定常振動問題の解と安定判別のための数値解法とプログラム*

田村 英之^{*1}, 松崎 健一郎^{*2}Numerical Scheme and Program for the Solution and Its Stability Analysis
for a Steady Periodic Vibration Problem

Hideyuki TAMURA and Ken-ichiro MATSUZAKI

A steady-state periodic solution is essential in the study of the vibration theory. A new computer-aided scheme to determine the periodic solution and its stability is discussed, which is a remarkably precise, speedy and powerful method pursuing some classical schemes with the same aim, e.g., the famous harmonic balance method. Since the algorithm consists of a purely numerical procedure, the scheme is very effective for cases in which it is difficult to find steady solutions when employing conventional analytical methods. The scheme is based on a particular conception to determine the specific initial conditions which generate only steady-state solutions without transients. The specific initial conditions are computed by iteration applying a certain improving strategy using the Newton-Raphson method and numerical integration, e.g., the RKG scheme for the relevant differential equations. Illustrated examples are provided, which demonstrate the convergence of successive trajectories in a phase plane. A full listing of the program is accompanied by its instruction manual.

Key Words: Dynamics of Machinery, Steady Periodic Solution, Stability, Numerical Scheme, Computer Program, Forced Vibration, Self-Excited Vibration

1. 緒 言

振動問題における定常振動解(周期解)の特別な意義はいまさら多言を費やすまでもない。特に非線形振動論では、古来、初期値問題はほとんど黙殺され、調和バランス法、摂動法、平均法など独特の計算法⁽¹⁾はすべて定常振動解を対象に発達してきた。

今日でもこれらの手法は根強い人気があるものの、精度的には時代遅れであり、もともと(電子)計算機のなかった時代の産物であるのも周知の事実である。

逆に、最も今日的な計算機を用いて非線形振動問題を解くとすれば、調和バランス法が最も計算機向きだとの認識⁽²⁾はありながらも、シミュレーション(初期値問題)的解法が最も安易であり、古典的な概念⁽¹⁾からは想像を絶する高精度の解が容易に入手できる。

しかし、シミュレーションは定常振動解の思想と根本的に対立するものであって、単純に初期値問題を延長して定常振動解を求めるのは極めて非能率的であり(原理的には無限の時間を要する)、条件次第では定常解に到達しないことも珍しくない。

この両者の特長を両立させて、初期値問題の飛越的な区分接続により定常振動解に速やかに到達しようとするのが本報告の手法のねらいである。その着想は四半世紀前に提案⁽³⁾されており、おもに電子工学、機械工学、応用数学関連の研究者^{(2)~(8)}によってしだいに改良が重ねられ、現在では非線形振動問題の一部の研究分野で愛用されているように見受けられる。非線形と限らず、振動問題における定常振動解の意義は揺らぐはずがないだけでなく、現在、カオス問題などでは、不安定な定常振動解さえも重要な手がかりとして注目探査されている。

その一方で、今や計算機は計算センタを出て身近な存在(いわゆるパソコンなど)となり、その利用が常とう化し即座に解が入手できる…となれば、数値解しか得られない、電気が問題を解く…などと言う宿命的難点も気にならなくなり、サイボーグ風の解析手法も市民権を獲得する時節が到来したように思われる。

本報告は、このような視点に立つて、上述した調和バランス法ほかの手法⁽¹⁾と同工ながら、飛躍的に強力な“定常振動解を求め、その安定性をも判別するための数値処理を基調とする簡明な手法”について、アルゴリズム^{(2)~(8)}の総括とともに、一プログラムを提案し、啓蒙解説的な例題を紹介するものである。

* 原稿受付 平成5年6月28日。

^{*1} 正員, 九州大学工学部 (〒812 福岡市東区箱崎 6-10-1)。^{*2} 正員, 九州大学大学院。

2. 基礎式

次の1階連立常微分方程式を取り扱う。

$$\left. \begin{aligned} dx/dt &= X, \\ t &: \text{独立変数(実スカラー)}, \\ x &\equiv (x_1 \ x_2 \ \cdots \ x_n)^T \\ X &\equiv (X_1 \ X_2 \ \cdots \ X_n)^T \end{aligned} \right\} : n \text{次元ベクトル} \quad \cdots (1)$$

肩号“T”は転置を表す(以後同様)。式中のXは

$$\left. \begin{aligned} X &= X(x); \text{(自律系)}, \text{または} \\ X &= X(x, t); \text{(非自律系)} \end{aligned} \right\}$$

とするが、以下の議論では特に断るまで両者の区別を必要としない。式(1)の周期解 $x(t)$ を見出すことは、周期 $(t=T)$ に対して、 $x(0)=x(T)$ を満足するような $x(0)$ を決定するのと等価である。 $x(0)$ のほかに T も未知数に含めることができ、やや複雑ながら、この問題を2点境界値問題(ねらいうち法⁽⁹⁾ shooting method)の一種と見ることもできる。

3. 定常振動解

まず、基礎式(1)に対して、適当な二通りの初期条件： ξ^0 (既知)、 $\xi^0 + \delta\xi^0$ (ただし $\|\delta\xi^0\| \sim 0$)を与えた場合の解を次のように表す。

$$\left. \begin{aligned} x(t) &= \xi(t); \ x(0) = \xi^0 \\ x(t) &= \xi(t) + \delta\xi(t); \ x(0) = \xi^0 + \delta\xi^0 \end{aligned} \right\} \quad \cdots (2)$$

