流体を含む三次元配管系の振動解析*

浦田 喜彦^{*1}, 佐野 敏成^{*2}Vibration Analysis of Three-Dimensional Piping Systems
Containing Fluids

Yoshihiko URATA and Toshinari SANO

A new method of vibration analysis of fluid-filled piping systems is discussed. Analytic solutions transformed into the same form as finite-element equations are used for the longitudinal, bending and torsional motion of straight parts of pipes. Ordinary finite elements are used for the in-plane and out-of-plane motion of elbows. An equation set of a whole system may be constructed with a similar procedure to the finite-element method. Natural frequencies are obtained by the determinant search method. Calculated frequencies of a three-dimensionally crooked pipe are very close to experimental ones.

Key Words: Vibration Coupled with Fluid Motion, Analytic Solution, Finite Element, Crooked Pipe, Natural Frequency, Experiment

1. 緒 言

流体輸送, 熱交換, 圧力伝達などの目的で多くの配管系が産業プラントや原子力施設などにおいて用いられているが, 配管自身の振動や内部流体の脈動は安全性や性能に対する影響が大きく, その防止は極めて重要な課題となっている。これらの振動, 脈動問題を設計段階で把握するためには配管系の動特性を管と流体の連成を考慮して計算することが可能でなくてはならない。そのための解析法が, 曲り管と定常流れのある内部流体(非圧縮性)の連成振動を伝達マトリックス法で扱った永井⁽¹⁾らの研究や, 流体の脈動を一次元モードの重ね合せとし, これと構造との連成を行列で表現して固有値問題に帰着させた田中らの研究⁽²⁾, そのほか⁽³⁾⁽⁴⁾によって検討されてきた。しかしながら, 実用的な解析法に発展させるためにはさらに研究が必要な状況にあると考えられる。

そこで流体を含む一般配管系の振動について従来とは異なる観点からの解析を試みた。第1段階としてエ

ルボないしベントと直管とを接合した配管系と内部流体の連成振動の解析法を検討した。検討に当たっての基本的方針は次のとおりである。(1)流体の粘性と平均流速は無視する。(2)管の中心軸に沿って設定した座標を唯一の独立変数とするという意味で一次元的解析とする。(3)全系の方程式は扱いやすさを考え, 有限要素法と同様の形に構成する。(4)計算規模を小さくするために直管については解析解を有限要素と同形に表現して全系の方程式に組み込む。以上のうち, 平均流速については自励振動の発生と関連する可能性があるという指摘もあり⁽¹⁾, 今後精密化する必要があるが, 系の固有振動数の把握などの目的のためには上記の前提で差し支えない場合も多いと考えられる。本論文では以上の考え方による解析を実験と比較して一つの方法として機能し得ることを基本的に確認した結果について報告する。

記 号

管とエルボについて

 a : 断面平均半径 h : 肉厚 b : 内壁半径 $b = a - h/2$ E : ヤング係数

* 原稿受付 平成5年3月3日。

*¹ 正員, 静岡理科大学 (〒437 袋井市豊沢 2200-2)。*² 元: 名古屋工業大学大学院 [現: トヨタ自動車(株) (〒471 豊田市トヨタ町 1)]。

G : 横弾性係数

ν : ポアソン比

ρ_P : 密度

S_P : 管実体断面積

S_L : 管路断面積

I : 断面 2 次モーメント

J : 極断面 2 次モーメント

$c_P^2 = E/\rho_P(1-\nu^2)$

R : エルボ中心軸曲率半径

流体について

K : 体積弾性率

ρ_L : 密度

$c_L^2 = K/\rho_L$

変位

u : 管の軸変位

u_L : 流体の軸変位

v, w : 曲げによる横変位

ϕ, ψ : 曲げによるたわみ角

θ : ねじりによる角変位

力, モーメント

T^* : 管実体断面上の合軸応力

P^* : 流体の管路断面上の全圧力

Q_y^*, Q_z^* : セン断力

M_y^*, M_z^* : 曲げモーメント

M_θ^* : ねじりモーメント

(注意: *印は正方向を対応する変位の正方向に一致させた力およびモーメントであることを示す)

