ダフィングハードスプリング系自由振動の厳密解と その数値化プログラム*

田村 英之^{*1}, 松崎 健一郎^{*2}, 岡部 匡^{*1}

Exact Solutions and Numeration Program for Free Oscillation in Duffing Hard Spring System

Hideyuki TAMURA, Ken-ichiro MATSUZAKI and Tadashi OKABE

A revised report and detailed summary of the previous papers are presented, in which exact solutions of the free oscillation in a system with a Duffing spring and a single degree of freedom are dealt with. It is well known that a theoretically exact solution to the homogeneous Duffing equation family (hard, soft and snap-through springs) is solved in terms of the Jacobian elliptic function family ($\text{sn } u$, $\text{cn } u$ and $\text{dn } u$). However, their precise numeration is rather difficult using the constant-digit (regular) computer. An excellent algorithm and program are essential for avoiding such unfortunate cases in which almost all digits of the computed results are of poor accuracy for some complicated problems. A comprehensive discussion for relevant algorithms, and the listing of a final program for the hard spring system, are shown. Numerical results of the dynamics of a free oscillator with the hard spring are also discussed and demonstrated.

Key Words: Dynamics of Machinery, Nonlinear Vibration, Free Vibration, Duffing Equation, Hard Spring, Exact Solution, Elliptic Function, Numeration, Computer Program

1. 緒 言

ダフィング系の自由振動の運動方程式は

$$\left. \begin{aligned} d^2x/dt^2 + ax + \gamma x^3 &= 0, \\ \text{ただし } \gamma &\neq 0, -\infty < a, \gamma < \infty \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1)$$

と表示され、($a > 0$) $\cup$ ($\gamma > 0$) ならば保存系としての周期解(自由振動)が存在する。その厳密解は(ヤコビの)だ円関数を用いて表示されることは周知^{(1)~(4)}であるが、それだけでは無意味と言っても過言ではなく数値的表示まで厳密に実現するには相応の努力を必要とする。特に有効けた数が一定の(通常の“定語長”)計算機を利用する際には、アルゴリズム/プログラムともかなりの工夫を要求される。

そもそも有効けた数一定の(つねに丸め誤差を伴う)数値計算によって実現する“厳密解”とは一体何なのか…?という素朴な疑問に対して、“その計算機(条件)に固有の有効けた数がつねに正しい値として出力されること”と定義するのが最も自然で現実的と思われる。しかし、それすら完璧を期するのは至難の技であって、複雑な計算では、相当の注意と努力を払っ

た結果、かろうじて有効けた数よりやや少なめのけたまでの正しさが確保できるというのが現実であることも周知⁽⁵⁾である。ややもすれば、せっかくの数値結果の信頼性が皆無に近く⁽⁵⁾⁽⁶⁾、しかもそれが容易に判明しないと言う悲惨な事態も珍しくない。

計算機の利用において、有効けた数が有限固定であることは、陰に陽につねに警戒を要する留意点であり、それゆえに、その検討は永遠に魅力的な研究課題⁽⁵⁾でもある。著者らは、そのような立場から、これまでに式(1)(や二次曲線ばね系⁽⁷⁾)の厳密解計算において、この問題に特別の注意を払ったアルゴリズムに関する検討^{(2)~(4)(7)}を重ねてきた。

本報告は、それらの延長線上にある議論として、まず既報の改訂と総括を述べ、ハード、ソフト、スナップスルー(： a, γ の符号の組合せによる区別)各スプリングの各論に共通する基礎理論を固めた後、ハードスプリングに関する詳論を述べる。特に結論的成果としてのプログラム全文を公開し厳密解の実用的利用(例えば近似解法や数値解法の精度検証のための例題)に資するとともに、アルゴリズムの質的良否を判定する一法として、パラメータの初期入力誤差の増殖と呼ばれる現象に関する考察に基づき、計算式の変形や使い分けを吟味精選した経過を述べる。

* 原稿受付 平成5年5月20日。

^{*1} 正員, 九州大学工学部(〒812 福岡市東区箱崎6-10-1)。

^{*2} 正員, 九州大学大学院。

2. ダフティング系自由振動の厳密解^{(2)~(4)}

この章に限って、式(1)による周期解を包括的に取扱う。題記のハードスプリングはその特別の場合として4章以後で詳論し、そのほかの場合については、以下では抄論にとどめ、詳論は続報にゆずる。

式(1)を無次元化すると次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 X}{dT^2} + LX + CX^3 &= 0, \quad T \text{ の周期} = 2\pi/\Omega, \\ L &\equiv \text{sgn}(\alpha), \quad C \equiv \text{sgn}(\gamma), \quad X \equiv x\sqrt{|\gamma/\alpha|}, \\ T &\equiv t\sqrt{|\alpha|}, \quad \Omega \equiv \omega/\sqrt{|\alpha|} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (2)$$

ここで、 ω は(固有)円振動数(振幅に依存)、 $2\pi/\omega$ は t に関する周期、 $\omega/2\pi$ は(固有)振動数を表し、いずれも実次元量である。実次元量： x, t, ω と無次元量： X, T, Ω の対応は上式による。 α, γ は場合に応じて正負いずれも可能であるが、周期解 X が存在するためには、 α, γ の符号の組合せの制限があって表1の3種類に限られる。それぞれ、ハードスプリング(hard spring； $\alpha, \gamma > 0$)、ソフトスプリング(soft spring； $\alpha > 0, \gamma < 0$)、およびスナップスルースプリング(または“飛び移り”ばね(snap-through spring； $\alpha < 0, \gamma > 0$)のように呼び分けられており、ここでも、この習慣に従う。

さて以下、ヤコビの“だ円関数”⁽⁸⁾； $\text{sn } u, \text{cn } u, \text{dn } u$ を一括して次のように表示する。

$$e(u) \equiv \text{sn } u \cup \text{cn } u \cup \text{dn } u, \quad \dots\dots\dots (3)$$

