}{r} dx_2$$

ここで k は波数、 r は構造物上の任意点 x_1 と x_2 間の距離を表し、次のようになる。

$$r = |x_1 - x_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \quad \cdots (4)$$

式(3)を式(2)へ代入することにより、よく知られた音響放射パワー算出式⁽¹⁹⁾を得る。

$$P_w = \frac{\omega\rho_0}{4\pi} \int_s \int_s v^*(x_2) \frac{\sin kr}{r} v(x_1) dx_2 dx_1 \quad \cdots (5)$$

また、構造物上の任意点 x における速度 $v(x)$ は、モード展開形式として、次のように記述できる。

$$v(x) = \sum_{i=1}^{\infty} v_i \psi_i(x) \quad \cdots (6)$$

ここで v_i は i 次モードの複素速度、 ψ_i はそのモード関数を表す。

次に速度 $v(x)$ が、 n 個のモード重畳として近似できるものとする、

$$v(x) = \Psi^T(x)v \quad \cdots (7)$$

ただし、 T は転置、 $\Psi(x)$ および v は x における $(n \times 1)$ のモード関数ベクトルおよびモード速度ベクトルを表し、次のように定義される。

$$\Psi^T(x) = [\psi_1(x) \psi_2(x) \cdots \psi_n(x)] \quad \cdots (8)$$

$$v = [v_1 v_2 \cdots v_n]^T \quad \cdots (9)$$

すると式(7)を式(5)に代入することで、音響パワー P_w はモード速度ベクトルの関数として次式のように記述できる。

$$P_w = \frac{\omega\rho_0}{4\pi} \int_s \int_s v^H \Psi^*(x_2) \frac{\sin kr}{r} \Psi^T(x_1) v dx_2 dx_1$$

$$= \frac{\omega\rho_0}{4\pi} v^H \int_s \int_s \Psi^*(x_2) \frac{\sin kr}{r} \Psi^T(x_1) dx_2 dx_1 v \quad \cdots (10)$$

ここで、 H は転置共役を表す。さらに、式(10)は二次形式として、次のように記述できる。

$$P_w = \mathbf{v}^H \mathbf{A} \mathbf{v} \quad \dots\dots\dots (11)$$

ここで $(n \times n)$ マトリックス $\mathbf{A}$ は次式で定義され、本論文ではこれをパワー伝達マトリックスと呼ぶ。

$$\mathbf{A} = \frac{\omega \rho_0}{4\pi} \int_s \int_s \Psi^*(x_2) \frac{\sin kr}{r} \Psi^T(x_1) dx_2 dx_1 \quad \dots\dots\dots (12)$$

さて、音響放射効率 σ は、あるモードに対して、単位速度当たりの音響放射パワーを、それと等価な面積を有する剛体ピストンによる音響放射パワーで正規化したものであるから、式(11)で記述される音響パワー P_w は、マトリックス $\mathbf{A}$ の対角成分がそのモードに対応した自己音響放射効率に相当し、非対角成分がその項に関係するモード間の相互音響放射効率に相当する。通常は、自己音響放射効率を音響放射効率と呼んでおり、この関係を見ても、音響放射パワーは(自己)音響放射効率だけでは記述し得ないことが理解されよう。

次に、マトリックス $\mathbf{A}$ の i 行 j 列成分 a_{ij} は次式で記述できる。すなわち、

$$a_{ij} = \frac{\omega \rho_0}{4\pi} \int_s \int_s \Psi_i^*(x_2) \frac{\sin kr}{r} \Psi_j^T(x_1) dx_2 dx_1 \quad \dots\dots\dots (13)$$

式(13)に含まれる項 $(\sin kr/r)$ は、次のようにべき級数展開できる。

$$\begin{aligned} \frac{\sin kr}{r} &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (kr)^{2m+1}}{r(2m+1)!} \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m k^{2m+1} r^{2m}}{(2m+1)!} \quad \dots\dots\dots (14) \end{aligned}$$

