ラビリンスシールの振動学的動特性解析*

斉 藤 忍^{*1}

Calculation of Rotordynamic Characteristics of Labyrinth Seal

Shinobu SAITO

A calculation method utilizing the computational fluid dynamics technique for the linear rotor-dynamic characteristics of labyrinth seals is presented. First, the static flow, in which the rotor is concentric with the seal, is calculated taking into account the viscosity change with turbulence and the compressibility. Next, the perturbation flow is computed based on this static flow. The perturbation equations may be treated as a two-dimensional problem by separating the angle variable. In this calculation, coefficients of spring, damping, and acceleration are separately calculated. The difference equations of control volumes adjacent to the rotor are first obtained in a three-dimensional form, then transformed into the two-dimensional one by applying the fast fourier transform technique to the coefficients of these equations. The present calculation method is verified by calculating for a straight-through labyrinth seal whose empirically determined flow state has been published. It is shown that rotor instability can be initiated through the cross-coupling term of spring, if the inlet swirl is intense enough, that its diagonal term differs greatly from the conventionally accepted value and that the mere determination of cavity pressure is insufficient to infer the pressure distribution that exists across a fin.

Key Words: Self-Excited Vibration, Flow Induced Vibration, Rotor Dynamics, Labyrinth Seal, Instability

1. ま え が き

流れの場にある構造物は流れの影響を受けると同時に、構造物が振動することにより流れにも影響を及ぼしている。このような流体関連振動問題は現在でも未解明なことが多く、特に自励振動問題になるとときには事態は深刻である。ロータダイナミクスの分野ではオイルホイップが典型的な事例であり、古くから数多くの研究が行われ、現在ではたいいていの場合の処方箋が確立されている。最近では回転機械の高エネルギー密度化に伴い、従来とは異なる機械要素が自励振動の発生原因となってきた。これらのうち最も有名なものがラビリンスシールである。

事態を簡単にするためここでは線形振動の範囲内に限るが、流れが存在することによって付加質量、減衰、ばねなどの係数を考える必要のあることがわかっている。ところがこれらの係数は翼形など特殊な場合を除いては一般的には解析不能であり、このことが流体関連振動問題の解明を困難にしていると考えられる。

ラビリンスシールの問題では Kostyuk⁽¹⁾、岩壺ら⁽²⁾

の解析や Wachter と Benckert⁽³⁾、金光ら⁽⁴⁾、岩壺ら⁽⁵⁾の実験報告がある。このうち解析で用いられているモーメント方程式は周方向の角度に関する微分方程式であるが、本論の議論で明らかのように、微小振動論的には周方向角度は変数分離が可能である。また実験報告の多くは空洞内の圧力を測定することによって動特性を求めているが、フィン前後で圧力分布の急変することが考えられ、この影響についてはいまだ明確ではない。

フィン前後の圧力分布をより詳細に考慮するためには数値流体力学を用いる必要がある。この理論が Dietzen と Nordmann⁽⁶⁾により報告され、特殊な座標変換を用いた動特性の解析法が定式化されている。しかしながらこの理論を用いた計算結果はいまだ公表されていないように思われる。座標変換に伴う代数計算は多くの場合大変煩雑であり、計算間違いを起こしやすい。また変換公式は場合によって異なるので一般性に欠ける点がある。そこでここではより一般性のある、計算機を前提とした解析に適していると思われる動特性の解析法を提案する。ここで述べる計算法の特長は加速度、速度、変位に関する係数をおのおの独立に計算できること、および計算の対象がラビリンスシールに限定されるものではないことにある。

