回転する2層円筒殻の振動解析*

鈴木 勝義^{*1}, 南 後 淳^{*2}, 小沢田 正^{*1}Analysis of Vibration of Rotating Circular Cylindrical Shells
with Two Layers

Katsuyoshi SUZUKI, Jun NANGO and Tadashi KOSAWADA

An exact method using a power series expansion is presented for solving free vibration of rotating thin circular cylindrical shells having two bonded elastic layers. Equations of motion, which are differential equations with variable coefficients, are solved exactly by using a power series expansion. Effects of various parameters such as material properties of the shell layers, rotating angular velocity upon natural frequencies and mode shapes are investigated.

Key Words: Vibration of Rotating Body, Free Vibration, Thin Circular Shell, Two Layers, Thin Shell Theory, Exact Solution, Natural Frequency, Mode Shapes

1. 緒 言

回転円筒殻は、高速遠心分離機をはじめとする回転機械や高出力航空機エンジンなどに使用されており、高速化、高能率化を進めるため、その振動特性を詳しく知ることは非常に重要である。このため、これまで多くの研究報告がなされている^{(1)~(7)}。しかしながら、振動方程式の解法にあたっては、変数係数の微分方程式を避けるため、初期張力を一定にするなど回転による初期張力を正しく考慮したものは少ない。また、2層円筒殻の軸対称振動については Markus の研究⁽⁸⁾があるが、回転による影響を考慮したものは見受けられず、回転する複合円筒殻の振動特性についてはいまだ解明されていない状況にある。最近複合材料の研究が盛んであるが、比強度、比弾性係数を高めたり、耐食性や耐熱性等を増すことを考慮するとき、回転円筒殻においても複合化の問題は今後ますます重要になると思われる。

これらのことを考慮して、本報告では、回転する2

層円筒殻の自由振動を解析する。ただし解析では2層とも弾性体とし、境界面においては滑りがないものと仮定する。解析方法は、はじめに円筒殻の2層それぞれの振動のラグランジュアンを求める。次にそれらを線形結合させ、同一基準面(2層の中央面)の変位で表す。そしてラグランジュアンの停留条件より振動方程式および境界条件式を導く。振動方程式は級数解を用いて厳密に解析する。数値計算は両端固定の場合について行い、対称振動、反対称振動の固有振動数および振動モードを求め、回転数、殻厚、殻の長さなどの種々のパラメータがそれらに及ぼす影響を明らかにする。

2. 解 析

2・1 運動方程式(基礎方程式) 角速度 Ω で回転している2層円筒殻の振動を考える。添字 $i(i=1, 2)$ によって層を区別する。各層において l, h_i, a_i を円筒殻の長さ、肉厚および平均半径とする。円筒殻の中央断面上の円を基準円にとり、図1のように各層の中央面上で座標 x, ϕ, z_i をとる。層 i における任意点での x, ϕ, z_i 方向変位をそれぞれ $\bar{U}_i, \bar{V}_i, \bar{W}_i$ とし、各層の中央面上の変位成分 u_i, v_i, w_i を用いて、次のようにおく。

* 平成4年8月21日 東北支部いわき地方講演会において講演、原稿受付 平成5年4月22日。

^{*1} 正員、山形大学工学部(〒992 米沢市城南4-3-16)。

^{*2} 准員、山形大学工学部。

$$\bar{U}_i = u_i - z_i \frac{\partial w_i}{\partial x}, \quad \bar{V}_i = v_i + \frac{z_i}{a_i} \left(v_i - \frac{\partial w_i}{\partial \phi} \right), \quad \bar{W}_i = w_i \quad \dots\dots\dots (1)$$

円筒殻の任意点におけるひずみ成分は、Novozhilov の非線形弾性理論を用いて、次のように表される⁽⁹⁾。

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_{xi} &= \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x} + \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{V}_i}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{W}_i}{\partial x} \right)^2 \right\} \\ \epsilon_{\phi i} &= \frac{1}{a_i + z_i} \left(\frac{\partial \bar{V}_i}{\partial \phi} + \bar{W}_i \right) + \frac{1}{2(a_i + z_i)^2} \left\{ \left(\frac{\partial \bar{U}_i}{\partial \phi} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{V}_i}{\partial \phi} + \bar{W}_i \right)^2 + \left(\bar{V}_i - \frac{\partial \bar{W}_i}{\partial \phi} \right)^2 \right\} \\ \gamma_{\phi xi} &= \frac{\partial \bar{V}_i}{\partial x} + \frac{1}{a_i + z_i} \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial \phi} + \frac{1}{a_i + z_i} \left\{ \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x} \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial \phi} + \frac{\partial \bar{V}_i}{\partial x} \left(\frac{\partial \bar{V}_i}{\partial \phi} + \bar{W}_i \right) - \frac{\partial \bar{W}_i}{\partial x} \left(\bar{V}_i - \frac{\partial \bar{W}_i}{\partial \phi} \right) \right\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2)$$

ここで、層間に滑りがなく、各層の z 方向変位 w_i が w に等しいことを仮定し、各層の中央面の変位 u_i, v_i, w_i を全体の中央面の変位 u, v, w によって表すと次のようになる。

$$\begin{aligned} u_1 &= u + d \frac{\partial w}{\partial x}, \quad u_2 = u - (H-d) \frac{\partial w}{\partial x}, \quad v_1 = \frac{a_1}{a} v + \frac{d}{a} \frac{\partial w}{\partial \phi}, \\ v_2 &= \frac{a_2}{a} v - \frac{H-d}{a} \frac{\partial w}{\partial \phi}, \quad w_1 = w, \quad w_2 = w \quad \dots\dots\dots (3) \end{aligned}$$

d は層 1 の中央面と全体の中央面との距離、 H は層 1 と層 2 の中央面間の距離、 a は全体の中央面の半径を表す。殻厚が十分に薄い場合、垂直応力は平面応力状態にあると仮定し、応力とひずみの関係は Hooke の法則に従うものとして、次のようにおく。ここで、 E_i および ν_i は、それぞれ各層における縦弾性係数、ポアソン比を表す。

$$\sigma_{xi} = \frac{E_i}{1-\nu_i^2} (\epsilon_{xi} + \nu_i \epsilon_{\phi i}), \quad \sigma_{\phi i} = \frac{E_i}{1-\nu_i^2} (\epsilon_{\phi i} + \nu_i \epsilon_{xi}), \quad \tau_{\phi xi} = \frac{E_i}{2(1+\nu_i)} \gamma_{\phi xi} \quad \dots\dots\dots (4)$$