これらを式(1)に代入し線形近似により $\delta\xi$ を分離すると次式を得る。

$$\left. \begin{aligned} d(\delta\xi)/dt &= Y\delta\xi, \text{ただし} \\ Y &\equiv \frac{\partial X}{\partial x} \Big|_{x=\xi} = [Y_{ik}] \\ &: \text{ヤコビアン行列}(n \text{次正方行列}), \\ Y_{ik} &= \partial X_i / \partial x_k : Y \text{の} i \text{行} k \text{列成分} \end{aligned} \right\} \quad \cdots (3)$$

これは、原式(1)の変分方程式である。一般に、この形の方程式⁽¹⁰⁾(Yは適当な関数行列としてよいが、ここではX, ξ に依存する)の解は、初期条件 $\delta\xi(0) = \delta\xi^0$ に対して次のように解かれる。

$$\delta\xi = \Phi(t)\delta\xi^0, \text{ただし } \Phi: n \text{次正方行列} \cdots (4)$$

ここに遷移行列⁽¹⁰⁾ $\Phi(t)$ は次式の解である。

$$\left. \begin{aligned} d\Phi/dt &= Y(X, \xi)\Phi, \\ \Phi(0) &= E: n \text{次単位行列} \end{aligned} \right\} \quad \cdots (5)$$

$\delta\xi(t)$, $\Phi(t)$ はYを通じて ξ^0 に依存する。

さて、適当に選んだ初期条件： ξ^0 , $\delta\xi^0$ と T [解 $x(t)$ の周期の近似値]に対する $\xi(T)$, $\delta\xi(T)$ が計算可能として、適当に選んだ $t = T + \delta T$ において次の関係(周期解条件)が成立するものと仮定する。

$$\xi(T + \delta T) + \delta\xi(T + \delta T) = \xi^0 + \delta\xi^0 \quad \cdots (6)$$

これから適当な解 $\xi(t) + \delta\xi(t)$ の周期が $T + \delta T$ とな

るような $\delta\xi^0$ と δT を解くと、結局、周期解 $\xi(t)$ に対応する初期条件と周期が決定されることになる。

式(6)の左辺を線形近似すると

$$\xi(T) + \frac{\partial \xi}{\partial t} \Big|_{t=T} \delta T + \delta\xi(T) + \frac{\partial(\delta\xi)}{\partial t} \Big|_{t=T} \delta T = \xi^0 + \delta\xi^0 \quad \cdots (7)$$

式(1), (3), (4)の形を利用して変形すると

$$\begin{aligned} [(E + Y\delta T)\Phi(T) - E, X][(\delta\xi^0)^T, \delta T]^T \\ = \xi^0 - \xi(T) \quad \cdots (8) \end{aligned}$$

式(8)中、 δ を付した値が未知数である以外は、すべて ξ^0 , $\xi(T)$, T に対応する既知の値である。なお左辺の $\Phi(T)$ の係数中の $Y\delta T$ は無視してもよいが適当な方法で(近似)評価すれば若干の精度向上が期待できる。

式(8)は n 次元のベクトル方程式であるが、未知数 $\delta*$ は $(n+1)$ 個である。したがって問題の真意を考慮しつつ適当な条件を付けて未知数の個数とベクトルの次元数を整合させなければならない。そこで

(i) 周期が既知ならば、それを $T(=\text{const.})$ として $\delta T(=0)$ は未知数から除外する。

(ii) ξ^0 の1成分： $\xi_m^0(1 \leq m \leq n)$ が既知ならば $\delta\xi_m^0(=0)$ は未知数から除外し、 ξ_m^0 を固定する。

(iii) その他、(i)(ii)の組合せ、複数の m がある場合、式(8)左辺の係数行列の階数が次数と一致しない場合など、特殊な場合。

ここで初めて自律系/非自律系の区別も含めて問題の物理的意味を注意深く検討し(i)~(iii)のいずれに該当するかを判断しなければならない。例えば(i)は非自律系(強制振動など)、(ii)は自励系、(iii)は特別な自律系(非線形自由振動など)が対応する。

以上の配慮のもとに式(8)を $[(\delta\xi^0)^T, \delta T]^T$ に関して解き、それを用いて修正した $[(\xi^0)^T, T]^T$;

$$[(\xi^0 + \delta\xi^0)^T, T + \delta T]^T$$

を“改良された(はずの)” $[(\xi^0)^T, T]^T$ と見なし、これを代入した式(8)を再度解く。以後この操作を反復して $[(\xi^0)^T, T]^T$ の逐次近似を進行させ、ノルム

$$\|[(\delta\xi^0)^T, \delta T]^T\|, \|\xi^0 - \xi(T)\|$$

などが十分微小となったところで $[(\xi^0)^T, T]^T$ が収束したと判定し、そのときの ξ^0 が、 $\xi^0 = \xi(T)$ を満足する[すなわち基礎式(1)の定常周期解を与える]初期条件 $x(0)$ であり、 T をその周期とする。