* 原稿受付 平成5年5月17日。

^{*1} 正員、石川島播磨重工業(株)技術研究所 (〒135 東京都江東区豊洲3-1-15)。

計算は数値流体力学の一つである SIMPLE⁽⁶⁾ と呼ばれる手法を用いて行う。まず振動的ではない静的な流れを前提として軸とラビリンスが同しんの状態の計算を行う。そこでは流れは圧縮性でかつ乱流として取り扱うが、乱流のモデルは $k-\epsilon$ 理論によるものとする。次に軸におのおの微小な変位、速度、または加速度を与えた場合の摂動流れを計算する。これらの圧力分布がわかれば容易にばね、減衰、加速度の係数を求めることができる。ついで金光らの実験⁽⁴⁾ をモデルとした計算例から新たに得られた知見について考察する。

2. 摂動運動方程式の導出

基礎となる運動方程式は円筒座標で表した三次元のナビエーストークスの方程式である。使用する座標系を変位を摂動項とした場合について図 1 に示す。

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \text{div}(\rho V u - \mu \text{grad} u) \\ = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\mu r \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\ + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\mu \frac{\partial v_{\theta}}{\partial x} \right) \dots \dots \dots (1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \text{div}(\rho V v - \mu \text{grad} v) \\ = -\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial r} \left(\mu \frac{\partial v}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\mu \frac{\partial v_{\theta}}{\partial r} \right) \\ + \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{\mu}{r} \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{2\mu}{r^2} \frac{\partial v_{\theta}}{\partial \theta} \\ - \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} (\mu v_{\theta}) - \frac{2\mu v}{r^2} + \frac{\rho v_{\theta}^2}{r} \dots \dots \dots (2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho r v_{\theta})}{\partial t} + \text{div}(\rho V r v_{\theta} - \mu \text{grad}(r v_{\theta})) \\ = -\frac{\partial p}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\mu \frac{\partial v_{\theta}}{\partial \theta} \right) + \frac{2}{r} \frac{\partial(\mu v)}{\partial \theta} \\ + \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) + \frac{\mu}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{\partial}{\partial r} \left(\mu \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) \\ - 2 \frac{\partial}{\partial r} (\mu v_{\theta}) - 2 \frac{\mu v_{\theta}}{r} \dots \dots \dots (3) \end{aligned}$$

連続の式は次式で与えられる。

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho V) = 0 \dots \dots \dots (4)$$

ここで ρ は密度、 μ は粘度、 u は軸方向の流速、 v は半径方向の流速、 v_{θ} は周方向の流速、 p は圧力、 V は速度ベクトルであり、また x は軸方向の座標、 r は半径方向の座標、 θ は周方向の座標、 t は時間を表す。

これらの方程式をラビリンスと軸が同しんの状態を基準としてこれに微小なじょう乱が加算されたときの状態を表現するため、摂動解を次のように置く。ここでは u についてのみ記述したがほかの変数に対しても同様である。

図 1 座標系

$$u = u_0 + e(u_c \cos \theta + u_s \sin \theta) \dots \dots \dots (5)$$

ここで添字 0 は同しん状態、添字 c, s はそれぞれ摂動解の $\cos$ 成分、 $\sin$ 成分を表すものとする。また e は微小じょう乱項であり、変位、速度または加速度を表す。式(5)を式(1)から式(4)へ代入し整理することによって、同しん状態の運動方程式および摂動に関する運動方程式が得られる。まず同しん状態の運動方程式は次のようになる。

$$\begin{aligned} \text{div}(\rho_0 V_0 u_0 - \mu \text{grad} u_0) = \\ -\frac{\partial p_0}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial u_0}{\partial x} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\mu r \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) \dots (6) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{div}(\rho_0 V_0 v_0 - \mu \text{grad} v_0) \\ = -\frac{\partial p_0}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial u_0}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\mu r \frac{\partial v_0}{\partial r} \right) \\ + \frac{\rho_0 v_{\theta 0}^2}{r} - \frac{2\mu v_0}{r^2} \dots \dots \dots (7) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{div}(\rho_0 V_0 r v_{\theta 0} - \mu \text{grad}(r v_{\theta 0})) = -\frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} (\mu r v_{\theta 0}) \\ \dots \dots \dots (8) \end{aligned}$$

