圧電フィルムによるアーチの振動制御*

谷 順 二*¹, 三 浦 英 久*²
裘 進 浩*¹, 大 友 規 矩 雄*¹

Vibration Control of an Arch System Using Piezoelectric Actuators

Junji TANI, Hidehisa MIURA,
Jin-hao QIU and Kikuo OHTOMO

This paper presents a method to control the vibration of an arch system. The arch system consists of a clamped arch with piezoelectric actuators. At first, this study presents the analysis of the vibration problem caused by periodic excitation. The problem is solved by means of the transfer matrix and modal expansion methods. Next, with application of H_∞ control theory to the arch system, a numerical simulation of and experiments on vibration control are performed with a piezoelectric actuator. The result shows the effectiveness of this control method for the decrease in forced vibration of the arch system.

Key Words: Vibration Control, Forced Vibration, Piezoelectric Element, Transfer Matrix Method, Arch System, Modal Expansion Method, H -infinity Control

1. 緒 言

構造物の振動に対し、外部から制振エネルギーを加えることによって能動的に振動を抑えるというアクティブ・コントロールが多く研究されており、これらの中にはアクチュエータとして圧電材料を用いた研究がいくつかある⁽¹⁾⁽²⁾。圧電材料には従来からセラミクス製のものが用いられたが、近年特殊なプラスチックフィルム製のものが開発された。圧電フィルムは、軽薄長大で、切断して任意の形にできる柔軟材料であるなどの利点をもつ。これを用いて片持はりの振動制御が行われた⁽³⁾⁽⁴⁾。アーチの振動には面内効果を無視することによるモデル化誤差が含まれているため、通常設計に使用する状態空間モデルは制御対象の1つの近似モデルにすぎず、制御に際してはロバスト安定性を保証して制御器を設計する必要がある。

そこで本研究では、 H_∞ 制御理論⁽⁵⁾を適用した制御系を設計し、またアクチュエータとして圧電フィルムを使用し、これによって発生するトルクを用いて、強制加振によって発生したアーチの不安定振動を抑制した。

2. 理論解析

2.1 運動方程式と境界条件 図1に本研究で扱う両端を固定されたアーチの解析モデルと座標系を示す。ここで、アーチの縦弾性係数、密度、長さ、厚さ、幅、

曲率半径、ポアソン比をそれぞれ E_b , ρ_b , L , h_b , b , R , ν とする。また圧電フィルムの縦弾性係数、密度、厚さをそれぞれ E_p , ρ_p , h_p とする。

図1 解析モデル

図1に示すように、アーチの一部には根元からアーチと同じ幅の圧電フィルムを貼り、解析の便宜上 $x = 0, x_1$ の間の電極を剥して、 $x = x_1, x_2$ の点にモーメント $M_p(t)$ が生じるよにする。なお、圧電フィルムの曲率半径及びポアソン比はアーチと等しいとし、薄肉殻の理論が適用できるものとする。またアーチのたわみを $w(x, t)$ とし、 $x-z$ 平面内でのアーチの横振動を考える。なおアーチの内部粘性減衰は比例減衰で仮定できるものとし、アーチの振動の振幅は微小で非線形性及び x 方向の変位は無視できるものとする。

以上を考慮し、アーチ全体を $Asin pt$ で加振した場合の系の運動方程式及び境界条件は、円筒殻の Flügge の式で幅方向及び周方向の変位、応力、ひずみの項を

* 原稿受付 平成5年5月27日。

*¹ 正員、東北大学流体科学研究所 (〒980 仙台市青葉区片平2-1-1)。

*² 東北大学大学院 (〒980 仙台市青葉区荒巻字青葉)。

省略し、 z 方向の慣性力を考慮して、次式のように表される。

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left\{ D(x) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{w}{R^2} \right) \right\} + \frac{D(x)}{R^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{w}{R^2} \right) \\ + \rho h(x) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{M_p}{b} \{ \delta'(x-x_1) - \delta'(x-x_2) \} \\ - A \left\{ \rho h(x) p^2 - \frac{D(x)}{R^4} \right\} \sin pt = 0 \end{aligned} \quad (1)$$

$$w(0, t) = \frac{\partial w(0, t)}{\partial x} = w(l, t) = \frac{\partial w(l, t)}{\partial x} = 0 \quad (2)$$

ここで、 $\delta(\cdot)$ はディラックのデルタ関数であり、 $(\cdot)$ は x に関する微分を意味する。また $D(x)$ 、 $\rho h(x)$ はそれぞれ次式で表される曲げ剛性、密度である。

$$\begin{aligned} D(x) &= \frac{E_b h_b^3}{12(1-\nu^2)} \\ &+ \frac{E_p h_p}{6(1-\nu^2)} \{ h_p^2 + 3(h_p + h_b)^2 \} \{ 1 - H(x-x_2) \} \\ \rho h(x) &= \rho_b h_b + 2\rho_p h_p \{ 1 - H(x-x_2) \} \end{aligned}$$

2.2 モード解析と状態方程式 解析対象であるアーチはいわゆる段付きアーチであるから、圧電フィルムの貼ってある部分と、貼っていない部分の2つに要素分割し、各要素の格間伝達マトリクスを求めて解析を行う⁽⁵⁾。このとき、 n 番目の要素における自由振動の運動方程式は変位を $w_n(x, t)$ として次式で与えられる。

$$D \left(\frac{\partial^4 w_n}{\partial x^4} + \frac{2}{R^2} \frac{\partial^2 w_n}{\partial x^2} + \frac{w_n}{R^4} \right) + \rho h \frac{\partial^2 w_n}{\partial t^2} = 0 \quad (3)$$