ここで、 ρ_i, t を密度、時間として振動のラグランジュアンを次のように定義する。

$$\begin{aligned} L &= \sum_{i=1}^2 \left[\frac{\rho_i a_i h_i}{2} \int_0^{2\pi} \int_{-l/2}^{l/2} \left\{ \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} \right)^2 + \left\{ \frac{\partial v_i}{\partial t} + \Omega(a_i + w_i) \right\}^2 + \left(\frac{\partial w_i}{\partial t} - \Omega v_i \right)^2 \right\} dx d\phi \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \int_{-h_i/2}^{h_i/2} \int_0^{2\pi} \int_{-l/2}^{l/2} (\sigma_{xi} \epsilon_{xi} + \sigma_{\phi i} \epsilon_{\phi i} + \tau_{\phi xi} \gamma_{\phi xi}) (a_i + z_i) dx d\phi dz_i \right] \quad \dots\dots\dots (5) \end{aligned}$$

はじめに定常回転時の運動方程式を求める。定常回転時の諸量に * を付けることにする。定常回転時では軸対称変形とし、また変形は微小として、式 (2) のひずみについては線形項のみを考える。式 (1) ~ (4) を式 (5) に代入し、ハミルトンの原理 $\int_{t_1}^{t_2} \delta L dt = 0$ を適用すると、次のオイラー方程式 (運動方程式) と境界条件式が求まる。運動方程式は、

$$\left. \begin{aligned} \Gamma_1 + S \Gamma_2 + \left(\frac{a}{a_1} \Gamma_1 + S \frac{a}{a_2} \Gamma_2 \right) W^* - (\bar{N}_{\phi 1}^* + S \bar{N}_{\phi 2}^*) - \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \left[\frac{h_1^2}{12 a^2} M_{\xi 1}^* + \frac{a_1 d}{a^2} N_{\xi 1}^* \right] \\ + S \left\{ \frac{h_2^2}{12 a^2} M_{\xi 2}^* + \frac{a_2 (d-H)}{a^2} N_{\xi 2}^* \right\} = 0 \\ \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{a_1}{a} N_{\xi 1}^* + S \frac{a_2}{a} N_{\xi 2}^* \right) = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (6)$$

ここに、 $\Gamma_i = (1-\nu_i^2) \rho_i a_i^2 \Omega^2 / E_i$ である。また、 $U^* = u^*/a$, $W^* = w^*/a$ は無次元変位、 $\xi = x/a$ は無次元座標である。なお、式 (5) の z_i についての積分では、

図 1 回転円筒殻の座標系

図 2 x 方向と ϕ 方向の変位

$1/(a_i + z_i)$ はマクローリン展開し, z_i の 4 次以上は微小項として省略した. $\xi = \pm \mu (= \pm l/2a)$ における境界条件式は,

$$\left. \begin{aligned} & \left(\frac{a_1}{a} N_{\#1}^* + S \frac{a_2}{a} N_{\#2}^* \right) \delta U^* = 0 \\ & \left[\frac{h_1^2}{12a^2} M_{\#1}^* + \frac{a_1 d}{a^2} N_{\#1}^* + S \left\{ \frac{h_2^2}{12a^2} M_{\#2}^* + \frac{a_2(d-H)}{a^2} N_{\#2}^* \right\} \right] \delta \left(\frac{\partial W^*}{\partial \xi} \right) = 0 \\ & \left[\frac{\partial}{\partial \xi} \left[\frac{h_1^2}{12a^2} M_{\#1}^* + \frac{a_1 d}{a^2} N_{\#1}^* + S \left\{ \frac{h_2^2}{12a^2} M_{\#2}^* + \frac{a_2(d-H)}{a^2} N_{\#2}^* \right\} \right] \right] \delta W^* = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (7)$$

ここに,

$$\left. \begin{aligned} N_{\#i}^* &= \frac{\partial U^*}{\partial \xi} + \frac{a}{a_i} \nu_i W^* - \frac{a_i k_i - \Delta_i}{a} \frac{\partial^2 W^*}{\partial \xi^2}, \quad \bar{N}_{\#i}^* = \frac{a}{a_i} (1 + k_i) W^* + \nu_i \left(\frac{\partial U^*}{\partial \xi} + \frac{\Delta_i}{a} \frac{\partial^2 W^*}{\partial \xi^2} \right) \\ M_{\#i}^* &= \frac{a_i}{a} \left(1 - \frac{\Delta_i}{a_i} \right) \frac{\partial^2 W^*}{\partial \xi^2} - \frac{\partial U^*}{\partial \xi} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (8)$$

ただし, $\Delta_1 = d$, $\Delta_2 = d - H$ である. 次に, 円筒殻に定常的な初期張力が生じている状態で微小振動する場合の運動方程式を考える. 変位成分を定常回転による変形量と振動時による変形量の和として次式で表す.

$$(u, v, w) = (u^* + \bar{u}, \bar{v}, w^* + \bar{w}) \dots\dots\dots (9)$$

振動時の諸量には“ $\sim$ ”を付けることにする. 式(9)を式(1)~(5)に代入して積分を行い, $\int_{t_1}^{t_2} \delta L dt = 0$ を求める. ただし, 振動項については 2 次まで, 定常回転項と振動項との相乗項についても最高 3 次まで考慮し, ほかの項は微小項として無視する. このようにして求めたオイラー方程式(運動方程式)から, 式(6)の定常回転時の運動方程式を差し引くと, 振動時の運動方程式は次のようになる.

