平歯車対の歯元応力に及ぼす歯底油穴の影響*

高橋 秀雄*¹, 石川 晴雄*²Effects of Hole at Bottom Land on Tooth Root Stress
of Spur Gear Pair

Hideo TAKAHASHI and Haruo ISHIKAWA

Sometimes, holes at the bottom land of gears are made for lubrication of the gear systems, such as in manual transmission where the needle bearing is used between the gear and shaft. In the present study, a pair of spur gears with a hole at the bottom land is analyzed by a three-dimensional finite element method. The distributions of the tooth root stress and the tangential stress at the periphery of the hole are obtained. The effects of the diameter of the hole and its position along the tooth width direction on the distributions are investigated under the loading conditions of a concentrated force and two kinds of gearing with uniform and partial contacts.

Key Words: Gear, Automobile, Tooth Root Stress, Numerical Analysis, Contact Problem

1. 結 言

歯車の歯元応力については数多くの研究結果が発表されている⁽¹⁾。しかし、歯車の使用条件により歯元応力に及ぼす要因が多岐にわたり、また複雑であるために、歯車の設計に対して十分な資料があるとは言えない。例えば、自動車用常時噛みあい式手動変速機などに使用される歯車には多くの場合、歯車と回転軸の間にある針状ころ軸受への給油目的のために、歯車のボス端面に油溝を施すと共に歯底に油穴を設けることが多い(図1)。この油穴を設けたことを起因とする歯の折損も実用上一つの問題である。しかし、このような歯底に油穴を有する歯車の歯元応力についての報告はあまりないようである。

本研究では、歯底に油穴を有する歯車の歯元応力を総合的に検討する第1段階として対象歯車を平歯車とし、油穴の直径および歯幅方向での位置の影響について三次元有限要素法による弾性計算を行った。荷重条件は、集中荷重、等分布荷重および片当たり荷重のそ

れぞれが作用する場合である。三次元解析は、著者らがすでに報告した歯車の片当たり接触問題の計算方法⁽²⁾⁽³⁾を用いて、片当たり接触条件下で噛みあっている場合を中心に行った。集中荷重および等分布荷重条件については、実験結果と比較した。その結果、油穴の直径と位置の歯元応力に対する影響について、いくつかの新しい傾向を見いだしたのでここに報告する。

2. 解 析 条 件

本研究で用いた片当たり接触条件下での解析方法は前報⁽²⁾で提案した方法であり、その特徴は以下のとおりである。

(1) 噛みあっている歯車対の三次元有限要素解析に必要な膨大な計算機容量を大幅に減少できる。

(2) 通常の弾性問題解析用プログラムを変更せず可以使用。

図1 変速機内の歯車

* 原稿受付 平成5年7月19日。

*¹ 正員, 木更津工業高等専門学校 (〒292 木更津市清見台東2-11-1)。*² 正員, 電気通信大学 (〒182 調布市調布が丘1-5-1)。

(3) 有限要素法なので、種々の歯車に適用可能である。

(4) 線接触, 面接触状態の解析が可能である。

このような特徴をもつ本手法に対して, 本研究では平歯車対の線接触状態を解析対象とした。図2に示す解析手順に従って, 解析方法の概略を説明する。まず, 歯形を機構学的計算により求めたのちに三次元に要素分割する。次に, 接触領域を指定しその領域内にあるそれぞれの節点に k 方向 ($k=X, Y, Z$) 単位荷重を負荷したときの各節点の l 方向 ($l=X, Y, Z$) 変位を有限要素法により解析し, 各歯車の節点ごとのコンプライアンスマトリックス $[C]$ (変位と荷重の関係) の成分を求める。このマトリックス $[C]$ を用いて接触領域内の反力分布 $[P_{ix}, P_{iy}, P_{iz}]$ (ただし, i は接触領域内節点数 n の内の任意の点) を接触点における力の釣合いと変位の連続条件の基で求め, この反力分布を境界条件として各歯車について有限要素解析を行う。