4. 安定判別

式(1)において、周期 T なる周期解 $x^* = x(t)$ とそれに対応する初期条件 $x(0) = x^0$ が存在したとして、その x^0 に無限小の摂動 $\delta\xi^0$ を付加した際の解を

$x(t) = x^* + \delta\xi^*$, $x(0) = x^0 + \delta\xi^0$ (9)
と表す。式(2)~(5)を参照すると、解 $\delta\xi^*$ は

$$\delta\xi^*(t) = \Phi(t)\delta\xi^0 \text{ (10)}$$

と表される。 $\Phi(t)$ は、対応する Y を通じて x^* , x^0 に依存するが、実際問題として、この際の x^0 は式(8)の(収束)解 ξ^0 で十分に代用可能と思われる。

さらに周期 T を既知 [または式(8)の解] とすれば

$$\delta\xi^*(T) \equiv \delta\xi^1, \dots, \delta\xi^*(nT) \equiv \delta\xi^n \text{ (11)}$$

$$\delta\xi^1 = \Phi(T)\delta\xi^0, \dots, \delta\xi^n = \Phi(T)^n\delta\xi^0 \text{ (12)}$$

である。この際の $\Phi(T)$ は定数行列であり、その安定性が $\delta\xi^n$ したがって $\delta\xi(t)$ の発散/収束を支配し、その状況は $\Phi(T)$ の固有値解析⁽¹¹⁾により判明する。すなわち $\Phi(T)$ のすべての固有値 λ が $|\lambda| < 1$ であれば、 $\|\delta\xi^n\|$ ($n \rightarrow \infty$) $\rightarrow 0$ であって x^* は安定、 $|\lambda| > 1$ ならば不安定、 $|\lambda| = 1$ (この場合は少ししいない議論を要する⁽¹¹⁾) では中立(事実上の安定のこともある)または不安定である。

第3章の定常振動解が特定されると [式(8)における $\Phi(T)$ が収束すると]、直ちに、その $\Phi(T)$ の固有値を検討することにより定常振動解の安定性が判別される。なお λ が重根で $|\lambda| \sim 1$ の場合は理論的にも多少注意を要する⁽¹¹⁾だけでなく、その値自身も重根であるかどうか数値的に特定せざるをえないとすれば、その計算法や精度には十分注意する必要がある。

5. アルゴリズム

上述の式(1), (5)を連立させて同時に解くため、まず次のような $n(n+1)$ 次元ベクトルを定義する。

$$\left. \begin{aligned} z(t) &\equiv (\xi^T \phi_1^T \dots \phi_n^T)^T, \text{ ただし} \\ \phi_k &: \Phi \text{ の第 } k \text{ 列成分 } (n \text{ 次元ベクトル}) \end{aligned} \right\} \text{ (13)}$$

式(1), (5)は次のように集約される。

$$\left. \begin{aligned} \frac{dz}{dt} &= \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \xi \\ \phi_1 \\ \vdots \\ \phi_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X \\ Y \cdot \phi_1 \\ \vdots \\ Y \cdot \phi_n \end{bmatrix}, \text{ ただし} \\ z(0) &= [(\xi^0)^T e_1^T \dots e_n^T]^T, \\ e_k &: n \text{ 次元単位行列の第 } k \text{ 列ベクトル} \end{aligned} \right\} \text{ (14)}$$

(1) 適当に仮定した初期値 ξ^0 と周期 T により、式(14)を解いて $z(t)$ ゆえに $\xi(T)$, $\Phi(T)$ を得る。

(2) ξ^0 , $\xi(T)$, $\Phi(T)$ を用いて式(8)を解き、 ξ^0 と T の補正值 $\delta\xi^0$, δT を求める。 ξ^0 の成分と T のうち既知のものがあれば、それを固定し、対応する δ^* は零とおいて未知数から除外する。

(3) $\delta\xi^0$, δT , $\xi^0 - \xi(T)$ の大きさから ξ^0 と T の逐次近似が収束と判定されたならば計算を終了し(4)へ

進む。さもなくば、 $\xi^0 + \delta\xi^0$, $T + \delta T$ を新たな ξ^0 , T において(1)の操作へ戻る(既知の値は固定のまま)。

(4) $\Phi(T)$ の固有値を計算し、上で得た周期解の安定性を判別する [式(12)以下を参照のこと]。

6. 例 題

6・1 1自由度系の強制振動の定常解(図1) 運動方程式は次の形とする。

$$\ddot{x} + \gamma \dot{x} + f(x) = P \cos \omega t$$

ばね関数 f として以下の四つを取り上げた。

- (a) 線形ばね: $f(x) = x$
- (b) Duffing系硬性ばね: $f(x) = x + x^3$
- (c) Duffing系軟性ばね: $f(x) = x - x^3$
- (d) 2次曲線ばね: $f(x) = x + x^2$

上式を連立1階常微分方程式に変換するために、 x を次のようにおく。

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix}$$

このとき、式(1), (3)の X , Y はそれぞれ次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} X &= \begin{bmatrix} x_2 \\ P \cos \omega t - f(x_1) - \gamma x_2 \end{bmatrix}, \\ Y &= \frac{\partial X}{\partial x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\partial f(x_1)/\partial x_1 & -\gamma \end{bmatrix} \end{aligned} \right\}$$