ここで $\max_{(u)} e(u) = 1$

すると一般に次のような表示が得られる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 e}{dT^2} &= -(\phi_1 e + 2\phi_3 e^3) \underline{\Omega}^2, \\ \text{ただし } \underline{\Omega} &\equiv \frac{du}{dT} (= \text{const}) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (4)$$

ここで、 ϕ_1, ϕ_3 は、だ円関数の母数パラメータ m の関数であり、表2のような内容である。

式(2)の(厳密)解を、式(3)により

$$X(T) = Ae[u(T)], \quad A(\neq 0) : \text{定数} \quad \dots\dots\dots (5)$$

と仮定すると、式(4)によって次の関係を得る。

$$\left. \begin{aligned} (\phi_1 + 2\phi_3 e^2) \underline{\Omega}^2 &= L + CA^2 e^2, \\ \text{ただし } A e[u(T)] &\neq 0 \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (6)$$

e に関する等べき項の等置から次の関係を得る。

$$\phi_1 \underline{\Omega}^2 = L, \quad 2\phi_3 \underline{\Omega}^2 = CA^2 \quad \dots\dots\dots (7)$$

すなわち

$$A^2 = (2L/C) (\phi_3/\phi_1) \quad \dots\dots\dots (8)$$

$$\underline{\Omega}^2 = L/\phi_1 \quad \dots\dots\dots (9)$$

これらの式の符号の関係から、 $L\phi_1 > 0, C\phi_3 > 0$ の筈

であり、それに表1, 2を参照すると、spring の形と対応する $e(u)$ の関係は、表3のとおり確定してしまい、この対応は一意である。

ここで、 $e(u)$ のフーリエ展開表示⁽⁸⁾は次のとおりである。

$$\begin{aligned} \text{sn } u &= \frac{2}{K(m)\sqrt{m}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\sqrt{q^n}}{1-q^n} \sin n \frac{u}{K(m)} \\ &= \frac{2}{K(m)\sqrt{m}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nu/K(m)}{\sinh nQ} \quad \dots\dots\dots (10) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{cn } u &= \frac{2}{K(m)\sqrt{m}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\sqrt{q^n}}{1+q^n} \cos n \frac{u}{K(m)} \\ &= \frac{2}{K(m)\sqrt{m}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nu/K(m)}{\cosh nQ} \quad \dots\dots\dots (11) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{dn } u &= \frac{2}{K(m)} \left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2q^n}{1+q^{2n}} \cos 2n \frac{u}{K(m)} \right] \\ &= \frac{2}{K(m)} \left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2nu/K(m)}{\cosh 2nQ} \right] \quad \dots\dots\dots (12) \end{aligned}$$

ただし

$$\left. \begin{aligned} Q &\equiv K(1-m)/[2K(m)/\pi], \\ q &\equiv e^{-2Q} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (13)$$

$$K(m) \equiv \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{dz}{\sqrt{(1-m \sin^2 z)}}, \quad \dots\dots\dots (14)$$

(K, m の定義に注意)

式(10)~(12)における Q, q の使い分けは、誤差の増殖防止に対する配慮であって、 $m \leq 1/2$ であれば q , そうでなければ Q による表示を利用する。

表1 ばねの分類と名称

spring	α	γ	L	C
soft	+	-	1	-1
hard	+	+	1	1
snap-through	-	+	-1	1

表2 ϕ_1, ϕ_3 の定義

$e(u)$	$\phi_1 (m=0 \cdots 1/2 \cdots 1)$	$\phi_3 (m=0 \cdots 1)$
sn u	$1+m (=1 \cdots 2)$	$-m (=0 \cdots -1)$
cn u	$1-2m (=1 \cdots 0 \cdots -1)$	$m (=0 \cdots 1)$
dn u	$m-2 (= -2 \cdots -1)$	$1 (=1 \cdots 1)$

表3 厳密解の適合関数

spring	$e(u)$	m
soft	sn u	0 ~ 1
hard	cn u	0 ~ 1/2
snap-through	cn u dn u	1/2 ~ 1 0 ~ 1

$e[u(T)]$ の (T) に関する円振動数を Ω とすれば、式(10)～(12)から

$$\left. \begin{aligned} \frac{u}{K(m)} &= \Omega T : (\text{sn } u, \text{cn } u), \text{ または } \\ \frac{2u}{K(m)} &= \Omega T : (\text{dn } u) \end{aligned} \right\} \dots (15)$$

であればよく、式(4)の $\underline{\Omega}$ は次のように定まる。

$$\left. \begin{aligned} \underline{\Omega} &= \Omega K(m) : (\text{sn } u, \text{cn } u), \\ \underline{\Omega} &= \Omega K(m)/2 : (\text{dn } u) \end{aligned} \right\} \dots (16)$$

ゆえに、式(9)中の $\underline{\Omega}$ は m, Ω の関数であることがわかる。式(8), (9), (16)を組合せると、式(10)～(12)による $Ae[u(T)]$ は次のように整理される。

$$\begin{aligned} A \text{sn } u(T) &= 2\sqrt{2}\Omega \sum_{n=1}^{\text{odd}} \frac{2\sqrt{q^n}}{1-q^n} \sin n\Omega T \\ &= 2\sqrt{2}\Omega \sum_{n=1}^{\text{odd}} \frac{\sin n\Omega T}{\sinh nQ} \dots (17) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A \text{cn } u(T) &= 2\sqrt{2}\Omega \sum_{n=1}^{\text{odd}} \frac{2\sqrt{q^n}}{1+q^n} \cos n\Omega T \\ &= 2\sqrt{2}\Omega \sum_{n=1}^{\text{odd}} \frac{\cos n\Omega T}{\cosh nQ} \dots (18) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A \text{dn } u(T) &= \sqrt{2}\Omega \left(\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\text{all}} \frac{2q^n}{1+q^{2n}} \cos n\Omega T \right) \\ &= \sqrt{2}\Omega \left(\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\text{all}} \frac{\cos n\Omega T}{\cosh 2nQ} \right) \dots (19) \end{aligned}$$

