円筒シェル-集中付加マス系の地震波による パラメトリック励振* (第2報, 解析)

高 柳 政 明^{*1}

Parametric Excitation of Circular Cylindrical Shell-Lumped Mass System Subjected to Horizontal Seismic Wave (2nd Report, Simulation Analysis)

Masaaki TAKAYANAGI

An upright stainless steel circular cylinder with an attached mass at midlength was excited seismically in the horizontal direction using a shaking table to observe parametric excitation (1st Report). In the present report, the parametric excitation of the test cylinder with an attached mass is analyzed. Translational motion of the attached mass in the radial direction or rocking motion of the attached mass about the vertical axis is expanded using the free vibration modes of the circular cylinder without the attached mass. Parametric excitation terms are obtained as the products of in-plane stress due to excitation acceleration and the bending strain of rocking motion or translational motion. Modal equations with respect to the translational motion and the rocking motion are derived which incorporate the parametric excitation terms. Analytical results are compared with experimental results, and show reasonable agreement.

Key Words: Stability, Seismic Motion, Lateral Vibration, Parametric Excitation, Circular Cylindrical Shell, Attached Lumped Mass, Analysis, Newmark- β Time Integration, Incremental Procedure

1. 緒 言

動的不安定現象の一種であるパラメトリック励振が化学プラントや原子力プラントの容器類の耐震設計の観点から注目され、実験あるいは解析による研究^{(1)~(6)}が進められてきた。そこでは上下あるいは水平方向の定常正弦波入力によるパラメトリック励振が研究されており、容器類に関しては地震波によるパラメトリック励振を調べた研究はないようである。

著者らは、円筒シェル-集中付加マス系の、正弦波加振時のパラメトリック励振発生境界の解析方法を実験により検証し⁽⁶⁾、パラメトリック励振項の導出が正しいことを明らかにしている。本研究では、そのパラメトリック励振項と非常ランダム波による時刻歴応答から安定判別する方法を組合せて、地震波のような非常ランダム波によるパラメトリック励振発生境界の解析方法を提案する。また、前報の実験結果⁽⁷⁾と比較して妥当性を検証する。

2. 解 析 方 法

2.1 パラメトリック励振の運動方程式 偏心集中付加マスを有する軸対称シェルの変形を以下のように級数展開する⁽⁸⁾。

$$u = \sum_{l=1}^N (q_{1l} \bar{u}_l \cos n_l \theta - q_{2l} \bar{u}_l \sin n_l \theta) \quad \cdots (1)$$

$$v = \sum_{l=1}^N (q_{1l} \bar{v}_l \sin n_l \theta + q_{2l} \bar{v}_l \cos n_l \theta) \quad \cdots (2)$$

$$w = \sum_{l=1}^N (q_{1l} \bar{w}_l \cos n_l \theta - q_{2l} \bar{w}_l \sin n_l \theta) \quad \cdots (3)$$

$$\delta = \sum_{l=1}^N (q_{1l} \bar{\beta}_l \cos n_l \theta - q_{2l} \bar{\beta}_l \sin n_l \theta) \quad \cdots (4)$$

$$\begin{aligned} \lambda &= (\partial w / \partial \theta - v) / r \\ &= \sum_{l=1}^N \{ (-q_{1l} n_l \bar{w}_l \sin n_l \theta - q_{2l} n_l \bar{w}_l \cos n_l \theta) \\ &\quad - (q_{1l} \bar{v}_l \sin n_l \theta + q_{2l} \bar{v}_l \cos n_l \theta) \} / r \quad \cdots (5) \end{aligned}$$

流体を内蔵する場合は次のように連成振動による変動圧力を級数展開する。

$$p = \sum_{l=1}^N (q_{1l} \bar{p}_l \cos n_l \theta - q_{2l} \bar{p}_l \sin n_l \theta) \quad \cdots (6)$$

ここに、 u, v, w は全体座標系における軸方向、周方向、径方向の並進変位であり、 δ, λ はそれぞれ緯線、中心軸回りの傾き角である。 $\bar{u}_l, \bar{v}_l, \bar{w}_l, \bar{\beta}_l$ は集中マスが付加されていない軸対称シェルの固有振動モード、