2. 解 析

本研究の目的は直管とエルボの接合によって三次元的に屈曲した配管と内部流体の連成振動の解析法を検討することにあるが、配管の構成要素である直管とエルボは通常の有限要素法と同じ意味で一つの要素と考え、別個に定式化したこれらの要素の方程式を結合して全系の方程式を導く。このようにすると途中でフランジなどの質量要素やつり棒、支持台などの弾性要素が加わっても簡単に対応することができる。伝達マトリックス法は一次元的な問題に対しては非常に能率的な方法であるが、曲げ振動が介在する場合には振動次数が高くなると数値計算上安定に機能しなくなることがわかっているので⁽⁶⁾、この方面からの限定を避けるためにここでは用いなかった。以下に直管部分とエルボに分けて定式化を行っていく。

2.1 直管部分の定式化 三次元配管では直管部分は縦、曲げ、ねじりのすべての変形を行うものと考えなくてはならないが、直管部分の中ではこれらの連

成は生じず、連成はエルボの変形を介して行われると考え、直管部分の定式化に当ってはこれらは別個に扱う。変位の記号を図 1 に示す。

2.1.1 縦振動 縦振動における管と流体の相互作用はおもに管の半径方向の膨張収縮が流体の軸方向の剛性を低下させることと、内部流体の存在が結果的に管の軸方向の剛性を増大させることによって現れる。これらを考慮した理論はすでに検討されているのでここではそれを用いることにする⁽⁶⁾⁽⁷⁾。なお、管と流体が連成する縦波は波長が管直径の約 10 倍以下の短波長域になると顕著な分散性を示すが⁽⁸⁾、配管系全体の振動では比較的低い振動数域が問題になることのほうが多いので、ここでは簡単のために非分散の近似式を用いることにする。

弾性円管と流体の連成波動の長波長非分散域の位相速度の近似式は次式で与えられる⁽⁶⁾⁽⁷⁾。

$$\alpha_2^2 = \frac{H_2 \pm \sqrt{H_2^2 - 4H_1H_3}}{2H_1} \quad \dots\dots\dots (1)$$

ただし、

$$\left. \begin{aligned} H_1 &= \frac{c_P^2}{a^2 c_L^2} + \frac{2\rho_L}{\rho_P a h} \\ H_2 &= \frac{c_P^2}{a^2} \left\{ \frac{c_P^2}{c_L^2} (1 - \nu^2) + \frac{2\rho_L a}{\rho_P h} + 1 \right\} \\ H_3 &= \frac{c_P^4}{a^2} (1 - \nu^2) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (2)$$

α_1, α_2 はそれぞれ流体、管の運動を主にする縦波の伝ば速度である。これから波数が $\beta_i = \omega/\alpha_i$ と計算されるが、この波数を用いて管の軸変位 u と流体の軸変位 u_L がそれぞれ次のように表される。

$$u = \sum_{i=1}^2 (A_i \cos \beta_i x + B_i \sin \beta_i x) \quad \dots\dots\dots (3)$$

$$u_L = \sum_{i=1}^2 \xi_i (A_i \cos \beta_i x + B_i \sin \beta_i x) \quad \dots\dots\dots (4)$$

ただし、

$$\xi_i = 2 \frac{a c_L^2 (\omega^2 - c_P^2 \beta_i^2)}{b \nu c_L^2 (\omega^2 - c_L^2 \beta_i^2)} \quad \dots\dots\dots (5)$$

式(3)、(4)では時間因数 $\exp(j\omega t)$ を省略してある。以下同様とする。一方、これらの変位に対応する力として管実体断面上の合軸応力 T と流路断面上での全

図 1 管と流体の変位の記号

流体圧力 P を採用する.

$$T = \sum_{i=1}^2 \tau_i (-A_i \sin \beta_i x + B_i \cos \beta_i x) \quad \cdots \cdots (6)$$

$$P = \sum_{i=1}^2 \sigma_i (A_i \sin \beta_i x - B_i \cos \beta_i x) \quad \cdots \cdots (7)$$

ここに

$$\tau_i = \rho_P S_P \frac{\omega^2}{\beta_i}, \quad \sigma_i = \rho_L S_L \frac{\xi_i \omega^2}{\beta_i} \quad \cdots \cdots (8)$$

これらの力の正方向は正の断面では T は x の正方向, P は x の負方向であり, 負の断面では正方向は逆転する. ここでは有限要素法と同じ形に定式化するためにすべての力の正方向を x の正方向, すなわち変位の正方向に一致させることにする. このように変換した力には * を付ける.