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \bar{E}_{11}}{\partial \xi} + \frac{\partial \bar{E}_{12}}{\partial \phi} + \bar{E}_{13} \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial \xi^2} + \bar{E}_{14} \frac{\partial^3 \bar{W}}{\partial \xi^3} + \bar{E}_{15} \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial \phi^2} + \bar{E}_{16} \frac{\partial^3 \bar{W}}{\partial \xi \partial \phi^2} \\ & - \bar{E}_{17} \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial t^2} - \bar{E}_{18} \frac{\partial^3 \bar{W}}{\partial t^2 \partial \xi} - S \frac{a_2 H}{a^2} \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial \xi^2} \frac{\partial N_{\#2}^*}{\partial \xi} = 0, \\ & \frac{\partial \bar{E}_{21}}{\partial \xi} + \frac{\partial \bar{E}_{22}}{\partial \phi} + \bar{E}_{23} \frac{\partial^2 \bar{V}}{\partial \xi^2} + \bar{E}_{24} \frac{\partial^3 \bar{W}}{\partial \xi^2 \partial \phi} + \bar{E}_{25} \frac{\partial^2 \bar{V}}{\partial \phi^2} + \bar{E}_{26} \frac{\partial^3 \bar{W}}{\partial \phi^3} + \bar{E}_{27} \bar{V} \\ & + \bar{E}_{28} \frac{\partial \bar{W}}{\partial \phi} - \bar{E}_{29} \frac{\partial \bar{W}}{\partial t} - \bar{E}_{210} \frac{\partial^2 \bar{V}}{\partial t^2} - \bar{E}_{211} \frac{\partial^3 \bar{W}}{\partial t^2 \partial \phi} + \bar{E}_{212} \frac{\partial \bar{V}}{\partial \xi} + \bar{E}_{213} \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial \xi \partial \phi} = 0, \\ & \bar{E}_{31} + \frac{\partial^2 \bar{E}_{32}}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \bar{E}_{33}}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 \bar{E}_{34}}{\partial \xi \partial \phi} + \bar{E}_{35} \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial \phi^2} + \bar{E}_{36} \frac{\partial \bar{V}}{\partial \phi} + \bar{E}_{37} \bar{W} \\ & + \bar{E}_{38} \frac{\partial^4 \bar{W}}{\partial \xi^2 \partial \phi^2} + \bar{E}_{39} \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial \phi^2} + \bar{E}_{310} \frac{\partial^3 \bar{U}}{\partial \xi \partial \phi^2} + \bar{E}_{311} \frac{\partial^3 \bar{V}}{\partial \phi^3} + \bar{E}_{312} \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial \xi^2} + \bar{E}_{313} \frac{\partial^3 \bar{U}}{\partial \xi^3} \\ & + \bar{E}_{314} \frac{\partial^3 \bar{V}}{\partial \xi^2 \partial \phi} + \bar{E}_{315} \frac{\partial^4 \bar{W}}{\partial \xi^4} - \bar{E}_{316} \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial \xi^2} + \bar{E}_{317} \frac{\partial^2 \bar{V}}{\partial \xi \partial \phi} + \bar{E}_{318} \frac{\partial^3 \bar{W}}{\partial \xi^3} + \bar{E}_{319} \frac{\partial^3 \bar{W}}{\partial \xi \partial \phi^2} \\ & + \bar{E}_{320} \frac{\partial \bar{U}}{\partial \xi} + \bar{E}_{321} \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial \phi^2} - \bar{E}_{322} \frac{\partial \bar{V}}{\partial t} + \bar{E}_{323} \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial t^2} - \bar{E}_{324} \frac{\partial^3 \bar{U}}{\partial t^2 \partial \xi} - \bar{E}_{325} \frac{\partial^3 \bar{V}}{\partial t^2 \partial \phi} \\ & - \bar{E}_{326} \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial t \partial \phi} - \bar{E}_{327} \frac{\partial^4 \bar{W}}{\partial t^2 \partial \xi^2} - \bar{E}_{328} \frac{\partial^4 \bar{W}}{\partial t^2 \partial \phi^2} = 0 \dots\dots\dots (10) \end{aligned}$$

ここに, $\bar{U} = \bar{u}/a$, $\bar{V} = \bar{v}/a$, $\bar{W} = \bar{w}/a$ であり, また,