式(16)を式(9)に代入すると次式を得る。

$$\left. \begin{aligned} \Omega^2 &= L/\phi_1[K(m)]^2 : (\text{sn } u, \text{cn } u), \\ \Omega^2 &= L/\phi_1[K(m)/2]^2 : (\text{dn } u) \end{aligned} \right\} \dots (20)$$

式(8), (20)において L, C は与えられる定数, $A, \underline{\Omega}$ は与えられる条件, ϕ_1, ϕ_3 は m の関数である。

実用的見地からすれば、与えられた初期静止振幅 $A = X(dX/dT=0)$ を初期条件として式(2)から $X(T)$ を解くのが最も自然であるが、周波数応答(スケルトンカーブ)を見たい場合には、与えられた Ω に対する解を得ることも必要となり、両者の相互換算は多少面倒である。そこで、このいずれにも即対応できるよう、式(8), (20)を次のように読む。

A が与えられる場合は、まず式(8)から $m=m(A)$ を解く(この解法は一般に試行法による)。式(20)により $\Omega=\Omega[m(A)]$ を得、式(13)から $Q, q=\text{fun}(m)$ を得ると、式(17)～(19)から解 $X(T)$ のフーリエ展開が決定される。 Ω が与えられる場合は、まず式(20)から $m=m(\Omega)$ を解く(試行法による)。式(13)から $Q, q=\text{fun}(m)$ 、式(17)～(19)から解 $X(T)$ を得る。

図1はこれらの計算の流れの図解である。無論これは大筋の流れ方向の概念図であって、局部細部にわたっては計算式の変形や吟味/精選を必要とする。

3. q 展開に関する基礎的關係式⁽⁷⁾

上述の計算において中心的な役割を果たすのは、母数パラメータ m であるが、 m そのままではなく、 q [式(13)] の形で扱うほうが、計算精度/速度の点で好ましいことは古くから指摘されており⁽⁹⁾ 著者らもそのことを確認した⁽⁷⁾。ここでも、その手法を活用するために、まず必要となる関係式を列挙しておく。

$$K_0 \equiv K(m), K_1 \equiv K(1-m) \quad (\text{定義}) \dots (21)$$

$$Q \equiv \pi K_1/2K_0 \quad (\text{定義}) \dots (22)$$

$$\left. \begin{aligned} q &\equiv q_0 = \exp(-2Q), q_1 \equiv \exp(-\pi^2/2Q), \\ \therefore \ln q_0 \ln q_1 &= \pi^2 \end{aligned} \right\} \quad (\text{定義}) \dots (23)$$

$$\left. \begin{aligned} K_i &= [1 + 2(q_i + q_i^4 + q_i^9 + \dots + q_i^{n \times n} + \dots)]^2 \\ &= 1 + 4P_i, K_i = H_i^2, H_i = 1 + 2p_i \end{aligned} \right\} \quad \text{ただし } (i=0, 1) \dots (\text{以下同様}) \dots (24)$$

ここに

$$\left. \begin{aligned} P_i &\equiv p_i(1+p_i), p_i = q_i + r_i, \\ r_i &\equiv \sum_{n=2} q_i^{n \times n}, b_i \equiv \sum_{n=1} q_i^{n(n+1)} \end{aligned} \right\} \dots (25)$$

$$\mu_0 \equiv m, \mu_1 \equiv m_1 = 1-m \quad (\text{定義}) \dots (26)$$

$$m = 16q \left[\frac{1+q^2+q^6+q^{12}+\dots+q^{n(n+1)}+\dots}{1+2(q+q^4+q^9+\dots+q^{n \times n}+\dots)} \right]^4 \dots (27)$$

$$\mu_i = 16q_i [(1+b_i)^2/K_i]^2 \dots (28)$$

$m=0 \sim 1 (m_1=1 \sim 0)$ なる変域に対して、次の対応がある。なお収束性に対する配慮から $\mu_0, \mu_1 \leq 1/2$ いずれかに対応する、より小さな範囲を実用域とする。

$$\left. \begin{aligned} Q &= \ln \infty \sim 1/\ln \infty \quad (\text{実用域 } Q \leq \pi/2) \\ q_0 &= 0 \sim 1 \quad (\text{実用域 } q_0 \leq 0.04321) \\ q_1 &= 1 \sim 0 \quad (\text{実用域 } q_1 \leq 0.04321) \end{aligned} \right\} \dots (29)$$

さらに統報の便のため以下の関数族を定義しておく。

$$\begin{aligned} 1 - 1/K_i \sqrt{1+\mu_i} &= \frac{8P_i(1+2P_i) + \mu_i K_i^2}{K_i \sqrt{1+\mu_i} (1+K_i \sqrt{1+\mu_i})} \\ &= O(12q_i), (i=0, 1) \dots (30) \end{aligned}$$

図1 計算の流れ

$$\left. \begin{aligned}
 &1 - 1/K_i \sqrt{1 - \mu_i/2} \\
 &= \frac{8\mu_i + 4(2 - \mu_i)(p_i^2 + r_i + 2P_i^2)}{K_i \sqrt{1 - \mu_i/2} (1 + K_i \sqrt{1 - \mu_i/2})} \\
 &= O(12q_i^2) \\
 &\text{ただし } \mu_i \equiv q_i - \mu_i(1 + 8q_i)/16 \\
 &= 8q_i \left[2\psi_i p_i \frac{3 + 6p_i + 4p_i^2}{K_i H_i} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{(1/2 + (4 + 6b_i + 4b_i^2 + b_i^3)q_i)b_i - r_i}{K_i^2} \right. \\
 &\quad \left. - \psi_i^2(3 - 4\psi_i + 2\psi_i^2) \right] = O(20q_i^3), \\
 &\psi_i \equiv (p_i - b_i/2)/H_i = O(q_i), (i=0, 1)
 \end{aligned} \right\} \dots (31)$$