$$\text{div}(\rho_0 V_0) = 0 \dots \dots \dots (9)$$

また k, ϵ の方程式は同しん状態についてのみ適用するすなわち摂動によって乱流の状態は変化しないと仮定する。 k, ϵ の関係式は次式で与えられる。

$$\text{div}(\rho_0 V_0 k - \Gamma_{k,\text{eff}} \text{grad} k) = G_k - \rho_0 \epsilon \dots \dots (10)$$

$$\begin{aligned} \text{div}(\rho_0 V_0 \epsilon - \Gamma_{\epsilon,\text{eff}} \text{grad} \epsilon) \\ = (c_1 G_k - c_2 \rho_0 \epsilon) \epsilon / k \dots \dots \dots (11) \end{aligned}$$

ここで G_k は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} G_k = \mu_t \left[2 \left\{ \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_0}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{v_0}{r} \right)^2 \right\} \right. \\ \left. + \left(\frac{\partial v_{\theta 0}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_0}{\partial r} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_{\theta 0}}{\partial r} - \frac{v_{\theta 0}}{r} \right)^2 \right] \end{aligned}$$

また $\Gamma_{k,\text{eff}} = \mu_{\text{eff}} / \sigma_{k,\text{eff}}$, $\Gamma_{\epsilon,\text{eff}} = \mu_{\text{eff}} / \sigma_{\epsilon,\text{eff}}$ であり、 $c_1 = 1.43$, $c_2 = 1.92$, $\sigma_{k,\text{eff}} = 0.9$, $\sigma_{\epsilon,\text{eff}} = \chi^2 / (c_2 - c_1) c_b^{1/2}$, $c_D = 0.09$, χ はカルマン定数である。さらに μ_t を層流の粘性係数とすれば、乱流粘性係数 μ_t および μ_{eff} は $\mu_t = c_D \rho k^2 / \epsilon$, $\mu_{\text{eff}} = \mu_t + \mu_t$ で与えられる。