運動方程式の中のパラメータ、周期および最初に与えた初期値の仮定はそれぞれ次のとおりである。

$$\left. \begin{aligned} \gamma &= 0.1 \\ P &= \begin{cases} 0.1 \cdots (\text{a}), (\text{b}), (\text{d}) \text{ の場合} \\ 0.07 \cdots (\text{c}) \text{ の場合} \end{cases} \\ \omega &= 1.0 \\ T &= 2\pi/\omega \\ \xi^0 &= (0, 0)^T \end{aligned} \right\}$$

ここでは、周期 T が既知であるから、式(8)を解く上で δT は未知数から除外した。

図1中の添字付き○印は初期値 ξ^0 を表し、添えられた数字は、0が最初に与えた仮定値を、1, 2, ... はそれぞれ1, 2, ... 回めの逐次近似で得られた推定値を表す。また、○印から▲印に至る実線の曲線は、それぞれの初期値から計算を行ったときの1周期分の軌道を表している。

(a)の線形ばねの場合、図からわかるように、ただ1回の近似で定常解を与える初期値の正解に収束しているが、これは理論的にも事実であることが証明される⁽²⁾。すなわち、式(3)のヤコビアン行列 Y が定数行列となるため、 $\Phi(t)$ や $\delta\xi$ などは x と無関係であり、この変分方程式は定数係数の斉次方程式となる。ゆえ

に変分の大きさは無制限であり無限小と限る必要がない。この性質を利用すると、式(1)を任意の初期値 ξ^0 で解いた結果は次のように表すことができる。

$$\xi(T) = \Phi(T) \cdot (\xi^0 - x^0) + x^0$$

ただし $\Phi(T)$ は定数 T , γ のみに依存する定数行列, x^0 は式(1)の周期解の初期値であり, いずれも存在は仮定するが既知である必要はない。上式は、式(10)において, $\delta\xi^*(t) = \xi(t) - x^0$, $t = T$ とおいたものと

図 1 1自由度系強制振動の計算例

図 2 1自由度系自励振動の計算例

なっている。実際問題としては、 $\xi(T)$ は式(1)の数値解表現であり、初期値 ξ^0 には依存するが、 x^0 、 $\Phi(T)$ などは陽には関与しない。上式を用いて式(8)を作ると次のようになる。

$$[\Phi(T) - E] \cdot \delta \xi^0 = [\Phi(T) - E] \cdot (x^0 - \xi^0)$$

$|\Phi(T) - E| \neq 0 (\gamma \neq 0 \cup \omega \neq 1)$ ならば、この式の解は次のようになる。

$$\delta \xi^0 = x^0 - \xi^0$$

これより、次のステップで用いるべき補正済みの初期値は次のようになる。

$$\xi^0 + \delta \xi^0 = x^0$$

この表示は定常周期解の厳密な初期値となっているから、1回の逐次近似で定常周期解を与える初期値に到達することになる。一般に式(1)が線形常微分方程式であれば同様の状況が成立する。

(b)~(d)の非線形ばねの場合、1回めの(1次)推定初期値は定常解の初期値から大きく離れているが、これは最初に仮定した(0次)初期値が不適当なためと考えられ、2次以降は速やかに定常解初期値の正解へと接近していることがわかる。

6・2 自動系(図2) 運動方程式はそれぞれ次のとおりである。

(a) $\ddot{x} - \varepsilon \dot{x}(1 - x^2) + x = 0$, (Van der Pol方程式)

(b) $\ddot{x} - \varepsilon \dot{x}(1 - \dot{x}^2/3) + x = 0$, (Rayleigh 方程式)

強制振動の場合と同様に連立1階常微分方程式に変換し計算を行った。運動方程式の中のパラメータと最初に与えた周期および初期値の仮定はそれぞれ次のとおりである。

$$\varepsilon = 0.1, T = 2\pi$$

$$\xi^0 = \begin{cases} (4, 0)^T \cdots (a) \text{の場合} \\ (0, 4)^T \cdots (b) \text{の場合} \end{cases}$$

この場合、周期 T が未知であるかわりに変位または速度の初期値は既知として固定できるから、それらに相当する変数を(a)、(b)の場合でそれぞれ $\xi_2^0 = 0$ 、 $\xi_1^0 = 0$ とおいて計算を行った。

図2中の記号等については図1と同様である。この場合も図からわかるように速やかに定常周期解を推定できていることがわかる。なお、計算で求められた周期は $T = 2\pi \times 1.000\,624\,84$ [(a)、(b)に共通]…であった。

7. プログラム

連立常微分方程式の定常振動解を求めるサブルーチンサブプログラムの使用説明書を図3に、プログラムリストを図4に示した。プログラムは FORTRAN 77 で書かれており、複数のサブルーチンで構成され、一

部に FACOM-SSL II⁽¹²⁾ をそのまま利用していることに注意する。なお、図3の説明文は、富士通科学計算サブルーチンライブラリの使用手引き書⁽¹²⁾ に準じた記

MANUAL-(1/3)

連立1階常微分方程式の定常周期解
CALL DSHOOT(Y,F,T,N,M,ISW,S,EPS,SUB,VW,ICON)