4. ハードスプリング系自由振動の厳密解

4.1 アルゴリズム 式(8)は、表2を参照して

$$\left. \begin{aligned}
 &A^2 = 2\mu_0/(1 - 2\mu_0), \\
 &\mu_0 = 0 \sim 1/2 \longleftrightarrow A = 0 \sim \infty
 \end{aligned} \right\} \dots (32)$$

式(20), (21)から

$$\left. \begin{aligned}
 &\Omega^2 = 1/K_0^2(1 - 2\mu_0), \\
 &\mu_0 = 0 \sim 1/2 \longleftrightarrow \Omega = 1 \sim \infty
 \end{aligned} \right\} \dots (33)$$

これらから次式を得る.

$$\left. \begin{aligned}
 &1 + A^2 = K_0^2 \Omega^2, \\
 &1 + A^2 \sim \Omega^2, \text{ ただし } (A \rightarrow 0, \Omega \rightarrow 1)
 \end{aligned} \right\} \dots (34)$$

計算の流れは図1のとおりであるが、誤差の増殖防止のために、上出の関係式の使い分けに若干の注意をはらう(6章の詳細を参照のこと).

まず、 A が与えられる場合には式(32)により、

$$\mu_0 = A^2/2(1 + A^2) \dots (35)$$

から $\mu_0 = \mu_0(A)$ を得、これを式(28), (24)に適用し

$$q_0 = q_0(A) \quad (\text{試行解})$$

を得る. その途中で定まる K_0 [式(24)] と A より式

(34)から Ω を得る. $q_0 (=q)$ と Ω を式(18)に適用すると $X(T) = A \operatorname{cn} u(T)$ が求められる.

$\Omega \rightarrow 1$ における $\Omega(q_0)$ の高精度表示としての $(\Omega - 1)$ を得るには、式(33)を変形した次式を用いる.

$$\begin{aligned}
 (\Omega - 1)/[1 + (\Omega - 1)] &= 1 - 1/\Omega \\
 &= 2 \frac{\mu_0 - 4P_0(1 + 2P_0)(1 - 2\mu_0)}{1 + K_0 \sqrt{1 - 2\mu_0}} \\
 &= O(12q_0), (q_0 \rightarrow 0) \dots (36)
 \end{aligned}$$

すなわち

$$\Omega - 1 = (1 - 1/\Omega)/[1 - (1 - 1/\Omega)] \dots (37)$$

この表示は精度的に $\Omega - 1 = O(1)$ 以下が安全有効であり、 $\Omega \rightarrow \infty$ に対しては式(34)によるべきである.

次に、 Ω が与えられる問題では (Ω そのものよりも) $\Omega - 1$ が与えられる問題と考え、式(36), (37)を利用し、これを逆に解く.

$$q_0 = q_0(\Omega - 1) \quad (\text{試行解})$$

この試行解の初期値として、式(36)の数値的逆関数を最小自乗近似して得られた多項式:

$$\left. \begin{aligned}
 &q_0 = (1 - 1/\Omega)/12[1 + \sum_{n=1}^5 a_n(1 - 1/\Omega)^n] \\
 &\text{ただし } a_n \text{ (係数): 表4参照}
 \end{aligned} \right\} \dots (38)$$

が利用できる. この q_0 と、与えられた Ω とから $X(T)$ のフーリエ級数、式(18)を得るのは、 A が与えられる場合と同様である.

$A = A(\Omega)$ を得る際には、 $\Omega \rightarrow 1$ と $\Omega \rightarrow \infty$ とを場合分けする必要がある. $\Omega \rightarrow 1$ に対しては式(32)から $A = A[\mu_0(q_0)]$ を得るが、 $\Omega \rightarrow \infty$ では式(34)により $K_0(q_0)$ を用いて $A = A(\Omega)$ を求める.

A, Ω いずれが与えられる問題に対しても、ともかく、 $A, \Omega \rightarrow \infty$ なる場合に限り、式(34)に $K_0(q_0), A, \Omega$ を使い、 Ω, A を得るのが一つの留意点である.

4.2 数値例 図2は解 $X(T)$ の波形である. 比較のため、 $\Omega \rightarrow 1$ (準線形微小振動)と $\Omega \rightarrow \infty$ (強非線形、大振幅、高周波振動)の各場合を重ね、 $X(T) = 0$ の部分の速度を一致させてあり、高調波含有率(ひずみ率)の違いによる波形の特徴が視認できる.

図3は振動数/振幅特性(いわゆるスケルトンカーブ)である. 古典的非線形振動論⁽¹⁰⁾ (近似解析法)の例題として周知の振動数/振幅特性は、 $\pm 10\%$ 以下の誤差を許せば [式(34)参照]

$$1 + (6/7)A^2 = \Omega^2 \quad (\text{ただし } 0 < A < \infty, 1 < \Omega < \infty)$$

であり、周知の(簡潔な)双曲線である. 図示の両対数表示では左下 ($\Omega \rightarrow 1$) では次数ごとに角度の異なる直線群、右上 ($\Omega \rightarrow \infty$) ではすべての次数の振幅特性が平行にこう配1の直線群となるのが特徴的である. よって、 $\Omega \rightarrow 1$ では単弦波に漸近、 $\Omega \rightarrow \infty$ では、ひずみ