いま, 長さ l の直管部分を考え, $x=0, l$ における量にそれぞれ添え字 1, 2 を付ける. すると式 (3) ~ (8) より次の 2 式を得る.

$$\begin{bmatrix} u_{L1} \\ u_1 \\ u_{L2} \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi_1 & 0 & \xi_2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ \xi_1 c_1 & \xi_1 s_1 & \xi_2 c_2 & \xi_2 s_2 \\ c_1 & s_1 & c_2 & s_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ B_1 \\ A_2 \\ B_2 \end{bmatrix} \quad \cdots \cdots (9)$$

$$\begin{bmatrix} P_1^* \\ T_1^* \\ P_2^* \\ T_2^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\sigma_1 & 0 & -\sigma_2 \\ 0 & -\tau_1 & 0 & -\tau_2 \\ -\sigma_1 s_1 & \sigma_1 c_1 & -\sigma_2 s_2 & \sigma_2 c_2 \\ -\tau_1 s_1 & \tau_1 c_1 & -\tau_2 s_2 & \tau_2 c_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ B_1 \\ A_2 \\ B_2 \end{bmatrix} \quad \cdots \cdots (10)$$

ただし,

$$c_i = \cos \beta_i l, \quad s_i = \sin \beta_i l, (i=1, 2)$$

とした. 式 (9), (10) から未知係数ベクトルを消去した結果をつぎのように略記する.

$$\{F_L\} = [D_L] \{U_L\} \quad \cdots \cdots (11)$$

ただし,

$$\begin{aligned} \{U_L\} &= [u_{L1}, u_1, u_{L2}, u_2]^T \\ \{F_L\} &= [P_1^*, T_1^*, P_2^*, T_2^*]^T \end{aligned} \quad \cdots \cdots (12)$$

である. 行列 $[D_L]$ の具体的内容は省略するが, この行列は対称である. 式 (12) は有限要素と同じ表現であり, $[D_L]$ は動剛性行列である. 式 (11) は後述する若干の注意点を除けば通常の有限要素と同様に扱うことができ, 隣接する部分に通常の有限要素を用いることも可能である.

2・1・2 曲げ振動 直管部分の曲げ振動においては管内流体は単に質量としてのみ作用し, 剛性への寄与はないと仮定する. そして基礎式としてベルヌイ・オイラーのはり理論を用いれば

$$\frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + k^4 v = 0 \quad \cdots \cdots (13)$$

ただし, v は y 方向の変位であり, k は次式による.

$$k^4 = \frac{\rho_P S_P + \rho_L S_L}{EI} \omega^2 \quad \cdots \cdots (14)$$

式 (13) の解は

$$v = C_1 \cos kx + C_2 \sin kx + C_3 \exp(-kx) + C_4 \exp(l-kx) \quad \cdots \cdots (15)$$

たわみ角をつぎのように定義する.

$$\phi = \frac{\partial v}{\partial x} \quad \cdots \cdots (16)$$

前と同様に直管部分の両端における量に添え字 1, 2 を付ける. すると変位について次式を得る.

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ \phi_1 \\ v_2 \\ \phi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & q \\ 0 & k & -k & kq \\ c & s & q & 1 \\ -ks & kc & -kq & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{bmatrix} \quad \cdots \cdots (17)$$

ただし, ここで

$$c = \cos kl, \quad s = \sin kl, \quad q = \exp(-kl)$$

とした. 曲げモーメントとせん断力はつぎの式で計算される.

$$M_y = -EI \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \quad Q_y = -EI \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} \quad \cdots \cdots (18)$$