$$\begin{aligned} \bar{E}_{11} &= \frac{a_1}{a} N_{\#1} + \frac{a_2}{a} S N_{\#2}, \quad \bar{E}_{12} = \frac{1 - \nu_1}{2} N_{\#1} + S \frac{1 - \nu_2}{2} N_{\#2}, \quad \bar{E}_{13} = \frac{a_1}{a} N_{\#1}^* + S \frac{a_2}{a} N_{\#2}^*, \\ \bar{E}_{14} &= \frac{a_1 d}{a^2} N_{\#1}^* + \frac{a_2(d-H)}{a^2} S N_{\#2}^*, \quad \bar{E}_{15} = \frac{a}{a_1} \bar{N}_{\#1}^* + S \frac{a}{a_2} \bar{N}_{\#2}^*, \quad \bar{E}_{16} = \frac{d}{a_1} \bar{N}_{\#1}^* + S \frac{d-H}{a_2} \bar{N}_{\#2}^*, \\ \bar{E}_{17} &= \frac{a}{a_1} \Gamma_{01} + S \frac{a}{a_2} \Gamma_{02}, \quad \bar{E}_{18} = \frac{d}{a_1} \Gamma_{01} + S \frac{d-H}{a_2} \Gamma_{02}, \\ \bar{E}_{21} &= \frac{a_1^2}{a^2} \left\{ \frac{1 - \nu_1}{2} N_{\#1} + (1 - \nu_1) M_{\#1} \right\} + S \frac{a_2^2}{a^2} \left\{ \frac{1 - \nu_2}{2} N_{\#2} + (1 - \nu_2) M_{\#2} \right\}, \\ \bar{E}_{22} &= \frac{a_1}{a} (N_{\#1} - M_{\#1}) + S \frac{a_2}{a} (N_{\#2} - M_{\#2}), \quad \bar{E}_{23} = \frac{a_1^3}{a^3} N_{\#1}^* + S \frac{a_2^3}{a^3} N_{\#2}^*, \\ \bar{E}_{24} &= \frac{a_1^2 d}{a^3} N_{\#1}^* + S \frac{a_2^2(d-H)}{a^3} N_{\#2}^*, \quad \bar{E}_{25} = \frac{a_1}{a} \bar{N}_{\#1}^* + S \frac{a_2}{a} \bar{N}_{\#2}^*, \\ \bar{E}_{26} &= \frac{d}{a} \bar{N}_{\#1}^* + S \frac{d-H}{a} \bar{N}_{\#2}^*, \quad \bar{E}_{27} = \Omega^2 \bar{E}_{210} - \bar{E}_{25}, \quad \bar{E}_{28} = 2(\bar{N}_{\#1}^* + S \bar{N}_{\#2}^*) - \bar{E}_{26} + \Omega^2 \bar{E}_{211}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{E}_{29} &= 2\Omega(\Gamma_{01} + S\Gamma_{02}), \bar{E}_{210} = \frac{a_1}{a}\Gamma_{01} + S\frac{a_2}{a}\Gamma_{02}, \bar{E}_{211} = \frac{d}{a}\Gamma_{01} + S\frac{d-H}{a}\Gamma_{02}, \bar{E}_{212} = \frac{\partial\bar{E}_{23}}{\partial\xi}, \bar{E}_{213} = \frac{\partial\bar{E}_{24}}{\partial\xi}, \\
\bar{E}_{31} &= N_{\phi 1} + SN_{\phi 2}, \bar{E}_{32} = -\frac{a_1^2}{a_2}M_{\phi 1} + \frac{a_1d}{a^2}N_{\phi 1} + S\left\{-\frac{a_2^2}{a^2}M_{\phi 2} + \frac{a_2(d-H)}{a^2}N_{\phi 2}\right\}, \\
\bar{E}_{33} &= \left(1 - \frac{d}{a}\right)M_{\phi 1} + \frac{d}{a}N_{\phi 1} + S\left\{\left(1 - \frac{d-H}{a}\right)M_{\phi 2} + \frac{d-H}{a}N_{\phi 2}\right\}, \\
\bar{E}_{34} &= \frac{1-\nu_1}{2}\left[-\frac{a_1}{a}(2M_{\phi 1} + M_{\phi 2}) + \frac{d}{a}\left\{\frac{a_1}{a}(2M_{\phi 1} + N_{\phi 1}) + N_{\phi 1}\right\}\right] \\
&\quad + S\frac{1-\nu_2}{2}\left[-\frac{a_2}{a}(2M_{\phi 2} + M_{\phi 1}) + \frac{d-H}{a}\left\{\frac{a_2}{a}(2M_{\phi 2} + N_{\phi 2}) + N_{\phi 2}\right\}\right], \\
\bar{E}_{35} &= \Omega^2\bar{E}_{327} - \bar{E}_{15} + 4\bar{E}_{16} - \bar{E}_{39}, \bar{E}_{36} = \bar{E}_{28}, \bar{E}_{37} = \bar{E}_{15} - \Omega^2\bar{E}_{17}, \bar{E}_{38} = \bar{E}_{39} + \bar{E}_{315}, \\
\bar{E}_{39} &= \frac{d^2}{aa_1}\bar{N}_{\phi 1}^* + S\frac{(d-H)^2}{aa_2}\bar{N}_{\phi 2}^*, \bar{E}_{310} = \bar{E}_{16}, \bar{E}_{311} = \bar{E}_{26}, \bar{E}_{312} = \frac{\partial^2\bar{E}_{315}}{\partial\xi^2} - \bar{E}_{13}, \\
\bar{E}_{313} &= \bar{E}_{14}, \bar{E}_{314} = \bar{E}_{24}, \bar{E}_{315} = \frac{a_1d^2}{a^3}\bar{N}_{\phi 1}^* + S\frac{a_2(d-H)^2}{a^3}\bar{N}_{\phi 2}^*, \bar{E}_{316} = S\frac{2Ha_2}{a^2}\frac{\partial\bar{N}_{\phi 2}^*}{\partial\xi}, \\
\bar{E}_{317} &= \bar{E}_{213}, \bar{E}_{318} = 2S\frac{a_2(-2dH + H^2)}{a^3}\frac{\partial\bar{N}_{\phi 2}^*}{\partial\xi}, \bar{E}_{319} = \frac{1}{2}\bar{E}_{318} + \frac{\partial\bar{E}_{39}}{\partial\xi}, \bar{E}_{320} = \frac{\partial^2\bar{E}_{14}}{\partial\xi^2}, \bar{E}_{321} = \frac{\partial\bar{E}_{16}}{\partial\xi}, \bar{E}_{322} = \bar{E}_{28}, \\
\bar{E}_{323} &= \bar{E}_{17}, \bar{E}_{324} = \bar{E}_{18}, \bar{E}_{325} = \bar{E}_{211}, \bar{E}_{326} = 4\Omega\bar{E}_{18}, \bar{E}_{327} = \bar{E}_{328} = \frac{d^2}{aa_1}\Gamma_{01} + S\frac{(d-H)^2}{aa_2}\Gamma_{02} \dots\dots\dots (11) \\
\Gamma_{0i} &= \frac{(1-\nu_i^2)\rho_i a_i^2}{E_i}, \quad S = \frac{1-\nu_1^2}{E_1 h_1} \frac{E_2 h_2}{1-\nu_2^2} \dots\dots\dots (12)
\end{aligned}$$