表4 式(38)の係数

$a_1 = 0.4196244$	$a_2 = 0.2349253$	$a_3 = 0.2696268$
$a_4 = -0.1979276$	$a_5 = 0.2027534$

図2 解の波形

率一定の波形に漸近し振幅は振動数に比例する。

図4は、母数パラメータ $m(=\mu_0)$ の関数として、各種の特性値を表示している。

4.3 単項3次曲線ばね系との対応 $\Omega \rightarrow \infty$ におけるスケルトンカーブは直線であり、はじめの運動方

程式：(2)において線形項を欠く ($\alpha \rightarrow 0$) 場合に対応する。 $\alpha=0$ (単項 Duffing 系) に対しては、

$$\mu_0=1/2, q_0=e^{-\pi}, Q=\pi/2 \quad (\alpha=0) \quad \cdots (39)$$

であるから適当な(誤差)評価基準による有限の A , あ

図3 振幅の周波数応答

図4 母数 μ_0 と諸特性値の対応

るいは Ω より大なる場合を, $\alpha=0$ に対する特性と見なす. $\mu_0 (=m \sim 1/2)$ の相対誤差を ε_m とおけば, 式 (32), (33) から

$$A = A_c \equiv 1/\sqrt{\varepsilon_m}, \quad \Omega = \Omega_c \equiv 1/K_0(1/2)\sqrt{\varepsilon_m} \quad \dots\dots\dots (40)$$

を得る. $A \geq A_c$, $\Omega \geq \Omega_c$ なる直線部分が“単項 Duffing 系, ただし $m (\sim 1/2)$ の相対誤差 ε_m ”なるスケルトンカーブである. 式 (34) から