ここでも力とモーメントの正方向を対応する変位の正方向と一致させて * を付ければ

$$\begin{bmatrix} Q_{y1}^* \\ M_{y1}^* \\ Q_{y2}^* \\ M_{y2}^* \end{bmatrix} = EI k^2 \begin{bmatrix} 0 & k & k & kq \\ 1 & 0 & 1 & q \\ -ks & kc & kq & -k \\ c & s & q & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{bmatrix} \quad \cdots \cdots (19)$$

式 (17), (19) から未知係数ベクトルを消去すれば

$$\{F_y\} = [D_B] \{U_y\} \quad \cdots \cdots (20)$$

ここに,

$$\begin{aligned} \{U_y\} &= [v_1, \phi_1, v_2, \phi_2]^T \\ \{F_y\} &= [Q_{y1}^*, M_{y1}^*, Q_{y2}^*, M_{y2}^*]^T \end{aligned} \quad \cdots \cdots (21)$$

式 (20) も通常の有限要素と同様に扱うことができる. 行列 $[D_B]$ も対称である.

z 方向のたわみ w とたわみ角 $\psi = \partial w / \partial x$ およびこれらに対応するせん断力と曲げモーメントに対しても全く同様の関係が成立する.

$$\{F_z\} = [D_B] \{U_z\} \quad \cdots \cdots (22)$$

$$\begin{aligned} \{U_z\} &= [w_1, \phi_1, w_2, \phi_2]^T \\ \{F_z\} &= [Q_{z1}^*, M_{z1}^*, Q_{z2}^*, M_{z2}^*]^T \end{aligned} \quad \cdots \cdots (23)$$

2・1・3 ねじり振動 配管系の振動ではねじり振動は単独で大きな影響をもつことはないが, 屈曲した管の各部分の曲げ振動を連成させる働きをするのでここでは考慮する. 流体の粘性を考えていないのでねじり振動には流体の影響はまったくないとする. 方程式は

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \gamma^2 \theta = 0 \quad \dots\dots\dots (24)$$

$$\gamma^2 = \frac{\rho_F \omega^2}{G} \quad \dots\dots\dots (25)$$

解は

$$\theta = A \cos \gamma x + B \sin \gamma x \quad \dots\dots\dots (26)$$

ねじりモーメントは次式による。

$$M_t = GJ \frac{\partial \theta}{\partial x} \quad \dots\dots\dots (27)$$

これから有限要素と同様の定式化を行う手順はこれまでと同じで次のような結果を得る。

$$\{F_t\} = [D_t] \{U_t\} \quad \dots\dots\dots (28)$$

$$\{U_t\} = [\theta_1, \theta_2]^T \quad \dots\dots\dots (29)$$

$$\{F_t\} = [M_t^*, M_t^*]^T$$

2・1・4 解析解を用いた有限要素の特性 さて、式(11)、(20)、(22)、(28)は解析解を有限要素と同形に表現したものであるが、通常の有限要素と異なってこれらの式に直接、両端自由と両端固定の境界条件を課しても振動数方程式を得ることはできない。これはここで扱いたい種類の振動でもこの二つの境界条件における固有振動数が一致することによる。縦振動を例にとれば式(9)と(10)の係数行列の行列式の零点が一致するのでこれらの行列から求めた $[D_L]$ の行列式には実は零点が存在しないことになるからである。したがって、式(11)などに両端自由などの境界条件を適用することはできないが、元来これらの式は直管を単独で扱うことを想定したものではなく、ほかのエルボや質量などの要素と接続することを前提にしているので上述の性質はとくに制約にはならない。

また、これまでに導いた式には振動数が陰に含まれる形になるために全系の方程式を構成した後にも計算法としては一般に行列式探索法しか適用できない。しかしながら、直管の途中には節点を設ける必要がないために全体として計算規模を大きくしないですみ、このことも大きな制約にはならない。

2・2 エルボの定式化 エルボについても曲がりのはりの理論と流体の方程式を連立させて得た解析解を有限要素化する手法が考えられる。しかしながら実際に試みた結果では通常エルボと呼ばれる管断面の半径に対する中心軸の曲率半径の比が比較的小さい範囲ではよい結果が得られなかった。詳細は省略するが、一次元化の過程に検討の余地があるものとみられる。そこで、この方法については今後の課題として、ここでは通常の有限要素法を用いることにする。ただし、ここでいう有限要素法は一次元的直管要素の組合せで曲管としてのエルボを表現しようとするものである。