また振動方程式は次のようになる。

$$\begin{aligned} & \frac{\partial(\rho_0 u_c)}{\partial t} + \text{div}(\rho_0 V_0 u_c - \mu \text{grad } u_c) \\ &= -\rho_0 \frac{\partial u_0}{\partial r} v_c + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\mu r \frac{\partial v_c}{\partial x} \right) + \frac{\mu}{r^2} \frac{\partial(r v_{\theta s})}{\partial x} \\ & - \left(\rho_0 \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\mu}{r^2} \right) u_c + \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial u_c}{\partial x} \right) \\ & - \frac{\rho_0 v_{\theta 0}}{r} u_s - \rho_c \left(v_0 \frac{\partial u_0}{\partial r} + u_0 \frac{\partial u_0}{\partial x} \right) - \frac{\partial p_c}{\partial x} \\ & \dots\dots\dots(12) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial(\rho_0 u_s)}{\partial t} + \text{div}(\rho_0 V_0 u_s - \mu \text{grad } u_s) \\ &= -\rho_0 \frac{\partial u_0}{\partial r} v_s + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\mu r \frac{\partial v_s}{\partial x} \right) - \frac{\mu}{r^2} \frac{\partial(r v_{\theta c})}{\partial x} \\ & - \left(\rho_0 \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\mu}{r^2} \right) u_s + \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial u_s}{\partial x} \right) \\ & + \frac{\rho_0 v_{\theta 0}}{r} u_c - \rho_s \left(v_0 \frac{\partial u_0}{\partial r} + u_0 \frac{\partial u_0}{\partial x} \right) - \frac{\partial p_s}{\partial x} \\ & \dots\dots\dots(13) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial(\rho_0 v_c)}{\partial t} + \text{div}(\rho_0 V_0 v_c - \mu \text{grad } v_c) \\ &= -\left(\rho_0 \frac{\partial v_0}{\partial r} + \frac{3\mu}{r^2} \right) v_c + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\mu r \frac{\partial v_c}{\partial r} \right) \\ & - \frac{\rho_0 v_{\theta 0}}{r} v_s + \frac{2\rho_0 v_{\theta 0}}{r} v_{\theta c} - \frac{4\mu}{r^2} v_{\theta s} \\ & + \frac{\mu}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r v_{\theta s}) - \rho_0 \frac{\partial v_0}{\partial x} u_c + \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial u_c}{\partial r} \right) \\ & - \rho_c \left(v_0 \frac{\partial v_0}{\partial r} + u_0 \frac{\partial v_0}{\partial x} - \frac{v_{\theta 0}^2}{r} \right) - \frac{\partial p_c}{\partial r} \dots\dots\dots(14) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial(\rho_0 v_s)}{\partial t} + \text{div}(\rho_0 V_0 v_s - \mu \text{grad } v_s) \\ &= -\left(\rho_0 \frac{\partial v_0}{\partial r} + \frac{3\mu}{r^2} \right) v_s + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\mu r \frac{\partial v_s}{\partial r} \right) \\ & + \frac{\rho_0 v_{\theta 0}}{r} v_c + \frac{2\rho_0 v_{\theta 0}}{r} v_{\theta s} + \frac{4\mu}{r^2} v_{\theta c} \\ & - \frac{\mu}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r v_{\theta c}) - \rho_0 \frac{\partial v_0}{\partial x} u_s + \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial u_s}{\partial r} \right) \\ & - \rho_s \left(v_0 \frac{\partial v_0}{\partial r} + u_0 \frac{\partial v_0}{\partial x} - \frac{v_{\theta 0}^2}{r} \right) - \frac{\partial p_s}{\partial r} \dots\dots\dots(15) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial(\rho_0 r v_{\theta c})}{\partial t} + \text{div}\{\rho_0 V_0 r v_{\theta c} - \mu \text{grad}(r v_{\theta c})\} \\ &= -p_s - \rho_0 \frac{\partial(r v_{\theta 0})}{\partial r} v_c + \frac{4\mu}{r} v_s + r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\mu}{r} v_s \right) \\ & - \frac{2\mu}{r} v_{\theta c} - \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} (\mu r v_{\theta c}) - \rho_0 v_{\theta 0} v_{\theta s} \\ & - \rho_0 \frac{\partial(r v_{\theta 0})}{\partial x} u_c + r \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\mu}{r} u_s \right) \\ & - \rho_c \left\{ v_0 \frac{\partial(r v_{\theta 0})}{\partial r} + u_0 \frac{\partial(r v_{\theta 0})}{\partial x} \right\} \dots\dots\dots(16) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial(\rho_0 r v_{\theta s})}{\partial t} + \text{div}\{\rho_0 V_0 r v_{\theta s} - \mu \text{grad}(r v_{\theta s})\} \\ &= p_c - \rho_0 \frac{\partial(r v_{\theta 0})}{\partial r} v_s - \frac{4\mu}{r} v_c - r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\mu}{r} v_c \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & -\frac{2\mu}{r} v_{\theta s} - \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} (\mu r v_{\theta s}) + \rho_0 v_{\theta 0} v_{\theta c} \\ & - \rho_0 \frac{\partial(r v_{\theta 0})}{\partial x} u_s - r \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\mu}{r} u_c \right) \\ & - \rho_s \left\{ v_0 \frac{\partial(r v_{\theta 0})}{\partial r} + u_0 \frac{\partial(r v_{\theta 0})}{\partial x} \right\} \dots\dots\dots(17) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \rho_c}{\partial t} + \text{div}(\rho_0 V_c + \rho_c V_0) = -\frac{1}{r} (\rho_0 v_{\theta s} + \rho_s v_{\theta 0}) \\ & \dots\dots\dots(18) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \rho_s}{\partial t} + \text{div}(\rho_0 V_s + \rho_s V_0) = \frac{1}{r} (\rho_0 v_{\theta c} + \rho_c v_{\theta 0}) \\ & \dots\dots\dots(19) \end{aligned}$$