$$A = K_0(1/2)\Omega = 1.180\,355\,759\,04\dots\Omega \quad \dots\dots (41)$$

さらに $q_0 (m \sim 1/2)$ の相対誤差 (~ 0) は

```

00010 *-----TOP OF FILE-----DUHRD
00020 *
00030 * EXACT SOLUTIONS OF FREE OSCILLATION IN DUFFING OSCILLATOR
00040 * WITH SINGLE-DEGREE-OF-FREEDOM
00050 * (HARD SPRING)
00060 * AO : AMPLITUDE (IN/OUT)
00070 * OMG : NATURAL FREQUENCY (OUT)
00080 * OM1=OMG-1 : COMPLEMENTARY FREQUENCY (IN/OUT)
00090 * AN(NN) : HARMONIC AMPLITUDES (HARMONIC ORDER) (OUT)
00100 * EN(2) : ERROR LEVEL / DEMAND OF NN (IN/OUT)
00110 * ER : ESTIMATION OF RELATIVE ERROR (OUT)
00120 * ISW : DIRECTION OF THE COMPUTATION (10 / 21) (IN)
00130 * ICON : CONDITION CODE (0=NORMAL TERMINATE) (OUT)
00140 *-----931028-----
00150 SUBROUTINE DUHRD(AO,OMG,OM1,AN,NN,EN,ER,ISW,ICON)
00160 IMPLICIT REAL*16(A-H,O-Z)
00170 DIMENSION AN(NN),EN(2)
00180 DATA H2/O.04321391826377224977441773717172890/
00190 ICON=0
00200 ICHK=0
00210 IF(ISW.EQ.10.AND. AO.GT.1Q20) ICHK=ICLK+1
00220 IF(ISW.EQ.21.AND.OM1.GT.1Q20) ICHK=ICLK+1
00230 IF(ICLK.NE.01) THEN
00240 CALL KANDM(H2,EM,QK,P,S,FI)
00250 ELSE IF(ISW.EQ.10.AND.AO.GT.1Q-38) THEN
00260 SS=AO*AO
00270 CALL SOLMQ(SS/2/(1+SS))
00280 ELSE IF(ISW.EQ.21.AND.OM1.GT.0Q0) THEN
00290 CALL OM1Q0(OM1)
00300 ELSE
00310 ICON=90000
00320 RETURN
00330 ENDF
00340 EN(2)=ABS(EN(1))+1Q-35
00350 CALL AMPLH(H2,AN,NN,AO,OMG,OM1,EN,ISW)
00360 CALL ERROR(H2,NN,ER)
00370 RETURN
00380 END
00390 *-----
00400 SUBROUTINE SOLMQ(EM)
00410 IMPLICIT REAL*16(A-H,O-Z)
00420 EXTERNAL SUB1
00430 CALL APRXH(EM,H2)
00440 CALL PUTEM(EM)
00450 CALL REGUL(H2,H2+1.01+1Q-30,SUB1,EF,KOUNT)
00460 RETURN
00470 END
00480 *-----
00490 SUBROUTINE APRXH(EM,HH)
00500 IMPLICIT REAL*16(A-H,O-Z)
00510 HH=0
00520 DO 10 I=1Q,1-1
00530 HH=(HH+1Q0/I)*EM
00540 10 CONTINUE
00550 HH=HH/16
00560 RETURN
00570 END
00580 *-----
00590 SUBROUTINE SUB1(H2,F)
00600 IMPLICIT REAL*16(A-H,O-Z)
00610 CALL KANDM(H2,EM,QK,P,S,FI)
00620 F=(EM+1Q-70)/QM-1
00630 RETURN
00640 ENTRY PUTEM(PUT)
00650 QM=PUT+1Q-70
00660 RETURN
00670 END
00680 *-----
00690 SUBROUTINE OM1Q0(OM1)
00700 IMPLICIT REAL*16(A-H,O-Z)
00710 EXTERNAL SUB3
00720 OMU=OM1/(1+OM1)
00730 CALL APROH(OMU,H2)
00740 CALL PUTOM(OMU)
00750 CALL REGUL(H2,H2+1.01+1Q-30,SUB3,EF,KOUNT)
00760 RETURN
00770 END
00780 *-----
00790 SUBROUTINE SUB3(H2,F)
00800 IMPLICIT REAL*16(A-H,O-Z)
00810 CALL PRSET(H2,EM,UOM,O)
00820 F=(UOM+1Q-70)/OMU-1
00830 RETURN
00840 ENTRY PUTOM(PUT)
00850 OMU=PUT+1Q-70
00860 RETURN
00870 END
00880 *-----
00890 SUBROUTINE APROH(OMU,H2)
00900 IMPLICIT REAL*16(A-H,O-Z)
00910 DIMENSION F(5)
00920 DATA F(1),F(2),F(3)/0.4196244Q0, 0.2349253Q0, 0.2696268Q0/
00930 DATA F(4),F(5)/ -0.1979276Q0, 0.2027534Q0/
00940 H2=0
00950 DO 10 I=5,1-1
00960 H2=(H2+F(I))*OMU
00970 10 CONTINUE
00980 H2=OMU/12/(1+H2)
00990 RETURN
01000 END
01010 *-----
01020 SUBROUTINE PRSET(H2,EM,UH,K)
01030 IMPLICIT REAL*16(A-H,O-Z)
01040 IF(K.EQ.0) CALL KANDM(H2,EM,QK,P,S,FI)
01050 IF(K.EQ.1) CALL TAKEO(H2,EM,QK,P,S,FI)
01060 P2=2*P
01070 EMM=1-2*EM
01080 RTM2=QSQR(ABS(EMM))
01090 IF(EMM.GE.0) UH=4*(EM+QK**2/2-P2*(1+P2))/(1+QK*RTM2)
01100 IF(EMM.LT.0) UH=1/(1-RTM2)
01110 RETURN
01120 END
01130 *-----
01140 SUBROUTINE AMPLH(H2,AN,NN,AO,OMG,OM1,EN,ISW)
01150 IMPLICIT REAL*16(A-H,O-Z)
01160 DIMENSION AN(NN),EN(2)
01170 CALL TAKEO(H2,EM,QK,P,S,FI)
01180 IF(EM.LE.0.4Q0) THEN
01190 CALL PRSET(H2,EM,UH,1)
01200 AO=QSQR(2*EM/(1-2*EM))
01210 OM1=UH/(1-UH)
01220 ELSE IF(ISW.EQ.10) THEN
01230 IF(AO.LE.1Q20) OM1=QSQR(1+AO**2)/QK-1
01240 IF(AO.GT.1Q20) OM1=AO/QK-1
01250 ELSE IF(ISW.EQ.21) THEN
01260 IF(OM1.LE.1Q20) AO=QSQR((QK*(1+OM1)**2-1)
01270 IF(OM1.GT.1Q20) AO=QK*(1+OM1)
01280 ENDF
01290 OMG=1+OM1
01300 RR=OMG*5.6568542494923801952067548968387900
01310 W=QSQR(H2)
01320 DO 10 N=1,NN,2
01330 AN(N)=RR*W/(1+W*W)
01340 W=W*H2
01350 10 CONTINUE
01360 EN(2)=QLOG(EN(2))/QLOG(H2)+1
01370 RETURN
01380 END
01390 *-----
01400 SUBROUTINE ERROR(H2,NN,ER)
01410 IMPLICIT REAL*16(A-H,O-Z)
01420 EQ=QSQR(H2)
01430 ZO=-QLOG(EQ)
01440 EL=EQ*EXP(-MIN(160,(NN+1)*ZO))
01450 DP1=EL/(1+EL*EL)
01460 PP1=EQ/(1+EQ*EQ)
01470 DP2=QATAN(EL)
01480 PP2=QATAN(EQ)
01490 ER=(DP1*ZO+DP2)/(PP1*ZO+PP2)
01500 RETURN
01510 END
01520 *-----
01530 SUBROUTINE KANDM(H2,EM,QK,P,SP,FI)
01540 IMPLICIT REAL*16(A-H,O-Z)
01550 P1=0Q0
01560 R1=H2
01570 S1=H2
01580 P2=H2**2
01590 R2=P2
01600 S2=P2
01610 S3=P2
01620 21 CONTINUE
01630 S1=S1*S3
01640 R1=R1*S1
01650 S2=S2*S3
01660 R2=R2*S2
01670 PP=P1+R1
01680 IF(PP.EQ.P1) GO TO 22
01690 P1=PP
01700 P2=P2+R2
01710 GO TO 21
01720 22 CONTINUE
01730 P3=H2+P1
01740 EM=16*H2*((1+P2)/(1+2*P3))**4
01750 SP=P3+P3+P1
01760 P=H2+SP
01770 QK=1+4*P
01780 PS=(P3-P2/2)/(1+2*P3)
01790 PS1=1-PS
01800 F1=8*H2*PS1*(1-2*PS1*PS)*PS
01810 RETURN
01820 ENTRY TAKEO(DP1,DP2,OP3,OP4,OP5,OP6)
01830 OP1=H2
01840 OP2=EM
01850 OP3=QK
01860 OP4=P
01870 OP5=SP
01880 OP6=F1
01890 RETURN
01900 END
01910 *-----
01920 SUBROUTINE REGUL(X,X2,SUB,FF,KOUNT)
01930 IMPLICIT REAL*16(A-H,O-Z)
01940 DATA EP3,EP7/1Q-30,1Q-70/
01950 EXTERNAL SUB
01960 CALL SUB(X,X,F1)
01970 IF(ABS(F1).LE.EP3) RETURN
01980 CALL SUB(X2,F2)
01990 KOUNT=0
02000 FB=1/EP7
02010 Z1=XX
02020 Z2=X2
02030 1 CONTINUE
02040 Z12=ABS(Z1+Z2)+EP7
02050 F21=F2-F1
02060 F21=F21+SIGN(EP7,F21)
02070 G2 =F2/F21
02080 G1 =F1/F21
02090 XX =Z1+G2-Z2*G1
02100 CALL SUB(XX,FF)
02110 IF(ABS(XX-Z1)/Z12.LE.EP3) RETURN
02120 IF(ABS(XX-Z2)/Z12.LE.EP3) RETURN
02130 ABSFF=ABS(FF)
02140 IF(ABSFF.LE.EP3) RETURN
02150 IF(ABSFF.GE. FB) KOUNT=KOUNT+1
02160 IF(KOUNT.GE. 99) RETURN
02170 FB=ABSFF
02180 Z1=Z2
02190 F1=F2
02200 Z2=XX
02210 F2=FF
02220 GO TO 1
02230 END
02240 *-----END OF FILE-----DUHRD