さらに、式(14)における距離に関する項も次のように級数展開できる。

$$\begin{aligned} r^{2m} &= [(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2]^m \\ &= \sum_{l=0}^m m C_l (x_1 - x_2)^{2m-2l} (y_1 - y_2)^{2l} \\ &= \sum_{l=0}^m \sum_{p=0}^{2m-2l} \sum_{q=0}^{2l} m C_l \cdot 2m-2l C_p \cdot 2l C_q \\ &\quad \times x_1^{2m-2l} x_2^p y_1^{2l-q} y_2^q \quad \dots\dots\dots (15) \end{aligned}$$

ただし、

$$m C_l = \frac{m!}{(m-l)! l!} \quad \dots\dots\dots (16)$$

式(14)～(16)を式(13)に代入すると、

$$\begin{aligned} a_{ij} &= \frac{\rho_0 C_0}{4\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m k^{2m+2}}{(2m+1)!} \\ &\quad \times \sum_{l=0}^m \sum_{p=0}^{2m-2l} \sum_{q=0}^{2l} m C_l \cdot 2m-2l C_p \cdot 2l C_q \\ &\quad \times \int_s \Psi(x_2) x_2^p y_2^q dx_2 \end{aligned}$$

$$\times \int_s \Psi(x_1) x_1^{2m-2l-p} y_1^{2l-q} dx_1 \quad \dots\dots\dots (17)$$

となる。次に、式(17)における積分項を波数空間における偏微分形式として再記しよう。そのためには、モード関数のフーリエ変換⁽¹⁸⁾を次のように定義する。

$$\tilde{\Psi}(k_x, k_y) = \int_s \Psi(x) e^{-jk_x x} e^{-jk_y y} dx \quad \dots\dots\dots (18)$$

ただし、 $k_x = k \sin \theta \cos \varphi$, $k_y = k \sin \theta \sin \varphi$ を表す。さらに、式(17)におけるモード関数のモーメント項は次式のように記述できる。

$$\int_s \Psi(x) x^a y^b dx = j^{a+b} \frac{\partial^{a+b} \tilde{\Psi}(k_x, k_y)}{\partial^a k_x \partial^b k_y} \Big|_{k_x=k_y=0} \quad \dots\dots\dots (19)$$

ここで、 j は純虚数を表す。したがって、パワー伝達マトリックスの要素は、次式のように波数空間における偏微分形式として表すことができる。

$$\begin{aligned} a_{ij} &= \frac{\rho_0 C_0}{4\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m k^{2m+2}}{(2m+1)!} \\ &\quad \times \sum_{l=0}^m \sum_{p=0}^{2m-2l} \sum_{q=0}^{2l} m C_l \cdot 2m-2l C_p \cdot 2l C_q \\ &\quad \times \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial k_x} \right)^{2m-2l-p} \left(\frac{\partial}{\partial k_y} \right)^{2l-q} \tilde{\Psi}_i^* \right\} \\ &\quad \times \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial k_x} \right)^p \left(\frac{\partial}{\partial k_y} \right)^q \tilde{\Psi}_j \right\} \Big|_{k_x=k_y=0} \quad \dots\dots\dots (20) \end{aligned}$$

式(20)は無限大バフル内の平板構造物に適用できる一般式であり、次章ではその具体例として単純支持平板を取り上げ、その音響放射パワーについて議論する。

3. 周辺単純支持平板より放射される音響パワー

周辺が単純支持される長方形平板を考えよう。なお、平板は等方性で厚さが一様とし、他の寸法に比べて十分薄いものと仮定する。座標軸の中心を平板中央にとると、振動モード関数は次の3種類に分類される。

(イ) 奇数・奇数次モード

$$\Psi_{o/o}(x, y) = \cos \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} \quad \dots\dots\dots (21)$$

(ロ) 偶数・奇数次モード

$$\Psi_{e/o}(x, y) = \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} \quad \dots\dots\dots (22)$$

(ハ) 偶数・偶数次モード

$$\Psi_{e/e}(x, y) = \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad \dots\dots\dots (23)$$