(1) 機能

連立1階常微分方程式

$$\left. \begin{aligned} dx/dt &= X \\ t &: \text{独立変数(実スカラー)} \\ x, X &: n \text{次元ベクトル} \\ x &\equiv (x_1 \ x_2 \ \cdots \ x_n)^T \\ X &\equiv (X_1 \ X_2 \ \cdots \ X_n)^T \end{aligned} \right\} \quad (1.1)$$

において定常周期解を求め、その解の安定性を調べる。

(2) パラメタ

Y… 入力。 t の初期値と x の適当な初期値を与える。
Y(0:N+N*N,0:M) なる2次元配列。入力の与え方は次のとおりとする。

Y(0,0): t の初期値 t_0

Y(i,0): x_i ($i=1, \dots, n$) の適当な初期値

出力。 $t_j = t_0 + j(T/m)$ ($j=0, \dots, m$) における定常周期解 x_i ($i=1, \dots, n$) の値。出力のしかたは次のとおりとする。

Y(0,j): t_j

Y(i,j): $x_i(t_j)$

配列の一部は作業領域として使われる。

F… 出力。 $t_j = t_0 + j(T/m)$ ($j=0, \dots, m$) における X_i ($i=1, \dots, n$) の値。F(0:N+N*N,0:M) なる2次元配列。出力のしかたは次のとおりとする。

F(0,j): すべて 1.0

F(i,j): $X_i(t_j)$

配列の一部は作業領域として使われる。

T… 入力。周期 T またはその推定値。

出力。周期 T 。

N… 入力。連立常微分方程式の元数 n 。

M… 入力。1周期のキザミ数 m 。

ISW… 入力。既知パラメタの指定。

ISW=0 周期 T が既知(非自律形など)。

ISW=i x_i ($i=1, \dots, n$) が既知(自動系など)。

S… 出力。安定判別値。表 DSHOOT-1 参照

EPS… 入力。収束判定値。

出力。計算を打ち切った時点での x の初期値と1周期後の値の相対誤差。

$$EPS = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i(0) - x_i(T))^2}{\sum_{i=1}^n (x_i(0)^2 + x_i(T)^2)}}$$

SUB… 入力。(1.1)式における X とヤコビアンマトリクス $\partial X / \partial x$ を計算する副プログラム名。

[副プログラムの用意のしかた]

SUBROUTINE SUB(YY,FF,DJM)

パラメタ

図3(1/2) プログラムの使用説明書(続く⇨)

MANUAL-(2/3)

YY… 入力. $YY(0)=t$, $YY(i)=x_i$ ($i=1, \dots, n$) の対応を持つ $YY(0:N)$ なる 1 次元配列.

FF… 出力. $FF(i)=X_i$ ($i=1, \dots, n$) の対応を持つ $FF(0:N)$ なる 1 次元配列. なお $FF(0)$ には何も代入してはならない.

DJM… 出力. $DJM(i,j)=\partial X_i/\partial x_j$ ($i,j=1, \dots, n$) の対応を持つ $DJM(N,N)$ なる 2 次元配列.

VW… 作業領域. 大きさ $n(3n+4)$ の 1 次元配列.

ICON… 出力. コンディショニングコード. 大きさ 2 の 1 次元配列. 表 DSHOOT-2, DSHOOT-3 参照

表 DSHOOT-1 安定判別値

安定判別値	意味
$0 < S < 1$	安定
$1 \leq S$	中立/不安定

表 DSHOOT-2 コンディショニングコード 1

ICON(1)	意味	処理内容
0	収束	
20000	発散	処理を打ち切る
30000	パラメタエラー	処理を打ち切る
40000	DLAX でエラー発生	処理を打ち切る
50000	DLAXR でエラー発生	処理を打ち切る
60000	DBLNC でエラー発生	処理を打ち切る
70000	DHES1 でエラー発生	処理を打ち切る
80000	DHSQR でエラー発生	処理を打ち切る

表 DSHOOT-3 コンディショニングコード 2

ICON(1)	ICON(2) の意味
0	反復計算数
20000	10000 : 相対誤差が 10^2 を越えた 20000 : 反復計算において相対誤差が 前回のものより大きくなるこ とが 5 回を越えた. 30000 : 反復計算数が 32 回を越えた.
30000	なし
40000~	エラーの発生した副プログラム (SSLII)
80000	のコンディショニングコード

(3) 使用上の注意

a. 使用する副プログラム

- ① SSLII… DLAX, DLAXR, DBLNC, DHES1, DHSQR
- ② FORTRAN 基本関数… DSQRT
- ③ 本プログラム中… SHINI, EQCAL, SHRKG, SHSUB, MKTRM, NXCAL, MKMTX, MKNX, STCAL, NMCAL

MANUAL-(3/3)

b. 注意

- ① 本サブルーチンで用いる実数の変数及び配列はすべて倍精度である.
- ② 初期値と 1 周期後の値の相対誤差が収束判定値よりも小さくなれば収束したとし, 安定判別を行う.
- ③ 以下の場合, 解が発散したとし, 処理を中断する.
 1. 反復計算数が 32 回を越えた場合.
 2. 相対誤差が 10^2 を越えた場合.
 3. 反復計算において相対誤差が前回のものより大きくなるものが 5 回を越えた場合.

c. 使用例

1 自由度 Duffing 系における強制振動 (3.1) の定常周期解を求める.

$$\ddot{x} + \dot{x} + x + x^3 = \cos t, \quad T = 2\pi \quad (3.1)$$

式 (1.1) の形に変わると x, X は次のようになる.