また, 片当たりの原因として歯すじ方向誤差を考え, 表1に示すような歯すじ方向誤差の許容値 ε を JIS 規格に基づいて求めた。実際には, この歯すじ方向誤差をかみあい誤差 (図3) として取扱うため, 反力分布を求めるマトリックス $[C]$ の成分の計算過程でこの点を考慮した。したがって, 所定の歯すじ誤差と接触領域を指定した場合の法線荷重 F_N は, 接触領域の反力分布 $[P_{ix}, P_{iy}, P_{iz}]$ を用いれば次式で表せる。

$$F_N = \sum_{i=1}^n (P_{ix}^2 + P_{iy}^2 + P_{iz}^2)^{1/2} \dots\dots\dots (1)$$

ただし, n は接触領域内の節点数である。

2・1 歯車諸元と油穴の定義 油穴直径および歯幅方向での油穴位置の影響を調べるために表2に示すような基本諸元の平歯車を設定した。この小歯車と大歯車は, それぞれ大型車用手動変速機の後進速の2段

目にあたるカウンタリバースギヤとリバースアイドルギヤのかみあいとほぼ似た関係になっている。また, 大歯車の歯底部分には, 図4に示すように直径 d_h と歯幅中央の点 O' を原点とした位置 S を有する油穴を表3に示す寸法で設定し, その左側の欄のように表示した。すなわち, $S=0$ mm の場合は油穴中心が歯幅中央であり, $S=-4$ mm の場合は, 片当たりの強い方向 (図3の左方向) または集中荷重が加わっている側へ油穴中心が4 mm ずれている条件を示し, $S=4$ mm の場合は, それらの逆方向へ油穴中心が4 mm ずれている条件を示す。また, 等分布荷重の場合は, $S=-4$ mm と4 mm における条件は等価である。これらの大歯車を用いて表2の小歯車とかみあっている場合について解析した。

表1 歯すじ誤差

Face width b (mm)	20			
Grade	0	2	4	8
Lead error ε (μ m)	7.56	9.60	15.0	37.8

表2 歯車諸元

	pinion	gear
Module m (mm)	4.5	
Number of teeth z	16	24
Addendum modification coefficient x	0.8635	-0.5
Face width b (mm)	20	
Cutter pressure angle α_c (degree)	20	
Center distance a (mm)	91.5	
Operating press. angle α_w (degree)	22.44	
Dia. of base circle d_b (mm)	67.658	101.487
Dia. of generating pitch circle d_g (mm)	72	108
Dia. of intermeshing pitch circle d_{bi} (mm)	73.2	109.8
Dia. of tip circle d_k (mm)	88.8	112.5

図2 解析手順

図3 かみあいの誤差

図4 d_h と s の定義

表3 d_h と s の関係

	Diameter d_h (mm)	Position s (mm)
0-0	0	0
2-4	2	-4
2-0		0
2+4		4
3-4	3	-4
3-0		0
3+4		4
4-4	4	-4
4-0		0
4+4		4
5-4	5	-4
5-0		0
5+4		4

2.2 荷重と荷重点位置 荷重は、集中荷重、等分布荷重および片当たり接触条件での荷重の3条件とした。すべての荷重条件に対し、歯形方向の荷重点位置は1歯かみあいから2歯かみあいに移行する最悪荷重点とした。実際には、解析対象歯車の外側最悪荷重点と相手歯車の内側最悪荷重点がかみあっている条件とした。したがって、荷重点位置は解析対象歯車の外側最悪荷重点となる。また、集中荷重の場合の歯すじ方向の荷重点位置は、端面より4 mmの位置とした。荷重の大きさは、集中荷重の場合は歯面法線方向に $F_{NC} = 8600 \text{ N}$ とした。等分布荷重の場合は単位幅当り $F_{NU}/b = 430 \text{ N/mm}$ とした。したがって、集中荷重 F_{NC} と等分布荷重の総計 F_{NU} は共に 8600 N である。また、片当たり接触条件での荷重については、図3に示すような歯すじ方向のかみあい誤差を考え、表1の歯すじ誤差を設定した。解析時の法線荷重 F_N は式(1)により得た値を用いたが、その値は歯すじ誤差、接触幅、油穴などの条件によりそれぞれ異なる。そこで、伝達トルクを同一にする目的で式(2)に示すような法線荷重 F_{CN} を設定する。