ここで、 a, b および m, n は平板の x, y 軸方向の辺長およびモード指数を表す。また、奇数・偶数次モードに対しては、偶数・奇数次モードの x, y 軸方向とモード指数を交換することで得られるので除外している。

さて、これら振動モード関数のフーリエ変換をとると、一般的記述として次式を得る。

$$\bar{\Psi}(k_x, k_y) = (-1)^{(m+n)/2} \frac{4ab}{mn\pi^2} f(k_x) f(k_y) \quad \dots\dots\dots (24)$$

ここで、奇数次モードに対しては

$$f(k_x) = \frac{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 \cos \frac{k_x a}{2}}{k_x^2 - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2} \quad \dots\dots\dots (25)$$

偶数次モードに対しては

$$f(k_x) = \frac{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 \sin \frac{k_x a}{2}}{k_x^2 - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2} \quad \dots\dots\dots (26)$$

となり、 $f(k_y)$ についても同様に求めることができる。すると、これまでと同様に、級数展開により式(25)、(26)を再記すると

$$f(k_x) = -\left(1 - \frac{(k_x a)^2}{8} + \dots\right) \left(1 + \left(\frac{k_x a}{m\pi}\right)^2 + \dots\right) \quad \dots\dots\dots (27)$$

偶数次モードに対しては、

$$f(k_x) = -\left(\frac{k_x a}{2} - \frac{(k_x a)^3}{48} + \dots\right) \left(1 + \left(\frac{k_x a}{m\pi}\right)^2 + \dots\right) \quad \dots\dots\dots (28)$$

ここで注目すべきは、パワー伝達マトリックス A を算出するに当たり、式(25)および式(26)を式(20)に代入すると明らかなように、当該マトリックスの非零要素は、モード指数の偶数および奇数の組合せに依存するという点である。すなわち、例えば、偶数・偶数次モードに対しては、偶数・偶数次モードとの組合せのみが値をもち、それ以外の奇数・奇数次モード、偶数・奇数次モード、奇数・偶数次モードとの組合せでは a_{ij} は零となるということである。換言すれば、偶数・偶数次モードは偶数・偶数次モードとの組合せでしか、音響パワーを放射することはない。

次に、(イ)～(ハ)のケースに対して、パワー伝達マトリックスの要素 a_{ij} を精査しよう。その際に、音響放射効率 σ を陽な因子として a_{ij} を記述することを試みる。また、式(27)、(28)を適用するに当たり、当然のことながら $(k_x a / m\pi) < 1$ 、 $(k_y b / n\pi) < 1$ が収束を得るための条件となる。

(イ) 奇数・奇数次モード

Wallace の提示した音響放射効率の精度との整合性を考慮して、式(20)において $m=1$ とおくと、奇数・奇数次のパワー伝達マトリックスの i 行 j 列要素 $o_{io}a_{ij}$ は

$$o_{io}a_{ij} = \frac{4\rho_0 c_0 k^2 a^2 b^2}{m_i n_i m_j n_j \pi^5} \left\{ 1 - \frac{k^2 ab}{24} \left[\left(1 - \frac{8}{(m_i \pi)^2} \right) \frac{a}{b} \right. \right.$$

$$\left. + \left(1 - \frac{8}{(n_j \pi)^2} \right) \frac{b}{a} + \left(1 - \frac{8}{(m_j \pi)^2} \right) \frac{a}{b} + \left(1 - \frac{8}{(n_i \pi)^2} \right) \frac{b}{a} \right\} \quad \dots\dots\dots (29)$$

となる。さらに、式(29)は次式で定義される剛体ピストンの、単位速度当たりの放射パワー γ でくくることができる。ただし、 $\langle \cdot \rangle_t$ は時間平均を意味する。

$$\gamma = \frac{\rho_0 c_0 ab \langle |v|^2 \rangle}{v^* v} = \frac{\rho_0 c_0 ab}{8} \quad \dots\dots\dots (30)$$