2・2・1 面内振動 図2に示すように直角エルボを N 等分して中心弧をそれに内接する折線で近似する。各線分を一つの有限要素とするのであるが、面内振動では管と流体の軸方向振動、曲げ振動が関与する。しかしながら、これら各形の振動が連成するのは隣接する直管要素と屈曲を考慮して接合する節点においてであって、直管要素の内部では各振動は互いに独立に扱えるものとする。したがって各振動の有限要素の定式化はまったく標準的なもの⁽⁹⁾となるのでここでは詳細は省略し、二、三の注意点を述べるにとどめる。

まず、管の縦振動における軸方向の剛性は管の断面積と管材のヤング係数の積そのものを用い、また、流体の縦振動では流体の体積弾性率と管路断面積の積を剛性としてそれぞれ棒の縦振動と同じ形の定式化を行った。エルボが長くなれば特に流体の剛性に管の弾性の影響を考慮する必要が生じるが、ここでは短いエルボを対象として上述のようにした。

曲げ振動では流体は単なる質量として扱った。それに加え、曲がり管の曲げに際しては断面形状の変化による曲げ剛性の変化が無視できないとの指摘があるので、次の式で計算される x をかけた xEI を曲げ剛性とした⁽¹⁰⁾。

$$x = \frac{1+12\lambda^2}{10+12\lambda^2}, \quad \lambda = \frac{Rh}{a^2} \quad \dots\dots\dots (30)$$

後に示すように、ここで定義される x を考慮したほうが明らかに実験結果との一致がよい計算結果が得られる。そのほかは一様断面はりと同じ扱いで要素化を行う。

つぎに隣接する直管要素と接合するために一般化変位と一般化力の座標変換(回転)を施す必要があるが、その際に軸方向成分として管と流体に由来する変位と力が2個ずつあるので単純な直交変換は適用できない。そこで、図3のように回転の角度 α に見合う中心角をもつ仮想の剛曲管を考え、両端の変位間の変換を考える。曲がり管の長さを無限小と考え、流体の軸方

図2 直角エルボの N 分割

向変位 u_L と管の軸変位との相対変位が両端で等しいとし、ほかは直交変換されると考えると次の関係を得る。

$$\begin{bmatrix} u_L \\ u \\ v \\ \phi \end{bmatrix}^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & c-1 & -s & 0 \\ 0 & c & -s & 0 \\ 0 & s & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_L \\ u \\ v \\ \phi \end{bmatrix}^{(1)} \quad \dots\dots(31)$$

$$\begin{bmatrix} u_L \\ u \\ v \\ \phi \end{bmatrix}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & c-1 & s & 0 \\ 0 & c & s & 0 \\ 0 & -s & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_L \\ u \\ v \\ \phi \end{bmatrix}^{(2)} \quad \dots\dots(32)$$

ただし、

$$c = \cos \alpha, \quad s = \sin \alpha$$

とした。式(31)、(32)の両辺のベクトルのかっこを付した上添え字は図3の配置で1が左、2が右を示す。式(31)、(32)の行列は互いに逆行列の関係にはあるが、転置の関係にはないので直交行列ではない。一般化力についてはベクトルの成分を変位に対応させて並べたとき、式(31)、(32)の行列の転置行列で変換される。これは図3の曲がり管の長さが無限小であるべきことから両端で流体圧力が等しいとしたうえで両端に働く力が静的に釣合っていると考えれば導かれる。

以上に導いた変換行列を用いて各直管要素を接合すればエルボ全体の変位と力の関係が求まるが、途中の節点は後に必要がないので消去しておけば、両端の節点のみでエルボを一つの要素のように扱うことができ、前節で求めた直管部分との接合に都合がよい。

2・2・2 面外振動 この場合も図2のように要素分割を行う。各要素は曲げとねじりの変形を行うがこれらが関係づけられるのは屈曲を考慮する節点においてであると考えるのは面内振動の場合と同じである。曲げについては流体は質量のみが関与するとし、ねじりについては流体は無関係としたうえで、それぞれ標準的な要素行列⁹⁾を用いればよい。曲げ剛性は面外振動では EI そのものでよい。隣接する要素との接合に