$$F_{CN} = F_N + F_{NU} \dots\dots\dots (2)$$

ただし、 F_N は式(1)により法線荷重、 F_{NU} は伝達トルクを同一にする目的で重ね合わせた等分布荷重である。

2.3 応力計算方法と計算位置 応力は、図5、6に示すような油穴の縁に沿った接線応力、 σ_{t-h} と歯形方向の接線応力 σ_t を求めるとすると、 σ_{t-h} は次式で与えられる。

$$\sigma_{t-h} = \sigma_x l^2 + \sigma_y m^2 + \sigma_z n^2 + 2(\tau_{xy} lm + \tau_{yz} mn + \tau_{zx} nl) \dots\dots\dots (3)$$

ここで、 x, y, z は図5に示す座標方向、 l, m, n は油穴の縁の接線 t が座標方向となす方向余弦であり次式で表せる。

$$l = \cos \theta_1, m = \cos \theta_2, n = \cos \theta_3 \dots\dots\dots (4)$$

今回の解析に用いた要素は20節点アイソパラメトリ

ック要素であるため、歯車表面の (x, y, z) 座標は無次元座標 $\xi (-1 \leq \xi \leq 1)$ を用いると次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} x(\xi) &= \phi_1(\xi)x_1 + \phi_2(\xi)x_2 + \phi_3(\xi)x_3 \\ y(\xi) &= \phi_1(\xi)y_1 + \phi_2(\xi)y_2 + \phi_3(\xi)y_3 \\ z(\xi) &= \phi_1(\xi)z_1 + \phi_2(\xi)z_2 + \phi_3(\xi)z_3 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (5)$$

ただし、 ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 は形状関数で ξ とは次の関係がある。

$$\left. \begin{aligned} \phi_1(\xi) &= \xi(\xi-1)/2 \\ \phi_2(\xi) &= (1-\xi)(1+\xi) \\ \phi_3(\xi) &= \xi(\xi+1)/2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (6)$$

ここで、 (x_i, y_i, z_i) は要素の節点 $G_i (i=1, 2, 3)$ の座標であり、式(3)を用いると油穴の縁の接線方向角度 $\theta_i (i=1, 2, 3)$ は

$$\left. \begin{aligned} \cos \theta_1 &= (dx/dt)/(dt/d\xi) \\ \cos \theta_2 &= (dy/dt)/(dt/d\xi) \\ \cos \theta_3 &= (dz/dt)/(dt/d\xi) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (7)$$

より求まる。油穴の縁に沿った接線応力 σ_{t-h} を求めた範囲は、荷重を加えた歯側の半円周部分である。また、歯形方向の接線応力 σ_t は図6に示すように $y-z$ 平面内について求めた。したがって、式(4)の方向余弦の関係から式(3)を変形した次式を用いた。

$$\sigma_t = \sigma_y \cos^2 \theta + \sigma_z \sin^2 \theta + \tau_{yz} \sin 2\theta \dots\dots (8)$$

ただし、 $\theta = \theta_2$ でありこの歯形曲線接線方向角度 θ は

$$\tan \theta = (dz/d\xi)/(dy/d\xi) \dots\dots\dots (9)$$

より求まる。歯元応力を求めた点の数は、歯元付近の歯形に沿った4要素で、各要素について5点の合計20点とした。これらの点で θ 方向接線応力 σ_t を求め歯すじ方向の応力分布を求めた。

2.4 要素分割および拘束条件 要素分割を行うにあたり、表3の油穴4-4、4-0、4+4の歯車および油穴のない0-0の歯車について、軸直角断面(歯すじ方向に直角な断面)の分割数の応力分布に与える影響について検討した例を図7(a)、(b)に示す。荷重条件は、油穴のない0-0の歯車に対しては等分布荷重