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} x_2 \\ \cos t - x_1 - x_1^3 - x_2 \end{bmatrix}$$

ヤコビアン行列は次のようになる.

$$\frac{\partial X}{\partial x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 - 3x_1^2 & -1 \end{bmatrix}$$

このときの主プログラムの例を以下に示す.

```

C      **EXAMPLE**
      IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
      DIMENSION Y(0:6,0:128),F(0:6,0:128)
      DIMENSION VW(20),ICON(2)
      EXTERNAL SUB
      Y(0,0) = 0D0
      Y(1,0) = 0D0
      Y(2,0) = 0D0
      T = 8D0*DATAN(1D0)
      EPS = 1D-10
      CALL DSHOOT(Y,F,T,2,128,0,S,EPS,SUB,VW,ICON)
      IF(ICON(1).NE.0) STOP
      WRITE(6,*) 'S=',S
      WRITE(6,100) 'T','X1','X2'
      WRITE(6,110) (Y(0,I),Y(1,I),Y(2,I),I=0,128)
100  FORMAT(3A13)
110  FORMAT(3E13.5)
      END
    
```

```

C      SUBROUTINE SUB(YY,FF,DJM)
      IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
      DIMENSION YY(0:2),FF(0:2),DJM(2,2)
      FF(1) = YY(2)
      FF(2) = DCOS(YY(0))-YY(1)-YY(1)**3-YY(2)
      DJM(1,1) = 0D0
      DJM(1,2) = 1D0
      DJM(2,1) = -1D0-3D0*YY(1)**2
      DJM(2,2) = -1D0
      RETURN
      END
    
```