$\xi = \pm\mu$ における境界条件式は,

$$\left\{ \begin{aligned}
&\left\{ \bar{E}_{13}\left(1 + \frac{\partial\bar{U}}{\partial\xi}\right) + \bar{E}_{14}\frac{\partial^2\bar{W}}{\partial\xi^2} + \bar{E}_{11}\right\}\delta\bar{U} = 0, \left\{ \bar{E}_{21} + \bar{E}_{23}\frac{\partial\bar{V}}{\partial\xi} + \bar{E}_{24}\frac{\partial^2\bar{W}}{\partial\xi\partial\phi}\right\}\delta\bar{V} = 0 \\
&\left\{ -\frac{\partial\bar{E}_{32}}{\partial\xi} - \frac{\partial\bar{E}_{34}}{\partial\phi} + \bar{E}_{13}\frac{\partial\bar{W}}{\partial\xi} - \bar{E}_{14}\frac{\partial^2\bar{U}}{\partial\xi^2} - \bar{E}_{315}\frac{\partial^3\bar{W}}{\partial\xi^3} - \bar{E}_{24}\frac{\partial^2\bar{V}}{\partial\xi\partial\phi} \right. \\
&\quad - \bar{E}_{315}\frac{\partial^3\bar{W}}{\partial\xi\partial\phi^2} + \bar{E}_{18}\frac{\partial^2\bar{U}}{\partial t^2} + \bar{E}_{327}\frac{\partial^3\bar{W}}{\partial t^2\partial\xi} + \frac{1}{2}\bar{E}_{316}\frac{\partial\bar{U}}{\partial\xi} - \frac{1}{2}\bar{E}_{318}\frac{\partial^2\bar{W}}{\partial\xi^2} \\
&\quad \left. - \frac{\partial}{\partial\xi}\left(\bar{E}_{14} + \frac{h_1^2}{12a^2}M_{\phi 1}^* + S\frac{h_2^2}{12a^2}M_{\phi 2}^*\right) - \bar{E}_{16}\frac{\partial^2\bar{U}}{\partial\phi^2} - \bar{E}_{39}\frac{\partial^3\bar{W}}{\partial\xi\partial\phi^2}\right\}\delta\bar{W} = 0 \\
&\left(\bar{E}_{14} + \frac{h_1^2}{12a^2}M_{\phi 1}^* + S\frac{h_2^2}{12a^2}M_{\phi 2}^* + \bar{E}_{32} + \bar{E}_{14}\frac{\partial\bar{U}}{\partial\xi} + \bar{E}_{315}\frac{\partial^2\bar{W}}{\partial\xi^2}\right)\delta\left(\frac{\partial\bar{W}}{\partial\xi}\right) = 0
\end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (13)$$

ここに,

$$\begin{aligned}
N_{\phi i} &= \frac{\partial\bar{U}}{\partial\xi} + \frac{A_i}{a}\frac{\partial^2\bar{W}}{\partial\xi^2} - \frac{a_i k_i}{a}\frac{\partial^2\bar{W}}{\partial\xi^2} + \nu_i\left(\frac{\partial\bar{V}}{\partial\phi} + \frac{A_i}{a_i}\frac{\partial^2\bar{W}}{\partial\phi^2} + \frac{a}{a_i}\bar{W}\right), \\
N_{\phi i} &= \frac{\partial\bar{V}}{\partial\phi} + \frac{A_i}{a_i}\frac{\partial^2\bar{W}}{\partial\phi^2} + \frac{a}{a_i}(1+k_i)\bar{W} + k_i\frac{a}{a_i}\frac{\partial^2\bar{W}}{\partial\phi^2} + \nu_i\left(\frac{\partial\bar{U}}{\partial\xi} + \frac{A_i}{a}\frac{\partial^2\bar{W}}{\partial\xi^2}\right), \\
N_{\phi i} &= \frac{a_i}{a}(1+k_i)\frac{\partial\bar{V}}{\partial\xi} + \left(\frac{A_i}{a} + k_i\frac{A_i}{a} - k_i + \frac{A_i}{a_i}\right)\frac{\partial^2\bar{W}}{\partial\xi\partial\phi} + \frac{a}{a_i}\frac{\partial\bar{U}}{\partial\phi}, \\
N_{\phi i} &= \frac{a_i}{a}\frac{\partial\bar{V}}{\partial\xi} + \frac{a}{a_i}(1+k_i)\frac{\partial\bar{U}}{\partial\phi} + \left\{\frac{A_i}{a} + \frac{A_i}{a_i}(1+k_i) + k_i\right\}\frac{\partial^2\bar{W}}{\partial\xi\partial\phi}, \\
M_{\phi i} &= k_i\left\{\frac{\partial\bar{U}}{\partial\xi} + \frac{A_i - a_i}{a}\frac{\partial^2\bar{W}}{\partial\xi^2} + \nu_i\left(\frac{\partial\bar{V}}{\partial\phi} + \frac{A_i}{a_i}\frac{\partial^2\bar{W}}{\partial\phi^2} - \frac{a}{a_i}\frac{\partial^2\bar{W}}{\partial\phi^2}\right)\right\}, \\
M_{\phi i} &= k_i\left\{\frac{a}{a_i}\left(\bar{W} + \frac{\partial^2\bar{W}}{\partial\phi^2}\right) + \nu_i\frac{a_i}{a}\frac{\partial^2\bar{W}}{\partial\xi^2}\right\}, M_{\phi i} = k_i\left\{\frac{a_i}{a}\frac{\partial\bar{V}}{\partial\xi} + \left(\frac{A_i}{a} - 1\right)\frac{\partial^2\bar{W}}{\partial\xi\partial\phi}\right\}, \\
M_{\phi i} &= k_i\left\{\frac{a_i}{a}\frac{\partial\bar{V}}{\partial\xi} - \frac{a}{a_i}\frac{\partial\bar{U}}{\partial\phi} + \left(\frac{A_i}{a} - \frac{A_i}{a_i} - 2\right)\frac{\partial^2\bar{W}}{\partial\xi\partial\phi}\right\} \dots\dots\dots (14)
\end{aligned}$$