図5 油穴の縁に沿った接線応力

図6 歯形方向の接線応力

条件とし、その結果と ISO-B 法⁽⁴⁾ による歯元応力の計算値とを比較した。油穴のある歯車に対しては、等分布荷重条件および片当たり接触条件とし、油穴の縁に沿った最大接線応力の収束の程度を調べた。等分布荷重条件は、歯幅全体 ($b=20\text{ mm}$) に $8\,600\text{ N}$ を加えた場合である。また、片当たり接触条件は、JIS 8 級の歯すじ誤差で歯幅全体が接触した場合であり、式 (2) による法線荷重 $F_{CN}=8\,600\text{ N}$ である。図 7 (a), (b) の縦軸は、それぞれ 2・3 節の方法で求めた油穴の縁に沿った接線応力 σ_{t-h} と歯形方向の接線応力 σ_t の最大値である。歯幅方向の分割数は、片当たり接触幅 b_c を歯幅 b に対して 5 種類設定 ($b_c/b=0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1.0$) し、油穴の分割を細かくする目的で 6 層とした。したがって、油穴のない場合の全要素数は、軸直角断面内の要素数 $\times 6$ となる。図 7 (a) より、軸直角断面の分割数 117 (三次元で 702) 程度で油穴の縁に沿った接線応力の最大値が収束していることがわかる。図 7 (b) より、歯形方向の接線応力の最大値は十分に収束していることがわかる。また、等分布荷重条件における ISO-B 法⁽⁴⁾ による歯元応力の計算値 (破線) と比較的好く一致している。この結果に基づいて要素分割した例を図 8 に示す。拘束条件は、図 8 の $\overline{AB}$ および $\overline{CD}$ 上にある節点に対し歯幅全体にわたって X, Y, Z 軸方向を拘束した。

3. 実験方法

3.1 実験装置および方法 図 9 に示すような実験装置を万能引張試験機に組み込み、外側の最悪荷重点位置に加圧した。集中荷重条件の場合は、図 10 に示すように玉軸受 # 608 の鋼球をはさみ込む方法とした。

図 7 油穴に沿った最大接線応力および最大歯元応力と要素数の関係

3.2 試験歯車および応力測定位置 試験歯車は、表 2 の諸元をもつ大歯車であり、S 45 C 調質材をホブ切りした後、歯面最終仕上げとして研削を施し精度は JIS 0~1 級であった。また、歯面近傍での硬さは約 H_v280 であった。この試験歯車の Hofer の 30° 接線法により求まる危険断面位置にひずみゲージ (ゲージ長 2 mm) を取付け応力を測定した。

4. 解析結果および実験結果

4.1 集中荷重の場合 集中荷重を加えた場合の歯形方向接線応力の各点 ($q_1 \sim q_7$) の解析結果の値をその点の法線方向に示すと図 11 のような分布となる。このような応力分布図 (解析結果) を歯幅方向の各断面において求めた結果によれば、油穴の近傍を除いて、歯形方向の最大接線応力は Hofer の 30° 接線法によ

図 8 三次元有限要素モデル (油穴条件 4-0 の場合)

図 9 実験装置

図 10 負荷方法

図 11 軸直角断面での歯元応力分布

り求まる危険断面位置の近傍(点 q_5 の位置)に発生していた。そこで、歯すじ方向の各断面における歯形方向接線応力の点 q_5 での値の歯すじ方向分布を求めた(図 12)。油穴を施したことにより歯車の剛性変化が生じたために歯すじ方向応力分布に揺らぎが生じている。図 12 中の実験点は、歯元にひずみゲージを接着して得た結果の一例である。実験点は若干小さい値を与えている。これは、ひずみゲージのゲージ長の平均値とも思えるが詳細は不明である。しかし、この範囲内の計算結果は、実験結果とおおむね一致していた。この傾向は、すべての油穴に対して同様であった。

4.2 等分布荷重の場合 図 13($s=0$ mm) および図 14($s=4$ mm) に等分布荷重条件において、油穴直径を変化させた場合の歯すじ方向応力分布の計算値と実験結果を示す。計算による歯形方向の最大接線応力は、油穴の近傍を除いて集中荷重の場合と同様に Hofer の 30° 接線法により求まる危険断面位置の近傍に発生していた。そこで、4.1 節と同様に図 11 の点 q_5 の位置での歯形方向接線応力の歯すじ方向分布を求めた。油穴直径が小さい場合は、接線応力の変動は小さいが直径の増加に従って変動量が大きくなることがわかる。また、図 14 からわかるように油穴の位置の歯幅中心からのオフセットにより接線応力の最大値が剛性の高い位置(b_w が小さい方向)へと移動する傾向があり、その値も増加している。また、図 13, 14 には実験点(Meas.)も示している。計算結果と傾向はおおむ