```

図 5 プログラムリスト (FORTRAN 77, REAL*16)

$$\varepsilon_m/[1-8e^{-\pi}/\sqrt{K(1/2)}] \sim 1.466\,772 \cdots \varepsilon_m \cdots (42)$$

であるから、この際のフーリエ係数[式(18)]の相対誤差は ε_m により評価される。以上のようにして基礎式(2)のパラメータ α の変域は(実用上の)0まで含めることができ、 $\alpha=0$ と $\neq 0$ の場合が統一される。

5. プログラム

FORTRAN 77(4倍精度)によるサブルーチンサブプログラムの全文を図5に、その説明書を図6に示した。振幅 A または振動数 $\Omega-1$ のいずれか1個を入力すると、 A , Ω , $\Omega-1$ のすべてとフーリエ係数 A_n の数値計算結果が出力される。ただしフーリエ係数の定義は図6の説明中の式(1.1)による。解の計算精度は、 A と $\Omega-1$ のほぼ全域で計算機の累積丸め誤差程度(相対誤差 $\leq 10^{-30}$)が保証され、その確認はプログラムの自己点検⁽⁷⁾によればよい。

入力値として Ω ではなく $\Omega-1$ を採用するのは、 $\Omega \rightarrow 1$ におけるけた落ちを防ぐためであるが、 Ω が大なる場合も含め一貫して $\Omega-1$ により Ω を表現する。なお、 $A \cup (\Omega-1) \geq 10^{20}$ の場合は、4・3節の議論に従い単項3次曲線ばねと見なしている。

さらに、解に対する相対誤差を指定すると、その要求を満足するような A_n の項数(フーリエ係数の高調波の次数)の上限 $N(\geq n)$ の推奨値⁽⁷⁾が計算される。

6. 入力の初期丸め誤差の増殖

初期値の入力が A であれ Ω であれ、その値自身、計算機の1語として収納された途端に、語長とその数値の仮数の値から決まる相対誤差(丸め)を持つ。その後の処理においても語から語へと数値が転送される度に丸め誤差が累積するが、その定量的な推定法⁽⁶⁾は現在いまだ十分ではないと思われる。そこで、アルゴリズムの質的良否のみ判定することにして、初期値入力 $A \cup \Omega$ の(微小な)相対誤差のその後の増幅/減衰の経過追跡を簡単に考察しておく。

一般に、 $f(x, y)=0$ について dy/dx が定義されるとき、 $(dy/dx)(x/y)$ なる表示は、 x, y のそれぞれに付随する(微小な)絶対誤差 $\delta x, \delta y$ および相対誤差 $(\delta x/x), (\delta y/y)$ の関係を

$$(\delta y/y)/(\delta x/x) = (\delta y/\delta x)(x/y) = (dy/dx)(x/y)$$

のように表示するものと解釈される。これを x から $y(x)$ に至る相対誤差の拡大率(誤差の増殖)と呼ぶことにして、記号 $\langle y/x \rangle$ 、すなわち

$$\langle y/x \rangle \equiv (\delta y/y)/(\delta x/x) = (dy/dx)(x/y) \cdots (43)$$

を定義する。

x から $y(x)$ を求める適当なアルゴリズムが与えられるとき、その $\langle y/x \rangle$ について

$$\langle y/x \rangle \leq 1 \text{ ならば相対誤差の増殖に関して安全 } \}$$

$$\text{さもなければ危険}$$

と判定する。無論 $\langle y/x \rangle \leq 10$ 程度は実用上の許容範囲と考えてよいであろう。

以上の判定法を、4章の式(32)～(37)にあてはめて相対誤差の拡大率を計算した結果を表5に示した。ま

Duffing 系自由振動の厳密解 (ハードスプリング)
CALL DUHRD (A0,OMG,OM1,AN,NN,EN,ER,ISW,ICON)

(1) 機能

運動方程式 $d^2X/dT^2 + X + X^3 = 0$ の厳密解のフーリエ展開;

$$X(T) = A_1 \cos \Omega T + A_3 \cos 3\Omega T + A_5 \cos 5\Omega T + \cdots \quad (1.1)$$

におけるフーリエ係数: $A_1, A_3, A_5, \dots$; 最大値 $A = \max_{(T)} X(T)$ なる A ; 円振動数 Ω , (そのコンプリメンタリ) $\Omega-1$ などを数値計算する。与える条件は $A, \Omega-1$ のいずれか1個とする。補助的計算作業として指定された相対誤差を保証するに必要な A_n の次数上限 $N(\geq n)$ の近似値を推算する。

(2) パラメータ

A0 ... 入力/出力。 $A = \max_{(T)} X(T)$ 。ただし $A0 > 10^{-38}$ 。
ISW=10 の場合は入力、それ以外は出力。