* 原稿受付 平成5年3月26日。

^{*1} 正員、(株)日立製作所機械研究所 (〒300 土浦市神立町502)。

$\bar{p}_i$ はそれらに対応する圧力である。これらはリングシェル要素および流体要素を用いて求める。 q_{1i} , q_{2i} は未定係数, n_i は周方向波数である。 θ は周方向にとった角度, r はシェルの半径である。

式(1)~(5)を用いて運動エネルギーとひずみエネルギーおよび加振加速度による慣性力の仕事を表す。それらをラグランジェの式へ代入し, 次式を得る。

$$M^* \ddot{q} + K^* q = F \quad \cdots \cdots \cdots (7)$$

M^* , K^* の成分は文献(8)に示されている。

Bolotin⁽⁹⁾ や Kalnins⁽¹⁰⁾ によればパラメトリック励振の運動方程式は次のように剛性係数に時間変動成分がある形で表せる。

$$M^* \ddot{q} + [K^* - R(t)] q = F \quad \cdots \cdots \cdots (8)$$

ここに, $R(t)$ はパラメトリック励振力の係数マトリックスであり, 時間項を分離すると次式のように表せる。

$$M^* \ddot{q} + [K^* - P(t)R^*] q = F \quad \cdots \cdots \cdots (9)$$

ここに $P(t)$ は不安定モードに対するパラメトリック励振荷重の時刻歴であり, R^* の成分 R_{ij}^* は次式で与えられる。

$$R_{ij}^* = \sum_{k=1}^K \int w_{(i)} (N_s x_{s(j)} + N_\theta x_{\theta(j)} + N_{s\theta(j)} x_{s\theta(j)}) \times r d\theta ds \quad \cdots \cdots \cdots (10)$$

ここに k はシェル要素の番号, $w_{(i)}$ は集中マスがないときの1次の固有振動モードの法線方向ベクトルである。 N_s , N_θ , $N_{s\theta}$ は単位の入力荷重による膜応力, $x_{s(j)}$, $x_{\theta(j)}$, $x_{s\theta(j)}$ は j 次固有振動モードに対応する曲げひずみである。式(9)の解を式(7)の固有ベクトルを用いて級数展開し, モーダル方程式を得る。

$$M^{**} \ddot{Q}(t) + [K^{**} - P(t)R^{**}] Q(t) = F^{**} \quad \cdots \cdots \cdots (11)$$

R^{**} の成分は次式のようになる。

$$R_{ij}^{**} = \sum_{k=1}^K \int \sum_{m=1}^{2N} \sum_{n=1}^{2N} \bar{q}_{(i)}^{(j)} w_{(i)} (N_s x_{s(m)} + N_\theta x_{\theta(m)} + N_{s\theta(m)} x_{s\theta(m)}) \bar{q}_{(m)}^{(j)} r d\theta ds \quad \cdots \cdots \cdots (12)$$

ここで, 集中付加マスのシェル中心軸回りの回転モード(ロッキング)と径方向並進モードだけを考える。ロッキングモードは, 前報⁽⁷⁾でも述べたように今回対象とした試験体では刺激係数が零であり, パラメトリック励振によって現れる。また, それぞれ今回の試験体の1, 2次モードであり, しかも加振振動数範囲にあるモードはこの2種類のみであったことによる。このとき, モーダル減衰比を導入して, 式(11)は次のように書ける。

$$M_1 \ddot{Q}_1 + 2\zeta_1 \Omega_1 M_1 \dot{Q}_1 + (K_1 - Q_2 R_{11}) Q_1 = 0 \quad \cdots (13)$$

$$M_2 \ddot{Q}_2 + 2\zeta_2 \Omega_2 M_2 \dot{Q}_2 + K_2 Q_2 = -F_2 \ddot{X}_g(t) \quad \cdots (14)$$

表1 固有振動数ならびにモーダル減衰比の測定値

Eccentricity mm		L_1	L_2	L_3
Natural	f_1	9.5	9.0	7.5
frequency	f_2	20.0	20.0	19.5
Damping	ζ_1	0.0127	0.0207	0.0095
ratio	ζ_2	0.0034	0.0070	0.0027

f_1, ζ_1 : Rocking motion about vertical axis

f_2, ζ_2 : Translational motion in radial direction

ここに, ζ_1, ζ_2 がモーダル減衰比であり, 表1に実測値を示した。この式を次の時間積分法により解き, 応答値からパラメトリック励振の発生を判断する。

2・2 時間積分法 時間積分法として, 線形系では無条件安定の条件が存在し, 非線形問題でも多くの例題で安定的に解が得られることが知られている Newmark- β 法を用いることとする。また, 運動方程式は増分形式に変換し, 方程式の不平衡力が累積しないよう各ステップごとに反復計算を行う。以下増分形式の Newmark- β 法の主要部分を示す。