したがって、奇数・奇数次モードの音響放射効率 $o_{io}\sigma_i$ とパワー伝達マトリックスの対角成分 $o_{io}a_{ii}$ の関係は、

$$o_{io}\sigma_i = \frac{o_{io}a_{ii}}{\gamma} = \frac{32k^2 ab}{m_i^2 n_i^2 \pi^5} \left\{ 1 - \frac{k^2 ab}{12} \left[\left(1 - \frac{8}{(m_i \pi)^2} \right) \frac{a}{b} + \left(1 - \frac{8}{(n_i \pi)^2} \right) \frac{b}{a} \right] \right\} \quad \dots\dots\dots (31)$$

すると、式(29)は音響放射効率 σ を用いて次のように記述できる。

$$o_{io}a_{ij} = \gamma \frac{\frac{m_i n_i}{m_j n_j} \sigma_i + \frac{m_j n_j}{m_i n_i} \sigma_j}{2} \quad \dots\dots\dots (32)$$

式(32)が奇数・奇数次モードの組合せにおけるパワー伝達マトリックスの要素を表し、 i 次モードにおける音響放射効率 σ_i と j 次モードにおける音響放射効率 σ_j が、その主因子となっている。

(ロ) 偶数・奇数次モード

(イ)の場合と同様に、Wallace の提示した音響放射効率の精度との整合性をもたせるように式(20)の無限級数を考慮すると、この場合は $m=2$ とする必要がある。ただし、 $m=0$ においては、 a_{ij} は零となることに注意されたい。すると、偶数・奇数次のパワー伝達マトリックスの要素 $e_{io}a_{ij}$ は次式となる。

$$e_{io}a_{ij} = \frac{\rho_0 c_0 k^4 a^4 b^4}{3m_i n_i m_j n_j \pi^5} \left\{ 1 - \frac{k^2 ab}{40} \left[\left(1 - \frac{24}{(m_i \pi)^2} \right) \frac{a}{b} + \left(1 - \frac{8}{(n_i \pi)^2} \right) \frac{b}{a} + \left(1 - \frac{24}{(m_j \pi)^2} \right) \frac{a}{b} + \left(1 - \frac{8}{(n_j \pi)^2} \right) \frac{b}{a} \right] \right\} \quad \dots\dots\dots (33)$$

この場合の音響放射効率 $e_{io}\sigma_i$ と式(33)との関係は、

$$e_{io}\sigma_i = \frac{e_{io}a_{ii}}{\gamma} = \frac{8k^4 a^3 b}{3m_i^2 n_i^2 \pi^5} \left\{ 1 - \frac{k^2 ab}{20} \left[\left(1 - \frac{24}{(m_i \pi)^2} \right) \frac{a}{b} + \left(1 - \frac{8}{(n_i \pi)^2} \right) \frac{b}{a} \right] \right\} \quad \dots\dots\dots (34)$$

となり、式(34)と(33)を比較することにより、式(33)は次式のように音響放射効率を用いて簡潔に記述される。

$$e_{io}a_{ij} = \gamma \frac{\frac{m_i n_i}{m_j n_j} \sigma_i + \frac{m_j n_j}{m_i n_i} \sigma_j}{2} \dots\dots\dots (35)$$

(ハ) 偶数・偶数次モード

これまでとまったく同様の考え方により、 $m=3$ とすることで、偶数・偶数次モードのパワー伝達マトリックス要素 $e_{ie}a_{ij}$ は次式となる。

$$e_{ie}a_{ij} = \frac{\rho_0 c k^6 a^4 b^4}{60 m_i n_i m_j n_j \pi^5} \left\{ 1 - \frac{k^2 ab}{28} \right. \\ \times \left[\left(1 - \frac{24}{(m_i \pi)^2} \right) \frac{a}{b} + \left(1 - \frac{24}{(n_i \pi)^2} \right) \frac{b}{a} \right. \\ \left. \left. + \left(1 - \frac{24}{(m_j \pi)^2} \right) \frac{a}{b} + \left(1 - \frac{24}{(n_j \pi)^2} \right) \frac{b}{a} \right] \right\} \dots\dots\dots (36)$$