3. 境界条件

以上で計算に必要な運動方程式がすべてそろったことになる。これらの運動方程式をここではコントロールボリューム法を用いて差分式に直し、これを境界条件とともに解くことにより解を求める。ところで振動に関する差分式の定式化には若干の工夫を要するが、これらについては後で述べることにし、まず境界条件について説明する。

数値流体力学を用いて計算する場合には計算領域をどう設定するかが問題となる。この計算では境界条件そのものを順次修正する必要があるため、領域の取り方によっては境界条件の修正精度が低下する。そこでここでは計算したい領域の上流側と下流側に助走区間を十分に取り、境界条件を与えやすい形で計算することにした。

流れの流入部分では次のような境界条件を用いる。

$$\begin{aligned} & v_0=0, \quad v_{\theta 0}=v_{\theta \text{in}}, \quad p_0=p_{\text{in}}, \quad \frac{\partial v_0}{\partial x}=0, \\ & \frac{\partial v_{\theta 0}}{\partial x}=0, \quad \frac{\partial p_0}{\partial x}=0, \quad \frac{\partial k}{\partial x}=0, \quad \frac{\partial \varepsilon}{\partial x}=0 \quad \dots\dots\dots(20) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & v_{c,s}=0, \quad v_{\theta c,s}=0, \quad p_{c,s}=0, \quad \frac{\partial v_{c,s}}{\partial x}=0, \\ & \frac{\partial v_{\theta c,s}}{\partial x}=0, \quad \frac{\partial p_{c,s}}{\partial x}=0 \dots\dots\dots(21) \end{aligned}$$

u_0, u_c, u_s については連続の式から求める。流出部分では $v_{\theta 0}, v_{\theta c,s}$ の取扱いが異なる。

$$\begin{aligned} & v_0=0, \quad p_0=p_{\text{out}}, \quad \frac{\partial v_0}{\partial x}=0, \quad \frac{\partial v_{\theta 0}}{\partial x}=0, \\ & \frac{\partial p_0}{\partial x}=0, \quad \frac{\partial k}{\partial x}=0, \quad \frac{\partial \varepsilon}{\partial x}=0 \quad \dots\dots\dots(22) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & v_{c,s}=0, \quad p_{c,s}=0, \quad \frac{\partial v_{c,s}}{\partial x}=0, \\ & \frac{\partial v_{\theta c,s}}{\partial x}=0, \quad \frac{\partial p_{c,s}}{\partial x}=0 \dots\dots\dots(23) \end{aligned}$$

また u_0, u_c, u_s については流入側と同様に連続の式から求める。

そのほかの部分の境界条件を求めるためには計算対

象とするラビリンスの形式について規定する必要がある。ここでは最も簡単な構造である直通型静止フィンについて計算することにする。フィンおよびケーシングの壁面での境界条件は次のようになる。

$$u_0=0, v_0=0, v_{\theta 0}=0, u_{c,s}=0, v_{c,s}=0, v_{\theta c,s}=0 \quad \dots\dots\dots (24)$$

また壁面が半径方向であるか軸方向であるかに依存してそれぞれ次のような条件を与える。

$$\frac{\partial v_0}{\partial r}=0, \frac{\partial p_0}{\partial r}=0, \frac{\partial v_{c,s}}{\partial r}=0, \frac{\partial p_{c,s}}{\partial r}=0 \quad \text{(半径方向)} \quad \dots\dots\dots (25\cdot a)$$

$$\frac{\partial u_0}{\partial x}=0, \frac{\partial p_0}{\partial x}=0, \frac{\partial u_{c,s}}{\partial x}=0, \frac{\partial p_{c,s}}{\partial x}=0 \quad \text{(軸方向)} \quad \dots\dots\dots (25\cdot b)$$