$n+1$ ステップの応答は次のように n ステップの結果に増分を加えて得られる。

$$Q_{n+1} = Q_n + \Delta Q \quad \cdots \cdots \cdots (15)$$

$$\dot{Q}_{n+1} = \dot{Q}_n + \Delta \dot{Q} \quad \cdots \cdots \cdots (16)$$

$$\ddot{Q}_{n+1} = \ddot{Q}_n + \Delta \ddot{Q} \quad \cdots \cdots \cdots (17)$$

ここで $\Delta Q, \Delta \dot{Q}, \Delta \ddot{Q}$ は次式により求められる。

$$K^{eff} \Delta Q = \Delta F^{eff} \quad \cdots \cdots \cdots (18)$$

ここに, $K^{eff}, \Delta F^{eff}$ は次のようなものである。

$$K^{eff} = (1/\beta \Delta t^2) M + (\gamma/\beta \Delta t) C + K \quad \cdots \cdots \cdots (19)$$

$$\Delta F^{eff} = \Delta P + M((1/\beta \Delta t) \dot{Q}_n + (1/2\beta) \ddot{Q}_n) + C((\gamma/\beta) \dot{Q}_n + (\gamma/2\beta - 1) \Delta t \ddot{Q}_n) \quad \cdots \cdots \cdots (20)$$

$$\Delta P = F_{n+1} - (M \ddot{Q}_n + C \dot{Q}_n + K Q_n) \quad \cdots \cdots \cdots (21)$$

ここに, M, C, K, F の構成要素は式(13), (14)に与えられている。 ΔQ が求まれば $\Delta \dot{Q}, \Delta \ddot{Q}$ は次式により与えられる。

$$\Delta \dot{Q} = (\gamma/\beta \Delta t) \Delta Q - (\gamma/\beta) \dot{Q}_n - (\gamma/2\beta - 1) \Delta t \ddot{Q}_n \quad \cdots \cdots \cdots (22)$$

$$\Delta \ddot{Q} = (1/\beta \Delta t^2) \Delta Q - (1/\beta \Delta t) \dot{Q}_n - (1/2\beta) \ddot{Q}_n \quad \cdots \cdots \cdots (23)$$

増分計算段階で収束した後, 式(15)~(17)より応答が求まる。ただし, この応答は一般化座標系におけるものであり, 式(1)~(6)により物理座標系に変換する必要がある。

2・3 安定判別法 今回の解析対象である図1に示す試験体では, 集中付加マスの中心軸と加振軸が一致しており, ロッキングモードの刺激係数は零である。このためパラメトリック励振が発生しない限りロ

図1 試験体諸元および計測点

ッキングモードは励起されない。このことにより、実験時と同様、パラメトリック励振発生の判定基準をロッキングモードが励起されたときとする。実際には、時刻歴波形を各加振加速度で調べ、ロッキングモード($\dot{V}$)の成分が生じた段階で発生したものと判定する。

3. 解析結果および試験結果との比較検討

図1に示す円筒シェル-集中付加マス系の振動試験の結果、表1のような固有振動数とモーダル減衰比が得られた。集中付加マスの重心のシェル中央面からの偏心量によりロッキングモードの固有振動数が変化している。これに対し、径方向並進モードの固有振動数はほとんど変化していない。次式で示す両者の比に関するパラメータ α により径方向並進モードの影響の度合いが示される。

$$\alpha = (2f_1/f_2)^2 \quad \dots\dots\dots (24)$$

$\alpha = 0.59, 0.81, 0.90$ になっている。 α が1に近いほど径方向並進モードの影響が大きく(内部共振)パラメトリック励振が生じやすい。 α を1より小さく設定しているのは、前報で述べたように、非定常な地震波によってもパラメトリック励振が生ずる可能性が大きいのは径方向並進モードの固有振動数より低い加振振動数領域であることによる。