また、音響放射効率と式(36)との関係も、これまでと同様に対処することにより次式を得る。

$$e_{ie}\sigma_i = \frac{e_{ie}a_{ii}}{\gamma} \\ = \frac{2k^6 a^3 b^3}{15 m_i^2 n_i^2 \pi^5} \left\{ 1 - \frac{k^2 ab}{14} \left[\left(1 - \frac{24}{(m_i \pi)^2} \right) \frac{a}{b} \right. \right. \\ \left. \left. + \left(1 - \frac{24}{(n_i \pi)^2} \right) \frac{a}{b} \right] \right\} \dots\dots\dots (37)$$

すると、式(36)は式(37)との比較により

$$e_{ie}a_{ij} = \gamma \frac{\frac{m_i n_i}{m_j n_j} \sigma_i + \frac{m_j n_j}{m_i n_i} \sigma_j}{2} \dots\dots\dots (38)$$

となる。ここで、注目すべきは、式(32)、(35)、(38)を

見ると明らかなように、モード指数の奇数、偶数の相違にはかかわらず、まったく同一の形式をとる点である。

以上を整理すると、単純支持平板の音響放射パワーは、 n 次までのモードを考慮すると、次式のような二次形式で記述できる。

$$P_w = \mathbf{v}^H \mathbf{A} \mathbf{v} \dots\dots\dots (39)$$

ただし、

図 2 加振周波数に対する音響放射パワー
(数値積分法と本論文で提示した手法との比較)

図 3 加振点の位置に対する音響放射パワー(数値積分法と本論文で提示した手法との比較)

$$a_{ij} = \gamma \frac{\langle 1 + (-1)^{m_i+m_j} \rangle \langle 1 + (-1)^{n_i+n_j} \rangle}{4} \\ \times \frac{\frac{m_i n_i}{m_j n_j} \sigma_i + \frac{m_j n_j}{m_i n_i} \sigma_j}{2} \dots\dots\dots (40)$$

4. 数値解析との比較

本章では、3章で導出したパワー伝達マトリックスを用いて音響放射パワーを算出し、その精度を検証する。そのためには、2種類ある音響パワー算出法のうち、比較対象として、ファーフールドでの音響インテンシティに基づく手法をここで採用する。

まず、 n 個の振動モードを用いて振動速度ベクトルが記述できるものとする、レーリー積分は次のように記述することができる。

$$p(\mathbf{r}) = \frac{j\omega\rho_0}{2\pi} \int_s v(\mathbf{x}) \frac{e^{-jk_r r}}{r} d\mathbf{x} \\ = \frac{j\omega\rho_0}{2\pi} \int_s \sum_{i=1}^n v_i \Psi_i(\mathbf{x}) \frac{e^{-jk_r r}}{r} d\mathbf{x} \\ = \sum_{i=1}^n v_i \left\{ \frac{j\omega\rho_0}{2\pi} \int_s \Psi_i(\mathbf{x}) \frac{e^{-jk_r r}}{r} d\mathbf{x} \right\} \dots\dots (41)$$

ここで式(41)の括弧内の積分はすでに Wallace⁽¹⁵⁾ によって解かれているので、それを転載すると

$$z_i(\mathbf{r}) = \left\{ \frac{j\omega\rho_0}{2\pi} \int_s \Psi_i(\mathbf{x}) \frac{e^{-jk_r r}}{r} d\mathbf{x} \right\} \\ = \frac{j\omega\rho_0 e^{-jk_r r}}{2\pi r} \frac{ab}{m_i n_i \pi^2} \left[\frac{(-1)^{m_i} e^{jk_x a} - 1}{\left(\frac{k_x a}{m_i \pi} \right)^2 - 1} \right] \\ \times \left[\frac{(-1)^{n_i} e^{jk_y b} - 1}{\left(\frac{k_y b}{n_i \pi} \right)^2 - 1} \right] e^{-j(k_x a/2 + k_y b/2)} \dots\dots (42)$$