以上の説明は摂動項について速度を計算する場合を対象として記述したが、加速度の計算を行う場合も同様である。

軸の表面における摂動項の境界条件は摂動が変位、速度、または加速度で異なる。まず同しん状態の境界条件は次のようになる。

$$u_0=0, v_0=0, v_{\theta 0}=v_{\theta \text{rot}}, \frac{\partial v_0}{\partial r}=0, \frac{\partial p_0}{\partial r}=0 \quad \dots\dots\dots (26)$$

摂動が変位の場合には、

$$u_{c,s}=0, v_{c,s}=0, v_{\theta c,s}=0, \frac{\partial v_{c,s}}{\partial r}=0, \frac{\partial p_{c,s}}{\partial r}=0 \quad \dots\dots\dots (27)$$

摂動が速度のときには軸が回転しているためまず加速度の計算を行い、その後で速度の計算を行う必要がある。 r_0 を軸の半径とすれば、加速度の境界条件は、

$$\frac{\partial u_{c,s}}{\partial t}=0, \frac{\partial v_c}{\partial t}=0, \frac{\partial v_s}{\partial t}=-\frac{v_{\theta 0}}{r_0}, \frac{\partial v_{\theta c,s}}{\partial t}=0, \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial v_{c,s}}{\partial t}\right)=0, \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial p_{c,s}}{\partial t}\right)=0 \quad \dots\dots\dots (28)$$

また速度の境界条件は、

$$u_{c,s}=0, v_c=1, v_s=0, v_{\theta c}=0, v_{\theta s}=-1, \frac{\partial v_{c,s}}{\partial r}=0, \frac{\partial p_{c,s}}{\partial r}=0 \quad \dots\dots\dots (29)$$

摂動が加速度のときにもまず加速度の計算を行った後速度の計算を行う必要がある。加速度計算の境界条件は、

$$\frac{\partial u_{c,s}}{\partial t}=0, \frac{\partial v_c}{\partial t}=1, \frac{\partial v_s}{\partial t}=0, \frac{\partial v_{\theta c}}{\partial t}=0, \frac{\partial v_{\theta s}}{\partial t}=-1, \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial v_{c,s}}{\partial t}\right)=0, \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial p_{c,s}}{\partial t}\right)=0 \quad \dots\dots\dots (30)$$

また速度の境界条件は、

$$u_{c,s}=0, v_{c,s}=0, v_{\theta c,s}=0, \frac{\partial v_{c,s}}{\partial r}=0, \frac{\partial p_{c,s}}{\partial r}=0 \quad \dots\dots\dots (31)$$

4. 差分式の求め方

摂動が速度または加速度であれば摂動運動方程式から直接差分式を求めることが可能であるが、摂動が変位のとき、すなわちばね係数を計算するときには工夫を要する。Dietzen & Nordmann⁽⁶⁾はこの問題を座標変換により解決しようとしているがここではFFTを用いる方法について説明する。

軸が偏しんしたときには厳密には三次元問題となる。すなわちコントロールボリュームの形状が変化するので厳密には円筒座標系の問題ではなくなる。しかしながら偏芯量が無限に小さいことを利用して、この影響を近似的に次のような方法で表現することにする。まず軸に隣接したコントロールボリュームに関しては三次元の運動方程式(1)~(4)を用いて差分式を求める。この結果一つのコントロールボリュームで次の形式の差分式が得られる。

$$S_{pn}\phi_{pn}=A_{xpn}\phi_{xpn}+A_{xmn}\phi_{xmn}+A_{ypn}\phi_{ypn}+A_{ymn}\phi_{ymn}+S_{un} \quad \dots\dots\dots (32)$$