ね一致しているが、計算結果よりやや大きい値となっている。これは、実験における荷重の位置や方向の誤差、試験歯車の歯すじ誤差などが影響を与えているものと思われる。図 15 に油穴の縁に沿った接線応力の分布を示す。図ではわかりづらいが、油穴が歯幅中央にある場合は、応力分布が左右対象となりその最大値は歯底近傍の●で示した部分に生じるのに対し、油穴が歯幅中央からずれる場合は、剛性の高い側(油穴の図の左側の●で示した部分)に最大値が発生する。この傾向は、歯形方向の接線応力の歯すじ方向分布と同様である。

このようにして求めた油穴の縁に沿った接線応力の最値および歯形方向の接線応力の歯すじ方向応力分布の最大値と油穴直径の関係を図 16, 17 に示す。ただし、図 17 の●で示した点は油穴のない場合の値である。図 16 より、油穴の縁に沿った接線応力の最大値は、直径が比較的に小さい場合に位置の影響を受ける場合がある。また、図 17 より、歯すじ方向の歯形方向接線応力の最大値に対する油穴直径および位置の影響は比較的に小さい。図 16 と図 17 を比べると応力の絶対値は油穴の縁に沿った接線応力のほうが大きいので、強度的にはこちらのほうが危険になるものと思われる。

4.3 片当たり条件の場合 前報⁽²⁾の方法により歯元応力の傾向について表 3 の油穴 4-0 の場合を例に説明する。油穴近傍以外の歯形方向の最大接線応力は Hofer の 30° 接線法(図 11)により求まる危険断面位置の近傍に発生していた。そこで、4.2 節までと同様

図 12 点 q_5 の歯元応力の歯すじ方向分布 (油穴条件 5-0 の場合)

図 13 等分布荷重条件下での点 q_5 の歯元応力の歯すじ方向分布 (油穴が歯幅中央にある場合)

図 14 等分布荷重条件下での点 q_5 の歯元応力の歯すじ方向分布 (油穴が歯幅中央よりずれている場合)

にして歯すじ方向の各断面における歯形方向接線応力(計算値)の点 q_5 での値の歯すじ方向分布を油穴直径が 4 mm の場合について図 18(b)~(d)に示す。また、図 18(a)は、油穴のない歯車の場合である。片当たりの条件は表 1 の歯すじ誤差の等級が 8 級で片当たり接触幅を変化させた場合である。ただし、接触幅 $b_c = 20$ mm の場合は式(2)による F_{CN} を 8 600 N とした計算結果であり、 $b_c = 4 \sim 16$ mm の場合は式(1)による F_N を用いた計算結果である。接触幅が歯幅全体にわたる場合、最大接線応力は歯の端面よりやや内側に発生している。しかし、歯幅に対する接触幅の割合が減少するに伴い最大応力発生点は歯の端面に近づく傾向が見られた。また、図 18(c)は直径 4 mm の油穴が歯幅中心に開けられている場合である。接触幅が大

きい場合、油穴により歯車の剛性変化が生じた結果、応力分布が揺らいでいる。図 18(b), (d)は、それぞれ油穴中心位置が歯幅中心より 4 mm, 片当たりの強い方向へずれた場合と弱い方向へずれた場合である。同様に、油穴付近で応力分布の揺らぎが生じている。油穴の位置を変えても歯元応力の値はあまり変化しない傾向にあり、またその値は油穴のない場合 [図 18(a)] と大体同じになっている。図 19(a)~(c)に s を一定にした場合の歯形方向接線応力の歯すじ方向分布に対する油穴直径の影響を示す。片当たりの条件は、図 18 の場合と同様である。応力分布の揺らぎは、油穴の位置に関わらず直径が 5 mm の場合が最も大きく、直径 3 mm, 4 mm の場合と比較すると応力分布の形も異なった傾向を示している。直径が 5 mm の場合は σ_t の最大値が直径 4 mm と 3 mm の場合に比べて少し大きくなる傾向にある ($s = -4.0$ と 0 の場

図 15 油穴の縁に沿った接線応力の分布 (等分布荷重の場合)