すると、ファーフールドにおける音圧 $p(\mathbf{r})$ は、マトリックス形式で次のように記述される。

$$p(\mathbf{r}) = \mathbf{z}^T(\mathbf{r}) \mathbf{v} \dots\dots\dots (43)$$

ここで $(n \times 1)$ ベクトル $\mathbf{z}_r(\mathbf{r})$ は、振動場から距離 r だけ離れた空間点における音圧に至るまでの伝達関数ベクトルを意味し、次のように定義される。

表 1 モードと音響放射効率

Mode	Modal frequency Hz	Radiation efficiency (from Wallace)
(1,1)	35.292	0.133765
(1,2)	55.716	0.007657
(1,3)	89.756	0.012253
(2,1)	120.744	0.001872
(1,4)	137.412	0.001786
(2,2)	141.168	0.000060
(2,3)	175.208	0.000186
(1,5)	198.684	0.004336
(2,4)	222.864	0.000013
(3,1)	263.164	0.014239

$$\mathbf{z}_r(\mathbf{r}) = [z_1(\mathbf{r}) \ z_2(\mathbf{r}) \ \dots \ z_n(\mathbf{r})]^T \dots\dots\dots (44)$$

式(43)を式(1)に代入することにより、ファーフールドにおいて算出される音響放射パワーが次のように表される。

$$P_w = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi/2} \frac{p^*(\mathbf{r}) p(\mathbf{r})}{2\rho_0 c_0} r^2 \sin \theta d\theta d\varphi \\ = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi/2} \frac{\mathbf{v}^H \mathbf{z}_r^*(\mathbf{r}) \mathbf{z}_r^T(\mathbf{r}) \mathbf{v}}{2\rho_0 c_0} r^2 \sin \theta d\theta d\varphi \\ = \mathbf{v}^H \left\{ \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi/2} \frac{\mathbf{z}_r^*(\mathbf{r}) \mathbf{z}_r^T(\mathbf{r})}{2\rho_0 c_0} r^2 \sin \theta d\theta d\varphi \right\} \mathbf{v} \\ \dots\dots\dots (45)$$

式(45)と式(11)を比較すると明らかなように、式(45)の括弧内が、パワー伝達マトリックス $\mathbf{A}$ に相当し、これを数値積分することにより、本論文で導出したパワー伝達マトリックスと比較検討することができる。

一例として、1.8 m × 0.9 m × 9 mm の諸元を有する単純支持鋼製平板を考えよう。また、Wallace の公式⁽¹⁵⁾ が成立する範囲を考慮し、対象とする周波数を 50 Hz とする。表 1 には、10 次までのモード指数および共振周波数と、50 Hz での音響放射効率が記載されている。また、数値積分においては、波長の 5 倍離れた半球面を 900 分割して音響放射パワーを計算する。その結果得られたパワー伝達マトリックス $\mathbf{A}$ は次のとおり。

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 10.652 & 0 & 3.265 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.947 & 0 & 3.481 \\ 0 & 0.599 & 0 & 0 & 0.290 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3.265 & 0 & 1.007 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.601 & 0 & 1.066 \\ 0 & 0 & 0 & 0.146 & 0 & 0 & 0.046 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.290 & 0 & 0 & 0.141 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.005 & 0 & 0 & 0.002 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.046 & 0 & 0 & 0.015 & 0 & 0 & 0 \\ 1.947 & 0 & 0.601 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.359 & 0 & 0.636 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.002 & 0 & 0 & 0.001 & 0 \\ 3.481 & 0 & 1.066 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.636 & 0 & 1.138 \end{bmatrix} \dots\dots\dots (46)$$