ここで、 S 、 A は差分式の係数、 S_u はソースターム、 ϕ は変数を表し、添え字 n は円周方向の変数定義位置の番号である。また x 方向の変数定義位置の番号を i 、 y 方向の変数定義位置の番号を j とすれば、添え字 p は i, j を、 xp を、 $i+1, j$ を、 xm は $i-1, j$ を、 yp は $i, j+1$ を、 ym は $i, j-1$ を表す。たとえば S_{pn} 、 ϕ_{pn} を円周方向のすべてについて計算し、これをあたかも時系列のデータと見なしてFFT処理すれば、同しん状態の項と摂動項に分離できる。

$$\begin{bmatrix} S_{p1} \\ S_{p2} \\ \vdots \\ S_{pN} \end{bmatrix} \rightarrow S_{p0} + e(S_{pc} \cos \theta + S_{ps} \sin \theta),$$

$$\begin{bmatrix} \phi_{p1} \\ \phi_{p2} \\ \vdots \\ \phi_{pN} \end{bmatrix} \rightarrow \phi_{p0} + e(\phi_{pc} \cos \theta + \phi_{ps} \sin \theta)$$

この計算を式(32)のすべての項について行くと摂動項に関して次の差分式を得る。すなわち差分式の段階で円周方向の角度を変数分離することができる。

$$S_{p0}\phi_{pc}=A_{xp0}\phi_{xpc}+A_{xm0}\phi_{xmc}+A_{yp0}\phi_{ypc}+A_{ym0}\phi_{ymc}+S_{uc}-S_{pc}\phi_{p0}+A_{xpc}\phi_{xp0}$$

$$+ A_{xmc}\phi_{xm0} + A_{ypc}\phi_{yp0} + A_{ymc}\phi_{ym0} \cdots \cdots (33)$$

$$\begin{aligned} S_{p0}\phi_{ps} &= A_{xp0}\phi_{xps} + A_{xm0}\phi_{xms} + A_{yp0}\phi_{yps} \\ &+ A_{ym0}\phi_{yms} + S_{us} - S_{ps}\phi_{p0} + A_{xps}\phi_{xp0} \\ &+ A_{xms}\phi_{xm0} + A_{yps}\phi_{yp0} + A_{yms}\phi_{ym0} \cdots \cdots (34) \end{aligned}$$

以上ですべての計算に要する差分式が求められたことになる。ここではコラム法を用いて代数方程式を解いた。

5. 計算結果とその考察

ここでは金光ら⁽⁴⁾の実験例について計算してみた。計算条件を表1に示す。まず同しん状態の流れを計算した結果、当然のことながら流入部分ではポテンシャル流れのようなフローパターンになり、流出部分ではジェットフローのようなフローパターンになった。また流出部分では逆流が現れ、逆流内では境界条件の修正方法がよくわからないので、計算領域を流れが完全に流出する流れになるまで延長して計算している。

この計算で興味のあるのは振動流れの圧力分布である。図2に回転軸表面における圧力分布の計算結果を示す。図の(a)は変位の振動、すなわちばねに関する圧力分布であり、図の(b)は速度の振動、すなわち減衰に関する圧力分布である。図2中にはフィンの位置、同しん状態の圧力分布、振動圧力のcos成分、およびsin成分を示している。この図はパターンを示すことを目的としているので、各圧力間の大きさには意味がない。

まず同しん状態の圧力分布であるが、圧力の低下割合は最初のフィン、および後段部分特に最終のフィンで大きい。これは後段になるほど流速が大きくなることによると考えられるが、いずれにしてもすでに得られている知見と一致する。