図3 エルボ要素の接合点における変位の方向変換のための仮想無限小剛曲管

際して行う回転変換は曲げとねじりの角変位とモーメントとをベクトル成分として通常の直交変換に従えばよい。そのほかの扱いは面内振動と同じなので詳細は省略する。

なお、1節点当りの自由度は面内が4、面外が3で計7となる。三次元的に屈曲した配管を扱う場合にはこれらのすべての自由度を考慮しなければならない。

2・3 数値計算について 以上に導いた直管部分とエルボの式に加えて必要に応じて質量や支持ばねを考慮すれば配管系全体の方程式を構成できる。固有振動数は前述したように行列式探索法によって計算するのであるが、その際に注意すべきこととして行列式の値は零点のみならず、特異点をも有し、これらをはさんで符号が反転することである。そこで振動数を適当な刻み幅で移動させて符号が反転する個所を見出してそこに至るまでの行列式の絶対値が上昇傾向にある場合には特異点とみなす方法をとった。収束計算は二分法によったが、必要とあれば二分法のループ内でも同様の判定をすればよい。

計算条件によっては零点と特異点が近接していて振動数の刻み幅が大きいと双方をはさみ込んで符号の変化が生じないことも考えられるので刻み幅をあまり粗くすることは適当ではない。しかしながら、行列式の値の推移を監視して必要ならば部分的に自動的に刻みを細かくするなどプログラミング上の工夫をすれば特異点の存在による問題点はほとんど回避できる。

3. 計算と実験の結果

第3章で述べた方法で数種類の条件下で流体を含む配管の固有振動数の計算を行い、その結果を実験と比較したのでその概要を述べる。

3・1 直管 多くの配管系では直管部分が大部分を占めるので、用いる直管の計算モデルの精度によって全体の精度が左右されることになる。また、流体を含む直管に関する検討はあまり見られない。そこで縦振動と曲げ振動の固有振動数の計算値と実験値の比較を行った。

図4 計算と実験をした直管の諸元

計算および実験に用いた管を図4に示す。実線は図に示すように供試管を糸でつって両端自由の境界条件とし、電磁型加振器で非接触励振で行った。その際、とくに縦振動においては内部流体に気泡が混入すると結果が非常に不安定になるので、流体(水)には沸騰させて脱気したものを用いた。さらに密閉状態にするわずかな温度変化でも管材と流体の熱膨張率の差から内部の圧力が大きく変動するので、供試管の上部に静圧タンクを置き、これと管内部を細い軟質ビニールチューブで導通させて圧力の安定化を図った。これらの注意は後に示す実験でも同じである。

まず、縦振動の結果を表1に示す。これはそれぞれ流体と管の縦波が卓越する二つの波動モードが管端の条件によって連成した結果であるが、計算と実験の結果に差はすべて0.5%以内で一致の程度はきわめてよい。したがって、用いた計算モデルは妥当であると結論できる。

次に曲げ振動の結果を表2に示す。実験に問題があったと考えられる7次振動を除いて全体的な傾向として高次モードになるほど計算値のほうが大きくなる。これは明らかにせん断変形と回転慣性の影響を計算では考慮していないことによるものと考えられ、したがって改善することは可能であるが、一般配管の場合には一部に有限要素を用いるなどさらに近似の要因を加えて計算せざるをえないので、ここではこのままとする。予想されることではあるが、流体の効果を単に質量への寄与だけ考えて曲げ振動を扱ってもとくに問題はないと考えられる。

3.2 L形管 ここで用いたエルボは小さく、単体での振動実験は不可能なのでエルボを含む配管系としてはもっとも簡単な場合であるL形管で実験を行って計算値と比較をした。図5にL形管とエルボの寸法を示す。エルボはSUS304製で物性値は直管と同じ

とした。直管は長さ以外は図4と同じである。直管とエルボの接合は銀ろう付で行った。また実験は両端自由で行った。

表3は面内振動の結果である。3種類の計算値を示したが、Bの値はエルボの曲げ剛性に式(30)による補正係数を掛けた場合、Cは補正係数を掛けない場合、Dは流体の体積弾性率を1000倍として流体をほぼ非圧縮性とみなせるようにして計算した場合である。いずれもエルボを5分割して計算した。BとCではBのほうが実験値との一致がかなりよく、エルボの曲げ剛性に補正係数が必要なことを示している。また、Dでは流体の縦波が卓越する振動モードが当然のことながら計算されておらず、この点で不十分である。ここでは流体は純水として計算したが、プラントに供給され