また、表 1 に記された諸元を基に、式 (40) に代入して得たパワー伝達マトリックスは

$$A = \begin{bmatrix} 10.633 & 0 & 3.239 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.929 & 0 & 3.471 \\ 0 & 0.598 & 0 & 0 & 0.289 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3.239 & 0 & 0.978 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.582 & 0 & 1.055 \\ 0 & 0 & 0 & 0.146 & 0 & 0 & 0.046 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.289 & 0 & 0 & 0.140 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.005 & 0 & 0 & 0.002 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.046 & 0 & 0 & 0.015 & 0 & 0 & 0 \\ 1.929 & 0 & 0.582 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.346 & 0 & 0.628 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.002 & 0 & 0 & 0.001 & 0 \\ 3.471 & 0 & 1.055 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.628 & 0 & 1.133 \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (47)$$

となる。双方を比較すると明らかなように、本論文で導出したパワー伝達マトリックスと数値積分結果とのよい一致が見られている。また、前述のとおり、パワー伝達マトリックスの対角要素は、音響放射効率に対応し、非対角成分はモード間の相互音響放射効率に対応している。さらに、例えば 1 次の (1, 1) モードを見ると、当該モードに呼応して音響パワーを放射する（パワー伝達マトリックスの非零要素）のは、3 次、8 次および 10 次のモードのみで、それ以外のモードは音響パワーを放射することがない。ちなみに、3, 8, 10 次のモードは、(1, 3) モード、(1, 5) モード、(3, 1) モードの奇数・奇数次モードである。

さて、本論文で提示したパワー伝達マトリックスの精度を検証したので、次に、平板が点加振された場合の音響放射パワーを計算してみよう。図 2 は、加振点を ($x=0.58$ m, $y=0.4$ m)、加振力振幅を 1 N とした際の音響放射パワー（損失係数 $\eta=0.02$ ）を示している。本論文で提示した手法による結果と、数値積分を実行して得られた結果とを比較するとわかるように、この周波数範囲内では (1, 3) モードで 2 dB 程度の誤差が見られるものの、全体的には比較的よい一致を呈している。ただし、図 2 に示されている周波数領域に含まれる (2, 1) モード (120.7 Hz) では、Wallace の適用範囲を逸脱し、($k_x a / m\pi$) = 12.7 > 1 となっているものの、図で見る限り大きな誤差は認められない。

次に、加振点を平板の任意点とし、その作用位置に対する音響放射パワーの値を三次元的に表示したのが図 3 である。(1, 1) モード (35.3 Hz)、(1, 2) モード (55.7 Hz) およびその中間の 50 Hz に対する音響放射パワーが示されており、数値積分法と本手法による結果がよく一致しているのが理解されよう。また、パワー伝達マトリックスは、モード関数、周波数および音響放射距離の関数であり、対象平板における外力の作用位置やその数、平板の材質、肉厚などには一切かわりなく決定される。したがって、一度このパワー伝

達マトリックスを計算すれば、例えば複数加振による制振効果を算出する際は、それに応じたモード速度ベクトルを求めるだけで音響放射パワーが計算できる。

5. 結 言

平板構造物が固体加振を受けて振動する場合、その際に放射される音響パワー算出式を導出するとともに、振動モードと音響放射効率とが音響パワーに及ぼす影響について明らかにした。本論文で得た成果を要約すると次のとおり。

1. 無限大バフル内の平板構造物が調和加振を受ける場合、その際に放射される音響パワー算出式を導出した。また、音響放射パワーが、パワー伝達マトリックスおよびモード速度ベクトルで構成される二次形式で記述されることを明らかにした。

2. 式 (1) で得られた算出式を単純支持平板に適用し、パワー伝達マトリックスを導出するとともに、その物理的意味を明らかにした。すなわち、当該マトリックスの対角成分は、各振動モード自身に対する自己音響放射効率に対応し、非対角成分はそれに関係する二つの振動モード間で決定される相互音響放射効率に相当する。

3. したがって、複数個の振動モードが同時に励起され、音響パワーが放射される場合、自己音響放射効率と相互音響放射効率が複合して音響パワーに寄与する。その際に、相互音響放射効率は、モード指数が奇数および偶数の組合せで決定される。例えば、偶数・奇数次モードでは、それと同じ偶数・奇数次モードのみが呼応して音響パワーを放射し、それ以外のモードとは音響パワーを放射することはない。