変位の振動に関するcos成分(k_{xx} に相当)については従来の知見とはかなり異なったものとなった。同しん状態の流れがフィンに衝突し動圧が静圧に変換される、すなわちスタグネーションポイント的な位置では圧力が低下し、逆に静圧が動圧に変換されるところ、すなわち急増速部分では圧力が上昇した。後者の現象は特に流出部分で著しい。この結果この圧力分布は空洞部分の圧力を測定しただけでは予測不能であることがわかった。しかしながらこの成分はばねのいわゆる主対角項を決める成分であり、ここで目的としている自励振動に関与する度合いは小さい。

変位の振動に関するsin成分(k_{yx} に相当)については従来の知見と一致する。大きな旋回流の流入する前半部分では圧力が負、すなわちふれまわりを加速する力となり、後段では圧力が正、すなわちふれまわりを

表1 計算対象ラビリンスシール

Labyrinth chamber number	21
Labyrinth fin pitch	6 mm
Labyrinth fin thickness	1 mm
Labyrinth fin height	4 mm
Mean clearance width	0.5 mm
Rotor radius	80 mm
Rotating speed	2400 rpm
Inlet pressure	0.294 Mpa
Outlet pressure	0.098 Mpa
Inlet swirl velocity	35 m/s

(a) 変位に関する振動

(b) 速度に関する振動

図2 軸表面の圧力分布

減速する力となる。

速度の振動に関するcos成分(c_{xx} に相当)とsin成分(c_{yx} に相当)で特徴的なことは前者は全段で振動圧力が正の値、また後者は負の値となることである。自励振動にとって重要な減衰の主対角項は全段正の値となる、すなわち振動を抑制する力となる。これらは従来から得られている知見と一致する。いずれにしてもフィンの前後でかなり大きな圧力変動が存在するので精度を高めるためには数値流体力学を応用した計算が必要と思われる。加速度の係数についても計算したがここで計算の対象としている流体が空気であるため、値が小さく議論してみても特に意味がないと思われるので省略する。

6. 結 論

流れの場にある構造物が流れから受ける影響を、微小振動論的な範囲で、ばね、減衰、加速度の各係数で表現するための、数値流体力学を用いた解析手法を示した。直通形静止フィンラビリンスを例として計算を実施し、変位および速度の振動に関する圧力分布をおのおの独立に求め、圧力分布の特徴を調べた。計算結果は、少なくとも自励振動に強く関係する項については、従来からの知見と定性的に一致することがわかつ

た。しかしながら圧力分布はフィンの前後で大きな変動を示していることから、簡単な計算モデルをつくることはなかなかむずかしいといえる。この種の計算は非常に計算時間がかかるので、動特性に関する係数を考察できるほどの計算を行うことができなかった。ここで用いたラビリンスでは段数が多すぎるので、今後より短いものについてこの検討を行うつもりである。またここで計算の対象にした以外のより実用的な形式のラビリンスシールに関する検討も今後行っていく必要がある。

この解析法の特長は各係数をおのおの単独に計算できることにある。特にばねの係数の計算にあたっては、まず三次元の運動方程式から三次元的に差分式を求め、差分式の係数から FFT 処理によって二次元的な差分式に変換している。このような計算手法を用いて

いるため、計算対象の形状がかならずしも円形である必要はなくはん用性が高い。またここでは流体力をばね、減衰、加速度の係数で表現できる場合について計算しているが、伝達関数の形でのみ表現可能な場合にも容易に拡張可能である。

文 献

- (1) Kostyuk, A. G., *Teploenergetica*, **19**-11(1972), 29.
- (2) 岩壺・富田・本岡・川井, 機論, **49**-443, C(1983), 1128.
- (3) Wachter, J. U. and Benckert, H., *Atomkernenergie Bd.*, **32**(1978), 239.
- (4) 金光・大沢・久慈, 機論, **51**-472, C(1985), 3407.
- (5) 岩壺・杉丸・福本, 機構論, No. 910-39, B(1991-7), 202.
- (6) Dietzen, F. J. and Nordmann, R., *4th workshop on rotordynamics instability problems in high performance turbomachinery*, (1986), 351, Texas A & M University.