2・2 運動方程式の解 両端の境界条件が等しい場合を考える。このとき式(6)の解は⁽³⁾

$$\left. \begin{aligned}
U^* &= A_2\xi + B_2 \sinh a_0\xi \cos b_0\xi + C_2 \cosh a_0\xi \sin b_0\xi \\
W^* &= \frac{T_9 - T_4 A_2}{T_6} + (B_2 c + C_2 d) \cosh a_0\xi \cos b_0\xi + (C_2 c - B_2 d) \sinh a_0\xi \sin b_0\xi
\end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (15)$$

ここに, A_2, B_2, C_2 は任意定数である。また,

$$a_0 = \sqrt{\frac{\omega_1 + \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}}{2}}, \quad b_0 = \frac{\omega_2}{2a_0}, \quad c = \frac{-a_0(T_2\omega_1 + T_3) - b_0T_2\omega_2}{(T_2\omega_1 + T_3)^2 + (T_2\omega_2)^2} T_1, \\ d = \frac{a_0T_2\omega_2 - b_0(T_2\omega_1 + T_3)}{(T_2\omega_1 + T_3)^2 + (T_2\omega_2)^2} T_1 \quad \dots\dots\dots (16)$$

$$\omega_1 = -\frac{T_1T_7 - T_2T_4 + T_3T_5}{2(T_1T_8 + T_2T_5)}, \quad \omega_2 = \sqrt{-\frac{(T_1T_7 - T_2T_4 + T_3T_5)^2}{4(T_1T_8 + T_2T_5)^2} + \frac{T_1T_6 - T_3T_4}{T_1T_8 + T_2T_5}} \quad \dots\dots\dots (17)$$

$$T_1 = 1 + \frac{a_2}{a_1} S, \quad T_2 = \frac{1}{a} \left[d - a_1k_1 + \frac{a_2S}{a_1} \{ (d-H) - a_2k_2 \} \right], \quad T_3 = \frac{a\nu_1}{a_1} + \frac{a_2S}{a_1} \frac{a\nu_2}{a_2}, \\ T_4 = \nu_1 + S\nu_2, \quad T_5 = k_1 \frac{a_1^2}{a^2} - \frac{a_1d}{a^2} + S \left\{ k_2 \frac{a_2^2}{a^2} - \frac{a_2(d-H)}{a^2} \right\}, \\ T_6 = \frac{a}{a_1} (1 + k_1 - \Gamma_1) + S \frac{a}{a_2} (1 + k_2 - \Gamma_2), \quad T_7 = 2 \left(\nu_1 \frac{d}{a} + S\nu_2 \frac{d-H}{a} \right), \\ T_8 = k_1 \frac{a_1^3}{a^3} \left(1 - \frac{d}{a_1} \right) - \frac{a_1d}{a^2} \frac{a_1k_1 - d}{a} + S \left\{ k_2 \frac{a_2^3}{a^3} \left(1 - \frac{d-H}{a_2} \right) - \frac{a_2(d-H)}{a^2} \frac{a_2k_2 - (d-H)}{a} \right\}, \\ T_9 = \Gamma_1 + S\Gamma_2 \quad \dots\dots\dots (18)$$

A_2, B_2, C_2 は式(7)の境界条件より決定される。次に式(10)の解を求める。式(10)は $N_{\xi i}^*, \bar{N}_{\phi i}^*$ を含む変数係数の微分方程式であり、 U^*, W^* を式(15)の形のままで解析することは非常に困難である。そこで U^*, W^* を次のように ξ のべき級数に展開する。

$$U^* = \sum_{m=0}^{\infty} Z_m \xi^{2m+1}, \quad W^* = \sum_{m=0}^{\infty} Y_m \xi^{2m} \quad \dots\dots\dots (19)$$

Z_m, Y_m は式(15)の各項をべき級数に展開することによって定まる係数である。このとき $N_{\xi i}^*, \bar{N}_{\phi i}^*$ は式(8)より次のように表される。

$$N_{\xi i}^* = \sum_{m=0}^{\infty} A_m^{(i)} \xi^{2m}, \quad \bar{N}_{\phi i}^* = \sum_{m=0}^{\infty} B_m^{(i)} \xi^{2m} \quad \dots\dots\dots (20)$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} A_m^{(i)} &= (2m+1)Z_m + \frac{a}{a_i} \nu_i Y_m - \frac{a_i k_i - \Delta_i}{a} (2m+2)(2m+1) Y_{m+1} \\ B_m^{(i)} &= \frac{a}{a_i} (1+k_i) Y_m + \nu_i \left\{ (2m+1)Z_m + \frac{\Delta_i}{a} (2m+2)(2m+1) Y_{2m+1} \right\} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (21)$$

次のようにおく。

$$\tilde{U} = U(\xi) \cos(n\phi + pt), \quad \tilde{V} = V(\xi) \sin(n\phi + pt), \quad \tilde{W} = W(\xi) \cos(n\phi + pt) \quad \dots\dots\dots (22)$$

ここに、 n は周方向波数、 p は固有円振動数を表す。式(20)、(22)を式(10)に代入すると、式(10)の解として次の 2 とおりの解が求まる。すなわち、