表1 直管の縦振動の固有振動数

Mode	Measured A (Hz)	Calculated B (Hz)	Ratio B/A
1	535.15	537.34	1.004
2	803.12	801.16	0.998
3	1317.1	1318.9	1.001
4	1432.7	1430.3	0.998
5	1885.4	1891.6	1.003
6	2126.1	2130.4	1.002
7	2649.9	2637.1	0.995
8	2847.1	2845.6	0.9995

表2 直管の曲げ振動の固有振動数

Mode	Measured A (Hz)	Calculated B (Hz)	Ratio B/A
1	62.85	62.68	0.997
2	173.15	174.48	1.008
3	338.77	344.29	1.016
4	556.82	572.47	1.028
5	822.53	865.97	1.053
6	1130.6	1206.0	1.067
7	1617.9	1612.2	0.997
8	1916.2	2078.5	1.085

表3 L形管の面内振動の固有振動数

Mode	Measured A (Hz)	Calculated*		Calculated**		Calculated*** D (Hz)
		B (Hz)	B/A	C (Hz)	C/A	
1	18.51	18.96	1.024	20.97	1.133	18.98
2	72.55	72.39	0.998	73.88	1.018	72.45
3	116.62	116.98	1.003	124.55	1.069	117.14
4	215.35	216.70	1.006	224.26	1.041	217.35
5	318.86	321.35	1.008	327.74	1.028	331.57
6	350.83	354.64	1.011	359.82	1.026	
7	433.91	442.42	1.020	461.14	1.065	442.19
8	638.03	645.50	1.012	649.71	1.018	652.11
9	666.33	675.52	1.014	677.67	1.017	

Calculated* : Bending stiffness of elbow is κEI .

Calculated** : Bending stiffness of elbow is EI .

Calculated***: Bending Stiffness is κEI and fluid is incompressible.

図5 L形管の諸元

る原料液などの中には音速がさらに小さいものもあり得る。そのような場合には流体の縦波が卓越するモードが相対的により低い次数を占めることになるので、流体を非圧縮性とするモデルは一般に適用範囲が非常

に限られることになる。

次に表4は面外振動の結果である。6次振動が実験ではとらえられていないが、そのほかは計算と実験は実用的に許容できる範囲で一致している。

表4 L形管の面外振動の固有振動数

Mode	Measured A (Hz)	Calculated	
		B (Hz)	B/A
1	69.71	68.24	0.979
2	118.99	117.13	0.984
3	211.23	215.46	1.020
4	325.85	329.47	1.011
5	440.10	438.68	0.997
6	—	541.78	—
7	630.61	650.73	1.032
8	684.35	694.13	1.014
9	778.53	808.11	1.038

表5 三次元配管の固有振動数

Mode	Measured A (Hz)	Calculated*		Calculated** C (Hz)
		B (Hz)	B/A	
1	12.69	11.50	0.906	11.63
2	18.02	18.00	0.999	18.11
3	24.93	23.80	0.955	23.81
4	66.05	66.14	1.001	66.21
5	67.09	69.09	1.030	69.10
6	93.85	94.97	1.012	95.04
7	101.74	102.39	1.006	102.45
8	162.76	162.79	1.000	162.88
9	171.59	168.85	0.984	169.83
10	207.06	208.33	1.006	211.23
11	215.84	217.82	1.009	217.93
12	246.52	250.04	1.014	—
13	285.20	291.35	1.022	290.68
14	295.34	300.62	1.018	300.64
15	422.35	430.06	1.018	428.39
16	428.47	438.24	1.023	438.39
17	452.40	467.33	1.033	—
18	470.99	481.35	1.022	475.74
19	479.77	502.31	1.046	484.16

Calculated* : Fluid is compressible.