シェルの縦弾性係数を206 GPa, ポアソン比を0.3, 密度は 7.8 t/m^3 とし、リングシェル要素を用いて固

表2 固有振動数解析結果

Eccentricity mm		L_1	L_2	L_3
Natural	f_1	9.53	9.03	7.51
frequency Hz	f_2	19.85	19.85	19.85

f_1, ζ_1 : Rocking motion about vertical axis

f_2, ζ_2 : Translational motion in radial direction

有振動解析を行った。重心の偏心量3ケースに対する結果を表2に示す。重心の偏心量は正確には求められないので、ロッキングモードについては固有振動数が実験値と近くなるように回転慣性モーメントを与えている。径方向並進モードの固有振動数が実験値より低い値となっている理由として、集中付加マスとシェルの結合部の面積を省略して点で結合していることなどが考えられる。

3.1 微小かく乱の設定および不安定境界の計算手順

表1に示すモーダル減衰比を用い、前述の方法で応答計算を行う際、初期条件として微小なかく乱を与える。これは、微小なかく乱がないと不安定領域においても計算上は安定な結果となるため、しばしば用いられる方法である。この微小なかく乱が安定判別の精度に悪影響を与えないことを確認するため、図2に示すようにパラメトリック励振発生境界のわずかに下の加振加速度(100 Gal)とかなり上の加振加速度(180 Gal)で、かく乱として不安定モードであるロッキング運動の初期加速度を0.5, 1.0, 2.5, 5.0 Galの4種類設定し、応答の状況を調べた。この範囲のかく乱によって安定判別の結果が変わらないことがわかる。後述のように、この試験条件は最も低い加振加速度でパラメトリック励振が発生する場合であり、微小なかく乱の影響が最も大きいと考えられるケースである。ここで調べた中で最も小さいかく乱0.5 Galを以降の解析でも用いることとする。

次に加振加速度を変えてパラメトリック励振発生境界を求める手順を説明する。図3において、加振加速度180 Gal(不安定), 150 Gal(不安定), 100 Gal(安定), 120 Gal(不安定)と計算し、次に110 Galの加振加速度の計算を行う手前までの結果が示されている。110 Galの結果により、100 Gal(安定)または120 Gal(不安定)との中間の加振加速度の計算へと進む。1%前後の誤差になるまで、収束計算を行う。

3.2 実験結果との比較 前述の考え方に基づいて微小なかく乱を設定し、地震波加振時のパラメトリック励振発生境界を求めた。入力地震波は、自然地震波で最も有名と思われ、解析あるいは実験でしばしば用いられるEl Centro波の時間軸を変えたものである。

(a) $\ddot{X}_g = 100$ Gal (b) $\ddot{X}_g = 180$ Gal

図2 微小かく乱の影響

図3 パラメトリック励振発生境界の計算手順

図4 パラメトリック励振発生境界の比較($\alpha=0.59$)

$\alpha=0.59, 0.81, 0.90$ の3ケースの試験体条件に対し、El Centroの時間軸(=振動数成分)を3種類($\gamma=0.3, 0.4, 0.5$)変えて計9通りの場合を設定した。ここに、 γ はEl Centro波の時間刻み Δt_0 に対する時間軸変更後の波の時間刻み Δt の比である。それぞれの組合せに対し、上述の安定判別法と計算手順に従って加振加速度を変えて解析し、パラメトリック励振発生境界を調べた。その際、入力地震波には、振動台上の測定波(以後、台上測定波と呼ぶ)ではなく振動台への入力信号を用いた。これは、 $\alpha=0.90$ で $\gamma=0.4$ の場合について両者によるパラメトリック励振発生境界がほぼ一致したこと(入力信号:106.2 Gal, 台上測定波:102.5 Gal)、台上測定波に関しては、収録のタイミングが一定しなかったため初期条件として与える微小かく乱の影響もばらつくことによる。

パラメトリック励振が発生したか否かは、時刻歴波

図5 パラメトリック励振発生境界の比較($\alpha=0.81$) 図6 パラメトリック励振発生境界の比較($\alpha=0.90$)

(a) 解析

(b) 実験

図7 パラメトリック励振時の時刻歴波形の比較($\alpha=0.90, \gamma=0.4$)