(1) U が奇関数、 V, W が偶関数の場合

$$U = \sum_{m=0}^{\infty} P_m \xi^{2m+1}, \quad V = \sum_{m=0}^{\infty} Q_m \xi^{2m}, \quad W = \sum_{m=0}^{\infty} R_m \xi^{2m} \quad \dots\dots\dots (23)$$

P_m, Q_m, R_m は未定係数で以下のようにして逐次決定される。すなわち式(23)を式(10)に代入すると、

$$\left. \begin{aligned} \sum_{m=0}^{\infty} [D_1(2m+2)(2m+3)P_{m+1} + D_2(2m+2)(2m+3)(2m+4)R_{m+2} + F_{MA}] \xi^{2m+1} &= 0 \\ \sum_{m=0}^{\infty} [D_3(m+1)(2m+1)Q_{m+1} - F_{MC}] \xi^{2m} &= 0 \\ \sum_{m=0}^{\infty} [D_2(2m+1)(2m+2)(2m+3)P_{m+1} + D_4(2m+1)(2m+2)(2m+3)(2m+4)R_{m+2} + F_{MB}] \xi^{2m} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (24)$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} D_1 &= \frac{a_1}{a} (1 + A_0^{(1)}) + S \frac{a_2}{a} (1 + A_0^{(2)}), \quad D_2 = \frac{a_1}{a} \left\{ -\frac{a_1}{a} k_1 + \frac{d}{a} (1 + A_0^{(1)}) \right\} + S \frac{a_2}{a} \left\{ -\frac{a_2}{a} k_2 + \frac{d-H}{a} (1 + A_0^{(2)}) \right\} \\ D_3 &= \frac{a_1^3}{a^3} \{ (1-\nu_1)(1+3k_1) + 2A_0^{(1)} \} + S \frac{a_2^3}{a^3} \{ (1-\nu_2)(1+3k_2) + 2A_0^{(2)} \} \\ D_4 &= \frac{a_1}{a} \left\{ -\frac{a_1(2d-a_1)}{a^2} k_1 + \frac{d^2}{a^2} (1 + A_0^{(1)}) \right\} + S \frac{a_2}{a} \left\{ -\frac{a_2[2(d-H)-a_2]}{a^2} k_2 + \frac{(d-H)^2}{a^2} (1 + A_0^{(2)}) \right\} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (25)$$

また, F_{MA}, F_{MB}, F_{MC} は P_m, Q_m, R_m などを含む多項式である。式(24)が ξ の任意の値に対して成立するためには, 式(24)の3式の[]内が m のすべての値に対して零となることを要する。この条件から, P_0, Q_0, R_0, R_1 が未定のまま, $P_{m+1}, Q_{m+1}, R_{m+2}(m \geq 0)$ が以下の式より順次求まる。

$$\left. \begin{aligned} P_{m+1} &= \frac{1}{\{(D_2)^2 - D_1 D_4\}(2m+2)(2m+3)} \left(D_4 F_{MA} - \frac{D_2 F_{MB}}{2m+1} \right), Q_{m+1} = \frac{F_{MC}}{D_3(m+1)(2m+1)} \\ R_{m+2} &= \frac{D_1 F_{MB} - F_{MA}(2m+1)D_2}{\{(D_2)^2 - D_1 D_4\}(2m+1)(2m+2)(2m+3)(2m+4)} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (26)$$

これより, 4組の独立な解が求まる。

(2) U が偶関数, V, W が奇関数の場合

$$U = \sum_{m=0}^{\infty} P_m \xi^{2m}, V = \sum_{m=0}^{\infty} Q_m \xi^{2m+1}, W = \sum_{m=0}^{\infty} R_m \xi^{2m+1} \dots\dots\dots (27)$$

P_m, Q_m, R_m は未定係数。(1)の場合と同様にして P_0, Q_0, R_0, R_1 が未定のまま P_1, Q_1 が求まり, 以下 $P_{m+2}, Q_{m+2}, R_{m+2}(m \geq 0)$ が順次決定される。これより, 4組の独立な解が求まる。式(10)の一般解は式(23)あるいは式(27)より求まる4組の独立な解を線形結合した式で次のように表される ($\lambda_1 \sim \lambda_4$ は任意定数)。

$$U, V, W = \sum_{i=1}^4 \lambda_i (U_i, V_i, W_i) \dots\dots\dots (28)$$

式(23)より求まる4組の独立な解を線形結合した式が $\xi=0$ の面に関して対称な振動の一般解となり式(27)より求まる4組の独立な解を線形結合した式が反対称振動の一般解となる。なお, 4組の独立な解は, P_0, Q_0, R_0, R_1 のうち一つを1とし, 残りを零とする4とおりから決定することができる。ただし, 式(28)において $P_0=1, Q_0=R_0=R_1=0$ のときの解を (U_1, V_1, W_1) , $Q_0=1, P_0=R_0=R_1=0$ のときの解を (U_2, V_2, W_2) などとしている。

3. 数 値 計 算

数値計算では, 層1をアルミニウム, チタン, 銅, 層2を鋼として表1の物性値を用いた。式(23)あるいは式(27)の解 U, V, W は係数 P_m, Q_m, R_m を各85項求めて計算した。表2は式(23)の解の収束けた数と項数の関係を示す ($R_1=1, P_0=Q_0=R_0=0, h_2/h_1=1$ の場合)。また $\alpha_i^4/\beta_i = (1-\nu_i^2)\rho_i a_i^2 p^2/E_i$, $\alpha_{0i}^4/\beta_i = (1-$

$\nu_i^2)\rho_i a_i^2 \Omega^2/E_i$ はそれぞれ無次元振動数, 無次元回転数である。無次元回転数は収束性に関して非常に支配的であり, この値が小さいほど収束はよくなる。また $h_1/a_1, \mu$ の影響も大きく, h_1/a_1 の値が大きいほど, μ の値は小さいほど収束はよい。周方向波数 n についてはあまり変化しないが, 一般に n が大きくなるほど収束は悪くなる。