OMG ... 出力。円振動数 Ω 。

OM1 ... 入力/出力。 $\Omega-1$ 。ただし $OM1 > 0$ 。

ISW=21 の場合は入力、それ以外は出力。

AN ... 出力。フーリエ係数 $A_n (n=1, 3, 5, \dots, NN)$ 。
大きさ NN の1次元配列。

NN ... 入力。フーリエ係数の最高次数 (AN 参照)。 $NN \geq 1$ 。

EN ... EN(1): 入力。所要の NN を推算するための $X(T)$ の相対誤差。

EN(2): 出力。EN(1)を満足する NN の推奨値。
大きさ2の1次元配列。

ER ... 出力。解 $X(T)$ の相対誤差の推奨値。

ISW ... 入力。計算条件の指示。10(A0を指定)、21(OM1を指定)のいずれか。上述 A0, OM1 を参照。

ICON ... 出力。コンディションコード。0は正常終了。90000はISWが上記以外の指定であった、またはISWの値と対応する入力パラメータの値の範囲が対応していないことを意味し計算を打ち切る。

(3) 使用上の注意

a. 使用する副プログラム名

① FORTRAN 基本関数... QSQRT, QLOG, QEXP, QATAN, MIN, ABS, SIGN

② 本プログラム中... SOLMQ, APRXH, SUB1, OM1Q0, SUB3, APROH, PRSET, AMPLH, ERROR, KANDM, REGUL

b. 注意

① $[EN(1)+10^{-35}]$ により指定される解 $X(T)$ の相対誤差(要求値)を保証する NN の推奨値が EN(2)に出力される。
EN(1)=0 とおくと 10^{-35} (~ 1 語の丸め)を採用したことになる。

図6 プログラムの使用説明書

表 5 相対誤差の拡大率

Eq. ()	Relative error multiplication
(32), (35)	$\langle A/\mu_0 \rangle = (1+A^2)/2$
(33)	$\langle \Omega/\mu_0 \rangle = \mu_0/(1-2\mu_0) - \langle K_0/\mu_0 \rangle$
(34)	$\langle \Omega/A \rangle = A^2/(1+A^2) - \langle K_0/\mu_0 \rangle / \langle A/\mu_0 \rangle$
(36)	$\langle \Omega/(1-1/\Omega) \rangle = \Omega - 1$
(37)	$\langle (\Omega-1)/(1-1/\Omega) \rangle = 1 + (\Omega-1)$

表 6 アルゴリズムの安全性評価一覧

Eq. ()	$\langle y/x \rangle = \text{error multiplication}[x \rightarrow y(x)]$	$\mu_o \rightarrow 0$ $A \rightarrow 0$ $\Omega \rightarrow 1$	$\mu_o \rightarrow 1/2$ $A \rightarrow \infty$ $\Omega \rightarrow \infty$
(32), (35)	$\langle \mu_o/A \rangle$ $\langle A/\mu_o \rangle$	$\bigcirc$ $\bigcirc$	$\bigcirc$ $\times$
(33)	$\langle \Omega/\mu_o \rangle$ $\langle \mu_o/\Omega \rangle$	$\bigcirc$ $\times$	$\times$ $\bigcirc$
(34)	$\langle \Omega/A \rangle$ $\langle A/\Omega \rangle$	$\bigcirc$ $\times$	$\bigcirc$ $\bigcirc$
(36), (37)	$\langle q_o/(\Omega-1) \rangle$ $\langle (\Omega-1)/q_o \rangle$	$\bigcirc$ $\bigcirc$	$\bigcirc$ $\times$

Note: ○=safe, ×=poor accuracy

たこれらアルゴリズムの安全/危険を、パラメータ A , Ω の値の大きさと関係付けて判定した結果を表 6 に示した。以上の検討から、4 章で述べたアルゴリズムは、定語長に起因する丸めの累積問題を除いて(語長が十分大である場合に対して)、初期入力誤差の増殖に関しては問題ないことが保証された。

なお、フーリエ級数の有限項近似による打ち切り誤差の評価問題は、上記の誤差以上に切実であるが、ここでは既報⁽⁷⁾の結果が、ほとんどそのまま利用できる(プログラムの中に組込んではいないが)その説明は割

愛する。

7. 結 語

非線形ばねを持つ 1 自由度振動系の基本的モデルとして、古来周知の対称 Duffing 系における自由振動の厳密解について、ハード、ソフト、スナップスルー各スプリングに関する既報⁽²⁾⁻⁽⁴⁾を改訂/整理した議論を展開した。特に、ハードスプリングに対しては、その詳細な計算アルゴリズムの検討を行った上、FORTRAN による一プログラムとその説明書を提示した。また、その計算結果により対称 Duffing ハードスプリング系の自由振動特性の数値例を示した。

このプログラムは、非線形振動の一般的計算のための常とう手段である近似解法や数値解法の精度検証のために容易に利用できる例題の“数値情報発生の源泉”とし大いに利用価値があると考えられる。またその中に盛り込まれた数々のプログラミング上の微妙な技巧や工夫はほかの問題のプログラミングの際にも参照/利用に値するであろうと思われる。

文 献

- (1) McLachlan, N.W., *Ordinary Nonlinear Differential Equations*, (1956), 39, Oxford at the Clarendon Press.
- (2) 田村・松田, 機論, 52-478, C(1986), 1750.
- (3) 田村・松田, 機論, 53-486, C(1987), 261.
- (4) 田村・ほか 3 名, 機論, 53-495, C(1987), 2199.
- (5) 伊理・藤野, 数値計算の常識, (1988), 1-24, 共立出版.
- (6) 田村, 機論, 57-533, C(1991), 338.
- (7) 田村・松崎, 機論, 59-566, C(1993), 3044.
- (8) 機械工学便覧, (1975), 2-15, 日本機械学会.
- (9) 友近, 楢田関数論(復刻版), (1973), 135/239, 現代工学社.
- (10) 井上, 機械力学(機械工学基礎講座), (1990), 196, 理工学社.