図 16 油穴の縁に沿った最大接線応力と油穴直径の関係 (等分布荷重の場合)

図 17 点 q_5 における最大歯元応力と油穴直径の関係 (等分布荷重の場合)

図 18 片当たり条件下での点 q_5 の歯元応力の歯すじ方向分布 (接触幅の影響)

合)。このようにして求めた歯形方向接線応力の歯すじ方向分布の最大値と油穴直径の関係を図 22 に示す。その最大値はほとんど変化せず油穴直径が 5 mm で片当たりの強い方向に位置する場合 ($s = -4.0$) と歯幅中央に位置する場合 ($s = 0$) のみ約 10% 程度の上昇が認められた。油穴の縁に沿った接線応力の分布を図 20 に示す。最大応力は、片当たりの強い側の歯底近傍に発生している。このようにして求めた油穴の縁に沿った接線応力の最大値と油穴直径の関係を図 21 に示す。すべての油穴位置において油穴直径の減少に伴い応力値が増加している。これは、油穴直径が小さくなって、その部位の剛性が高くなり応力値が増加したものと思われる。また、片当たりの強い方向へ油穴を開けた場合に応力値が大きくなり、直径 2 mm の場合は $s = 0$ から $s = -4.0$ への場合の増加が大きい結果を得た。ま

た、図 21, 22 より歯形方向の接線応力より油穴の縁に沿う接線応力のほうが大きな値になる傾向にあり、強度的に問題になる可能性がある。図 23, 24 に接触幅 $b_c = 20$ mm の場合の歯すじ方向分布の最大値および油穴の縁に沿った接線応力の最大値と歯すじ誤差の関係を示す。図 23, 24 中の F_N は式 (1) による値であり、歯幅全体に接触するための荷重で油穴条件等により異なるため具体的な数値の記入は省略した。 F_{CN} は式 (2) により等分布荷重を重ね合せ $F_{CN} = 8600$ N とした。図 23, 24 より歯すじ誤差の増加に伴い最大値は直線的に増加している。

5. 結 言

本来、歯車のかみあいに関係しない歯底部分に油穴を有する歯車の歯元応力を対象歯車を平歯車とし、油

図 19 片当たり条件下での点 q_s の歯元応力の歯すじ方向分布(油穴直径の影響)

図 20 油穴の縁に沿った接線応力の分布(片当たり接触条件の場合)

図 21 油穴の縁に沿った最大接線応力と油穴直径の関係 (片当たり接触条件の場合)

 図 22 点 q₆ における最大歯元応力と油穴直径の関係 (片当たり接触条件の場合)

穴直径および歯幅方向での油穴位置の影響について三次元有限要素法による解析を行った。また、荷重条件としては、集中荷重、等分布荷重および片当たり接触荷重を選び、これらの影響についても検討を加えた。その結果、今回の計算の範囲内では、油穴による歯車の剛性変化により歯形方向接線応力の歯すじ方向分布に揺らぎが発生するが、その最大値は油穴の大きさや位置にあまり影響を受けないことを示した。また、油穴近傍の応力について検討し、油穴直径と位置による応力変化の傾向を示すとともに、その値の絶対値は歯形方向接線応力より大きくなる傾向にあることを見いだした。終りに日頃より種々御指導をいただいている、電気通信大学 成瀬長太郎教授に深く感謝すると共に本研究の数値計算に協力してくれた木更津工業高等専

図 23 油穴の縁に沿って最大接線応力と歯すじ誤差の関係 (片当たり接触条件の場合)

 図 24 点 q₅ における最大歯元応力と歯すじ誤差の関係 (片当たり接触条件の場合)

門学校卒研 時谷典央、渡邊直哉の両君に感謝の意を表す。

文 献

- (1) 例えば Tobo, T., ほか 2 名, *Trans. ASME, J. Mech. des.*, **100** (1978), 374-381.
- (2) 石川・小島, 機論, **54**-503, C (1988), 1552.
- (3) 高橋・石川, 機論, **57**-535, C (1991), 246.
- (4) ISO/TC, *60-GEARS, SECOND DRAFT PROPOSAL* ISO/DP, 6336/111, (1983).