境界条件は, 式(7), (13)より与えられるが, 本報では両端固定の場合を考えた。定常回転では,

$$U^* = W^* = \frac{\partial W^*}{\partial \xi} = 0 \dots\dots\dots (29)$$

振動時においては,

$$\tilde{U} = \tilde{V} = \tilde{W} = \frac{\partial \tilde{W}}{\partial \xi} = 0 \dots\dots\dots (30)$$

とした。式(29)の境界条件より式(15)の A_2, B_2, C_2 が決定される。また式(30)の境界条件を考慮すると, 対称振動および反対称振動の振動数方程式が (4×4) の係数行列式で求まる。

図3, 4は層1をアルミニウム, 層2を鋼, $h_2/h_1=1$ とした場合の振動数曲線を示す。図中, Fは前進波, Bは後進波を表す。前進波は式(22)において $p < 0$ の場

表2 項数と収束桁数の関係(層1:アルミニウム, 層2:鋼 対称振動)

Parameter	Func-tion	Number of terms				
		60	70	80	85	90
$h_1/a_1=1/20$ $\mu=1.00$ $n=2$ $\sqrt{\alpha_1^4/\beta_1}=0.5$ $\sqrt{\alpha_{01}^4/\beta_1}=0.1$	U	17				
	V	17				
	W	17				
$h_1/a_1=1/20$ $\mu=1.00$ $n=2$ $\sqrt{\alpha_1^4/\beta_1}=0.5$ $\sqrt{\alpha_{01}^4/\beta_1}=0.3$	U	9	11	11	13	13
	V	12	13	15	15	17
	W	11	12	14	13	15
$h_1/a_1=1/40$ $\mu=1.00$ $n=2$ $\sqrt{\alpha_1^4/\beta_1}=0.5$ $\sqrt{\alpha_{01}^4/\beta_1}=0.1$	U	14	16	17	17	
	V	16	17	17	17	
	W	17	17	17	17	
$h_1/a_1=1/40$ $\mu=1.00$ $n=2$ $\sqrt{\alpha_1^4/\beta_1}=0.5$ $\sqrt{\alpha_{01}^4/\beta_1}=0.3$	U	7	7	8	8	8
	V	8	9	10	10	10
	W	7	9	8	9	10

表1 材料定数

	Modulus of longitudinal elasticity E [N/m^2]	Density ρ [kg/m^3]	Poisson's ratio ν
Steel	21×10^{10}	76×10^3	0.30
Aluminum	7.1×10^{10}	26×10^3	0.33
Titanium	10×10^{10}	45×10^3	0.34
Copper	12×10^{10}	88×10^3	0.34

合、後進波は $p > 0$ の場合である。低速回転時では振動数は $n=3, 2, 4$ の順に高くなるが、回転数が増すにつれて曲線は逆転し、 $n=2, 3, 4$ の順になる。

図 5 は、層 1 の材料をアルミニウム、チタン、銅とした場合の振動数曲線の比較を示す。層 1 の材料をアルミニウムとしたときの振動数が最も高く、以下チタン、銅の順に低くなる。しかし、回転数が増すに従いその差は小さくなっていく。

図 6 は、層 1 をアルミニウム、層 2 を鋼としたときにおいて、層 1 と層 2 の肉厚比を変えた場合の振動数

曲線の比較を示す。ほとんどその差はみられないが、層 2 の肉厚を大きくしたときのほうが振動数はわずかに低い。

図 7 は図 3, 4 の振動数曲線上の点に対する振動モードである。ただし、式 (28) において $\lambda_1=1$ としてある。また、図 7 において U, V, W は適当に倍率を変えて示している。例えば図 7 中 $2.5 U$ は U を 2.5 倍していることを示す。対称、反対称振動のいずれの場合も、 W が最も大きく、 U は最も小さいことがわかる。無次元回転数を増した場合、 U, V, W の値は、全体的にわ

図 3 振動数曲線(両端固定, 対称振動)

図 5 振動数曲線(両端固定, 対称振動)

図 4 振動数曲線(両端固定, 反対称振動)

図 6 振動数曲線(両端固定, 対称振動)

図 7 振動モード(両端固定)
 (層1: アルミニウム, 層2: 鋼
 $(h_2/h_1=1, h_1/a_1=1/20, \mu=1.25, n=2)$)

ずかながら小さくなっている。また、図には示してい

ないが、層1の材料を変えてもモード形の変化は、ほとんど見受けられない。

4. 結 言

本報では、2層の弾性層からなる回転する円筒殻の自由振動を級数解を用いて厳密に解析する一般的な解法を示した。数値計算では、両端固定円筒殻の振動数曲線、振動モードを求め、その特性を明らかにした。本報で示した解法は、多層からなる回転円筒殻の振動解析にも有力な手法を与えるものと思われる。

本報告における数値計算はすべて、SONY WORK STATION NEWS を用い、倍精度演算で行った。

文 献

- (1) 遠藤・ほか1名, 機論, 49-439, C (1983), 280.
- (2) 斉藤・ほか1名, 機論, 53-494, C (1987), 2073.
- (3) 鈴木・ほか2名, 機論, 56-525, C (1990), 1108.
- (4) 鈴木・ほか2名, 機論, 57-536, C (1991), 1075.
- (5) 文献(4)の1084ページ.
- (6) 岡崎・ほか3名, 機論, 54-508, C (1988), 2957.
- (7) 岡崎・ほか3名, 機論, 54-498, C (1988), 402.
- (8) Markus, S., *J. Sound Vib.*, 48-4 (1976), 511.
- (9) Novozhilov, V. V., *Foundations of the Nonlinear Theory of Elasticity*, (1953), 56, GRAYLOCK PRESS, ROCHESTER, N. Y.