4. パワー伝達マトリックスの要素を、Wallace の提示とした音響放射効率をパラメータとし、陽な形式として記述した。また、パワー伝達マトリックスはモード関数、周波数および音響放射距離の関数であり、対象平板における外力の作用位置やその数、平板の材

質、肉厚などには一切かわりなく決定される。したがって、一度このパワー伝達マトリックスを計算すれば、例えば複数加振による制振効果を算出する際は、それに応じたモード加速ベクトルを求めさえすれば音響放射パワーが計算できる。

5. ファーフィールドにおける音響放射パワーを数値積分により実行し、本論文で提案した手法との精度比較を行った。その結果、Wallace の公式の成立する周波数範囲内では、十分な精度が得られることを明らかにした。

文 献

- (1) Deffayet, C. and Nelson, P. A., Active control of low-frequency harmonic sound radiated by a finite panel, *J. Acous. Soc. Amer.*, 84-6 (1988), 2192.
- (2) Song, L., ほか 2 名, Active control of the acoustic radiation of a vibrating structure using a superposition formulation *J. Acous. Soc. Amer.*, 89-6 (1991), 2786.
- (3) Fuller, C. R., Active control of sound transmission/radiation from elastic plates by vibration inputs; I. Analysis, *J. Sound Vib.*, 136-1 (1991), 1.
- (4) Meirovitch, L. and Thangitham, S., Active control of sound radiation pressure, *Trans. ASME, J. of Vibration and Acoustics*, 112 (1990), 237.
- (5) 田中・ほか 2 名, 振動放射音の制御に関する研究(制御効果と放射音について), 機論, 57-541, C(1991), 2846.
- (6) 長安・ほか 6 名, 能動制御による消音(低騒音冷蔵庫の開発)機論, No. 910-17(1991), 13.
- (7) 中路・ほか 2 名, 車室内音場特性に着目したこもり音アクティブ制御技術の研究, 機論, No. 910-52(1991), 301.
- (8) 田中・ほか 2 名, 振動放射音の制御に関する研究(キャンセレーションメカニズムについて), 機論, 57-537, C (1991), 1512.
- (9) Snyder, S. D. and Hansen C. H., Mechanisms of active noise control using vibration sources, *J. Sound Vib.*, 147 (1991), 519.
- (10) Pan, J., ほか 2 名, Active control of far field sound radiated by a rectangular panel-a general analysis, *J. Acou. Soc. Amer.*, 91 (1992), 2056.
- (11) Wallace, C. E., Radiation resistance of a baffled beam, *J. Acoust. Soc. Am.*, 51 (1972), 936.
- (12) Chung, F. Y. and Crocker, M. J., The effect of wave cancellation on the radiation resistance of an implicitly-supported baffled beam, *J. Sound Vib.*, 40 (1975), 381.
- (13) Levine, H., On the short wave acoustic radiation from planar panels or beams of rectangular shape, *J. Acoust. Soc. Am.*, 76 (1984), 608.
- (14) Maidanik, G., Response of ribbed panels to reverberant acoustic fields, *J. Acoust. Soc. Am.*, 34 (1962), 809.
- (15) Wallace, C. E., Radiation resistance of a rectangular panel, *J. Acoust. Soc. Am.*, 51 (1972), 946.
- (16) Gomperts, M. C., Radiation from rigidly baffled rectangular panels with general boundary conditions, *Acustica*, 30 (1974), 320.
- (17) Gomperts, M. C., Sound radiation from baffled, thin, rectangular plates, *Acustica*, 37 (1977), 93.
- (18) Williams, E. G., A series expansion of the acoustic power radiated from planar sources, *J. Acoust. Soc. Am.*, 73 (1983), 1520.
- (19) Bouwkamp, C. J., A contribution to the theory of acoustic radiation, *Philips Res. Rep.*, 1 (1945), 251.