Calculated** : Fluid is incompressible.

図6 三次元曲管の諸元

— Calculated
○ Measured

図7 三次元曲管の振動モード

れた可能性が大きい。流体の圧縮性を考慮しない計算値 C では流体の縦波が卓越する振動モードは当然のことながらとらえられていない。低次モードのいくつかについては振動形の測定もしているのでその例を図 7 に示す。計算と実験はほぼ一致している。

そのほか、フランジ継手における接合角度を変えてコの字形の二次元的配置にした場合についても実験と計算を行った。結果の詳細は省略するが、計算と実験の一致はほぼ三次元曲管と同じ程度であった。

本論文で検討してきた計算法が流体を含む一般的な配管系の振動解析に対して信頼できるものであることが以上によって示されたと判断される。

4. 結 言

本論文では流体を含む一般的な配管形の振動解析法について検討して実験とよく一致する結果が得られることを確認した。この解析法の特徴は次のとおりである。

(1) 直管部分については管と流体が連成する縦振動、流体を単なる質量要素とみなした曲げ振動およびねじり振動をそれぞれ両端の一般化変位と一般化力との関係として解析解を有限要素形に表現する方法を提案した。この方法には若干の制約があるが、途中の節点が不要のために計算規模が小さくてすみ、精度のよい結果が得られる。

(2) エルボについては面内、面外振動ともに有限要素法を用いて直管部分と直接結合を行った。とくに面内振動では変位と力の軸成分に管と流体に由来するものがあるので隣接要素との結合に若干の工夫を行った。

(3) 全系の方程式は通常の有限要素法と同じ要領で構成できる。振動数の計算は行列式探索法によることになる。その際、零点のみならず、特異点でも行列式の値に符号の変化が起きることに注意を必要とする。

本論文では方法の特性の基本的確認の段階にあるために比較的簡単な場合を対象に実験と計算を行ったが、この計算法によってどのような条件下で流体脈動が管振動を誘起しやすいか、逆に管振動が流体脈動にどのような場合に影響するのかなどを解析することが可能になったので今後も検討を続ける予定である。また、流体の平均流速の系の安定性への影響なども検討できるように方法の拡張も行いたい。

なお、本論文で提案した解析解を用いて直管の有限要素化を図る方法は著者の一人がすでに二次元問題などで検討してきた方法⁽¹¹⁾⁽¹²⁾の一次元問題への応用であるが、一次元では厳密性を損なわず、しかもより簡単に適用できる。この方法はフレーム構造の振動解析などにも応用が可能である。

末筆ながら、本研究の遂行に際しては木更津高専の近藤尚夫先生(元石川島播磨重工業)をはじめ、石川島播磨重工業(株)の甲斐睦了、千葉敏郎、小林博栄の諸氏にはご討論をいただいたほか、ご援助をしていただいた。厚く感謝申し上げる。また、本研究の初期には平成 2 年度の名古屋工業大学卒研究生 竹田生也君の協力があつたことを記して感謝する。

文 献

- (1) 永井・葉山, 機論, 57-537, C(1981), 1452.
- (2) 田中・ほか 2 名, 機講論, No. 900-44(1990-7), 135.
- (3) Hatfield, F. J., ほか 2 名, *Trans. ASME, J. Fluids Eng.*, 104(1982), 318.
- (4) 鷲尾・ほか 2 名, 機論, 44-386(1978), 3487.
- (5) 柴田, 機講論, No. 710-12(1971-10), 163.
- (6) Krause, N., ほか 2 名, *Int. J. Mech. Sci.*, 19(1977), 53.
- (7) 浦田, 機論, 53-487, C(1987), 527.
- (8) 浦田, 機論, 41-351(1975), 3114.
浦田, 機論, 45-396(1979), 869.
- (9) 例えば, Petyt, M., *Introduction to finite element vibration analysis*, (1990), 53, Cambridge Univ. Press.
- (10) 倉西, 弾性学(複製版), (1970), 228, 国際理工研究社.
- (11) 浦田・中川, 機論, 55-512, C(1989), 895.
- (12) 浦田・熊谷, 機論, 57-538, C(1991), 1848.