形を各加振加速度で調べ、ロッキングモード($\dot{V}$)の成分が生じた段階で発生したものと判断した。これは、前述のようにロッキングモードの刺激係数が零であり、パラメトリック励振が発生しない限り、ロッキングモードが現れないことに基づいている。

図4~6にパラメトリック励振発生境界の解析結果と実験結果を示す。これらから次のことがいえる。

① 解析と実験により得られた、それぞれのパラメトリック励振発生境界の加速度は工学的に許容できる範囲で一致している。

② 内部共振に最も近い $\alpha=0.90$ の場合が、実験と同様解析においても、最も低い加振加速度でパラメトリック励振が発生しており、妥当な結果となっている。

また、図7に解析と実験による時刻歴波形の一例を示す。他の結果とも合せて次のことがいえる。

③ 地震波の非定常性のため、不安定振動が発生しても継続時間は短いことが、今回の地震波および試験体に関して、実験および解析により示された。

④ パラメトリック励振による不安定振動が最大となる時刻が実験と解析で異なるが、これは表1に示すように減衰が小さく、応答が大きくなりやすい径方向並進モードの時刻歴波形($\dot{W}$)が実験と解析で差があり、パラメトリック励振発生への影響が異なるためと考えられる。この不安定振動が最大となる時刻のずれは、台上測定波を入力して解析した結果においても変わらない。径方向並進モードの固有振動数を実験値と一致させて解析しても同様である。この原因究明は今後の課題と考える。

4. 結 言

容器類の地震時のパラメトリック励振を評価するための手段として、非定常ランダム波によるパラメトリック励振解析方法を検討し、実験と比較して妥当性を検証した。その結果を要約すると次のようになる。

(1) 軸対称シェル-集中付加マス系の、一般化座標におけるパラメトリック励振の運動方程式を導き、

増分形式のNewmark- β 法により時刻歴応答を解析してパラメトリック励振発生境界を求める方法を考えた。

(2) 前報の9種類の実験条件についてパラメトリック励振発生境界を解析し、実験結果と比較して工学的に許容できる精度であることを確認し、今回提案した解析方法の妥当性を確認した。

(3) パラメトリック励振発生後の不安定領域の時刻歴応答の評価が今後の長期的課題として残るが、本論文の軸対称シェル-集中付加マス系の非定常ランダム波によるパラメトリック励振発生境界の解析方法は、一様状態の液体容器にも適用でき、耐震設計の高精度化に役立つものと考ええる。

最後に、本研究に関し有益な助言をいただいた横浜国立大学の柴田碧教授に感謝の意を表す。

文 献

- (1) 千葉・谷, 鉛直加振による円筒貯槽の動的安定性に関する研究, 機論, 51-471, C(1985), 2980.
- (2) Chiba, M., Tani, J., ほか2名, Dynamic Stability of Liquid-Filled Cylindrical Shell under Horizontal Excitation, *J. Sound Vib.*, 104-2(1986), 301.
- (3) 谷・ほか2名, 流体連成二重円筒殻の動的安定性, 機論, 55-512, C(1989), 870.
- (4) Liu, W. K. and Uras, R. A., Transient Buckling Analysis of Liquid-Storage Tanks-Part I: Theory, *ASME PVP*, 157(1989), 35.
- (5) Takayanagi, M. and Yamate, Y., Parametric Resonance of an Axisymmetric Shell-Lumped Weight System, *JSME Int. J., Series III*, 33-2(1990), 198.
- (6) Takayanagi, M., Parametric Resonance of Liquid Storage Axisymmetric Shell Under Horizontal Excitation *Trans. ASME, J. Press. Vessel Technol.*, 113-4(1991), 511.
- (7) 高柳, 円筒シェル-集中付加マス系の地震波によるパラメトリック励振(第1報, 実験), 機論, 59-562, C(1993), 1665.
- (8) 高柳・ほか3名, 偏心集中付加質量を有する軸対称シェルの振動, 機論, 56-528, C(1990), 2040.
- (9) Bolotin, V. V. (近藤・中田訳), 弾性系の動的安定, (1972), 356, コロナ社.
- (10) Kalnins, A., Dynamic Buckling of Axisymmetric Shells, *Trans. ASME, J. Appl. Mech.*, 96-4(1974), 1063.