図 3(2/2) プログラムの使用説明書 (⇒続き⇒終)

```

00100 SUBROUTINE DSHOOT(Y,F,T,N,M,ISW,S,EPS,SUB,VW,ICON)
00200 IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
00300 DIMENSION Y(O:N+M*N,O:M),F(O:N+M*N,O:M)
00400 DIMENSION VM(N=(3*N+4)),ICON(2)
00500 EXTERNAL SUB
00600 NN1 = 1
00700 NN2 = NN1+N*N
00800 IF(T.LE.ODO.OR.M.LT.1.OR.M.LT.1.OR.
00900 & ISW.LT.O.OR.ISW.GT.N.OR.EPS.LE.ODO) THEN
01000 ICON(1) = 30000
01100 RETURN
01200 ENDIF
01300 CALL SHINI(Y,N,RNML,MMH,ICON)
01400 DO 10 I=1,32
01500 CALL EQCAL(Y,F,VW(NN1),T,N,M,SUB,VW(NN2))
01600 IF(ICON(1).NE.O) RETURN
01700 CALL NMAL(Y,N,M,RNM)
01800 IF(RNM.LT.EPS) THEN
01900 CALL STCAL(VW(NN1),N,S,VW(NN2),ICON)
02000 EPS = RNM
02100 ICON(2) = I-1
02200 RETURN
02300 ELSE IF(RNM.GT.1D2) THEN
02400 ICON(1) = 20000
02500 ICON(2) = 10000
02600 RETURN
02700 ELSE IF(RNM.GT.RNML) THEN
02800 IF(MMM.GT.5) THEN
02900 ICON(1) = 20000
03000 ICON(2) = 20000
03100 RETURN
03200 ENDIF
03300 MMM = MMM+1
03400 ENDIF
03500 RNML = RNM
03600 CALL NXCAL(Y,F,T,VW(NN1),N,M,ISW,VW(NN2),ICON)
03700 IF(ICON(1).NE.O) RETURN
03800 10 CONTINUE
03900 ICON(1) = 20000
04000 ICON(2) = 30000
04100 RETURN
04200 END
-----
04300 SUBROUTINE SHINI(Y,N,RNML,MMH,ICON)
04400 IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
04500 DIMENSION Y(O:N+M*N,O:M),F(O:N+M*N,O:M),ICON(2)
04600 DO 10 I=1,N
04700 DO 20 J=1,M
04800 IF(I.EQ.J) THEN
04900 Y(I+N*J) = 1D0
05000 ELSE
05100 Y(I+N*J) = ODO
05200 ENDIF
05300 10 CONTINUE
05400 RNML = ODO
05500 MMH = 0
05600 ICON(1) = 0
05700 RETURN
05800 END
-----
05900 SUBROUTINE EQCAL(Y,F,TRM,T,N,M,SUB,VW)
06000 IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
06100 DIMENSION Y(O:N+M*N,O:M),F(O:N+M*N,O:M)
06200 DIMENSION TRM(N,M),VW(1+N+2*N*N)
06300 EXTERNAL SUB
06400 CALL SHRG(Y,F,N,T,N,M,SUB,VW)
06500 CALL MKTRM(Y,TRM,N,M)
06600 RETURN
06700 END
-----
06800 SUBROUTINE SHRG(Y,F,N,H,M,SUB,VW)
06900 IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
07000 DIMENSION Y(O:N+M*N,O:M),F(O:N+M*N,O:M),VW(O:N+2*N*N)
07100 DIMENSION A(O:3),B(O:3),C(O:3)
07200 EXTERNAL SUB
07300 DATA A/ 0.5000000000000000+00, 0.2928932188134525D+00,
07400 & 0.1707106781186547D+01, 0.1666666666666667D+00/
07500 DATA B/ 2D0, 1D0, 1D0, 2D0/
07600 DATA C/ 0.5000000000000000+00, 0.2928932188134525D+00,
07700 & 0.1707106781186547D+01, 0.5000000000000000D+00/
07800 L = N+N*N
07900 NN1 = 0
08000 NN2 = 1+L
08100 F(O,O) = 1D0
08200 DO 10 I=O,L
08300 VM(I) = ODO
08400 10 CONTINUE
08500 DO 30 K=1,M
08600 CALL SHSUB(Y(O,K-1),F(O,K-1),N,SUB,VW(NN2))
08700 DO 20 I=O,L
08800 DK = H*F(I,K-1)
08900 R = A(O)+(DK-B(O)*VM(I))
09000 YY = Y(I,K-1)
09100 Y(I,K) = YY+R
09200 VM(I) = VM(I)+3D0*(Y(I,K)-YY)-C(O)*DK
09300 20 CONTINUE
09400 F(O,K) = 1D0
09500 DO 30 J=1,3
09600 CALL SHSUB(Y(O,K),F(O,K),N,SUB,VW(NN2))
09700 DO 20 I=O,L
09800 DK = H*F(I,K)
09900 R = A(J)+(DK-B(J)*VM(I))
10000 YY = Y(I,K)
10100 Y(I,K) = YY+R
10200 VM(I) = VM(I)+3D0*(Y(I,K)-YY)-C(J)*DK
10300 30 CONTINUE
10400 CALL SHSUB(Y(O,M),F(O,M),N,SUB,VW(NN2))
10500 RETURN
10600 END
-----
10700 SUBROUTINE SHSUB(YY,FF,N,SUB,VW)
10800 IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
10900 DIMENSION YY(O:N+M*N),FF(O:N+M*N),VW(N,M)
11000 EXTERNAL SUB
11100 CALL SUB(YY,FF,VW)
11200 DO 10 I=1,N
11300 DO 20 J=1,M
11400 FF(I+N*J) = ODO
11500 DO 30 K=1,N
11600 FF(I+N*J) = FF(I+N*J)+VW(J,K)*YY(I+N*K)
11700 20 CONTINUE
11800 10 CONTINUE
11900 RETURN
12000 END
-----
12100 10 CONTINUE
12200 RETURN
12300 END
-----
12400 SUBROUTINE MKTRM(Y,TRM,N,M)
12500 IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
12600 DIMENSION Y(O:N+M*N,O:M),TRM(N,M)
12700 NN1 = 1
12800 DO 10 I=1,M
12900 DO 20 J=1,N
13000 TRM(J,I) = Y(I+N*J,M)
13100 20 CONTINUE
13200 RETURN
13300 END
-----
13400 SUBROUTINE NXCAL(Y,F,T,TRM,N,M,ISW,VW,ICON)
13500 IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
13600 DIMENSION Y(O:N+M*N,O:M),F(O:N+M*N,O:M),TRM(N,M)
13700 DIMENSION VW(2*N*(N+2)),ICON(2)
13800 NN1 = 1
13900 NN2 = NN1+N*N
14000 NN3 = NN2+N*N
14100 NN4 = NN3+N*N
14200 NN5 = NN4+N*N
14300 NN6 = NN5+N*N
14400 CALL MKTX(Y,F,TRM,
14500 & VW(NN1),VW(NN2),VW(NN3),VW(NN4),N,M,ISW)
14600 CALL DLAX(VW(NN1),N,N,
14700 & VW(NN2),VW(NN3),VW(NN4),VW(NN5),VW(NN6),ICON(2))
14800 IF(ICON(2).NE.O) THEN
14900 ICON(1) = 40000
15000 RETURN
15100 ENDIF
15200 CALL DLAXR(VW(NN2),VW(NN3),N,N,
15300 & VW(NN1),VW(NN4),VW(NN5),VW(NN6),ICON(2))
15400 IF(ICON(2).NE.O) THEN
15500 ICON(1) = 50000
15600 RETURN
15700 ENDIF
15800 CALL MKNX(Y,T,VW(NN2),N,ISW)
15900 RETURN
16000 END
-----
16100 SUBROUTINE MKTX(Y,F,TRM,FA,DX,A,B,N,M,ISW)
16200 IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
16300 DIMENSION Y(O:N+M*N,O:M),F(O:N+M*N,O:M),TRM(N,M)
16400 DIMENSION FAC(N),DX(N),A(N,M),B(N)
16500 DO 30 I=1,M
16600 DX(I) = Y(I,O)-Y(I,M)
16700 IF(I.EQ.ISW) THEN
16800 DO 10 J=1,N
16900 FAC(J,I) = F(J,M)
17000 10 CONTINUE
17100 ELSE
17200 DO 20 J=1,N
17300 FAC(J,I) = TRM(J,I)
17400 IF(I.EQ.J) FAC(J,I) = FAC(J,I)-1D0
17500 20 CONTINUE
17600 ENDIF
17700 30 CONTINUE
17800 DO 40 I=1,M
17900 B(I) = DX(I)
18000 DO 40 J=1,N
18100 A(J,I) = FAC(J,I)
18200 40 CONTINUE
18300 RETURN
18400 END
-----
18500 SUBROUTINE MKNX(Y,T,DX,N,ISW)
18600 IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
18700 DIMENSION Y(O:N+M*N),DX(N)
18800 DO 10 I=1,N
18900 IF(I.EQ.ISW) THEN
19000 T = T+DX(I)
19100 ELSE
19200 Y(I) = Y(I)+DX(I)
19300 ENDIF
19400 10 CONTINUE
19500 RETURN
19600 END
-----
19700 SUBROUTINE STCAL(TRM,N,S,VW,ICON)
19800 IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
19900 DIMENSION TRM(N,M),VW(2*N),ICON(2)
20000 NN1 = 1
20100 NN2 = NN1+N
20200 CALL DBLNC(TRM,N,N,VW(NN1),ICON(2))
20300 IF(ICON(2).EQ.30000) THEN
20400 ICON(1) = 60000
20500 RETURN
20600 ENDIF
20700 CALL DHSQR(TRM,N,N,VW(NN1),VW(NN2),M,ICON(2))
20800 IF(ICON(2).GE.20000) THEN
20900 ICON(1) = 80000
21000 RETURN
21100 ENDIF
21200 S = ODO
21300 DO 10 I=O,M-1
21400 EE = DSQRT(VW(NN1+I)**2+VW(NN2+I)**2)
21500 IF(S.LT.EE) S = EE
21600 10 CONTINUE
21700 RETURN
21800 END
-----
21900 SUBROUTINE NMAL(Y,N,M,RNM)
22000 IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
22100 DIMENSION Y(O:N+M*N,O:M)
22200 SUM1 = ODO
22300 SUM2 = ODO
22400 DO 10 I=1,N
22500 SUM1 = SUM1+(Y(I,O)-Y(I,M))**2
22600 SUM2 = SUM2+Y(I,O)**2+Y(I,M)**2
22700 10 CONTINUE
22800 RNM = DSQRT(SUM1/SUM2)
22900 RETURN
23000 END

```

図 4 FORTRAN 77 によるプログラム (REAL * 8) のリスト

述となっている。

8. 結 語

数値計算基調により、連立常微分方程式の定常周期解とその安定性を特定する一手法のアルゴリズム⁽²⁾⁻⁽⁸⁾について考察、総括を試み、はん用度の高いプログラムを作成、提案した。また、二、三の例題により、その意味と有用性を解説した。

この手法は、とくに非線形問題の定常振動解を求めるための古典的手法⁽¹⁾に取って替わるべき超高精度超高速のしかも比較的安易簡単な一手法を指向するものである。難点として計算機への依存度が過大な点が挙げられるが、個人専用の計算機の高度普及のすう勢がそれを救済するであろうことに希望をかけたい。

当面の問題点の一つは、周期性の誤差評価手順に先立って、常微分方程式の数値積分自身の誤差管理手順を確立しておく(ルンゲ・クッタ系のプログラムでいえば指定した精度を過不足なく満足するきざみを容易に設定できる)ことであるが、これには、ルンゲ・クッタ・フェールベルク法⁽¹³⁾(計算速度と累積丸め誤差に影響には要注意だが)の有効利用が期待できそうであり、その検討のために別報を予定しておきたい。

終わりに、本稿の内容を入念に検討し貴重なご意見をたまわった、長崎大学助教授 吉武 裕氏ならびに固有値解析に関して有益なご助言をいただいた、九州大学教授 近藤英二氏に対し厚くお礼申し上げる。

文 献

- (1) 井上, 機械力学(機械工学基礎講座), (1989), 189, 理工学社.
- (2) 田村, 九大工学集報, 58-6(1985), 961.
- (3) Baird, C. A., *Jour. Optimization Theory and Applications*, 3-4(1969), 227.
- (4) Aprille, T. J. Jr. and Trick, T. N., *IEEE Trans. Circuit Theory*, Vol. CT-19(1972), 354.
- (5) Matussek, M. R., *Jour. Optimization Theory and Applications*, 12-2(1973), 152.
- (6) 牛田, 電子通信学会技術研究報告, NLP 76-9(1976), 15.
- (7) Ojika, T., *Mem. Osaka Kyoiku Univ., Ser. III*, 26-2(1977), 111.
- (8) 吉武・ほか3名, 機論, 59-561, C(1993), 1428.
- (9) 高田, 機械計算法, (1992), 124, 養賢堂.
- (10) 児玉・須田, システム制御のためのマトリクス理論, (1984), 259-261, 計測自動制御学会.
- (11) 文献(10)の275ページ.
- (12) 富士通, FACOM FORTRAN SSL II 使用手引き書(科学計算用サブルーチンライブラリ), 99 SP-0050-5(1980), 富士通(株).
- (13) 例えば, Fehlberg, E., NASA TR R-287 (1968).