運動方程式 (3) の解を、 r を複素数として

$$w_n(x, t) = C e^{rx/l} e^{i\omega t} \quad (4)$$

の形に仮定し、その実部を取るものとする。式 (4) を式 (3) に代入することにより、特性方程式を解いて式 (3) の振動モードとして次式を得る。

$$\begin{aligned} W(x) &= A_1 \cosh \alpha_1 \frac{x}{l} + A_2 \sinh \alpha_1 \frac{x}{l} \\ &+ A_3 \cos \alpha_2 \frac{x}{l} + A_4 \sin \alpha_2 \frac{x}{l} \end{aligned} \quad (5)$$

$$\alpha_1 = \frac{l}{R} \sqrt{\omega R^2 \sigma - 1}, \quad \alpha_2 = \frac{l}{R} \sqrt{\omega R^2 \sigma + 1}, \quad \sigma = \sqrt{\frac{\rho h}{D}}$$

ここで、たわみ W 、たわみ角 ψ 、曲げモーメント M 、せん断力 V の4つを用いて状態量ベクトル $Z(x)$ を次式で定義する。

$$Z(x) = [-W(x) \quad \psi(x) \quad M(x) \quad V(x)]^T \quad (6)$$

但し、右肩の T は転置を示す。

そして $Z(x)$ を未定係数ベクトル a を用いてマトリクス表示すると次式の様になる。

$$Z(x) = E(x) a \quad (7)$$

$$a = [A_1 \quad A_2 \quad A_3 \quad A_4]^T \quad (8)$$

$$E(x) = \begin{bmatrix} U(x) \\ U'(x) \\ bDU''(x) \\ bDU'''(x) \end{bmatrix} \quad (9)$$

$$U(x) = [\cosh \lambda_1 \sinh \lambda_1 \cos \lambda_2 \sin \lambda_2]$$

$$\lambda_1 = \alpha_1 \frac{x}{l}, \quad \lambda_2 = \alpha_2 \frac{x}{l}$$

一方、各要素に対して要素間の連続条件を利用して未定係数ベクトル a を消去して、結局格間伝達マトリクス F_i が次式のように得られる。

$$\begin{cases} Z_i(l_i) = F_i Z_i(0) \\ F_i = E_i(l_i) E_i(0)^{-1} \end{cases} \quad (10)$$

なお、 E_i は式 (9) の x 、 l 、 α_1 、 α_2 、 D に添字 i を付したものである。

また、アーチの境界における状態量ベクトルをそれぞれ $Z_2(l_2)$ 、 $Z_1(0)$ とすると各要素の伝達方程式を逐次代入することで次式を得る。

$$\begin{aligned} Z_2(l_2) &= T Z_1(0) \\ T &= F_2 F_1 \end{aligned} \quad (11)$$

ここに T は境界の状態量ベクトル間における伝達マトリクスである。

また、式 (11) の境界間の伝達マトリクス $T = [t_{ij}]$ の各要素は、角振動数 ω の関数である。よってこの式 (11) に対して境界条件を適用することにより振動数方程式として次式が得られる。

$$\det \begin{bmatrix} t_{13} & t_{14} \\ t_{23} & t_{24} \end{bmatrix} = 0 \quad (12)$$

次に式 (7) の関係からアーチの左境界の状態量ベクトル $Z_1(0)$ を適用して未定係数 a_i を逐次求める。これより、各要素における各状態量の振動モードは未定係数 d を用いて次式で表される。

$$Z_i(X_i) = d B_i(x_i) a_i \quad (13)$$

したがってこれまでの解析で求められた各要素における解をつなぎ合わせることによって、式 (3) の解が得られる。

つぎに、運動方程式 (1) を解くため、その解を境界条件式 (2) を考慮して次式のように仮定する。

$$w(x, t) = \sum_{j=1}^n \phi_j(x) q_j(t) \quad (14)$$

$$\phi_j(x) = d_j [w_1^j(x) \{1 - H(x-x_2)\} + w_2^j(x) H(x-x_2)] \quad (15)$$

ここで $w_i^j(x)$ は i 番目の要素の j 次振動を示す。 $q_j(t)$ は時間の未知関数で $\phi_j(x)$ は本研究のアーチの自由振動の固有関数である。

式 (14) を式 (1) に代入し、内部粘性を考慮して次式を得る。

$$\left. \begin{aligned} & \sum_{j=1}^n \left\{ D(x) \phi_j''(x) + \frac{D(x)}{R^2} \phi_j(x) \right\} \{ q_j(t) + c \dot{q}_j(t) \} \\ & + \frac{1}{R^2} \left\{ D(x) \phi_j''(x) + \frac{D(x)}{R^2} \phi_j(x) \right\} \{ q_j(t) + c \dot{q}_j(t) \} \\ & + \rho h(x) \phi_j(x) \ddot{q}_j(t) - A \{ \rho h(x) p^2 - \frac{D(x)}{R^2} \} \sin pt \\ & - \frac{M_p}{b} \{ \delta'(x - x_1) - \delta'(x - x_2) \} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

ここで、 c は内部粘性係数、 $()$ は時間 t に関する微分を意味する。

式(16)の両辺に $\phi_k(x)$ をかけて $x=0$ から $x=L$ まで積分し、 $\phi_j(x)$ の直交性を考慮すると、式(16)は非連成化されて次式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} & \ddot{q}_k(t) + \omega_k^2 \dot{q}_k(t) + \omega_k^2 q_k(t) = \frac{M_p}{bL} \{ \phi_k'(x - x_2) \\ & - \phi_k'(x - x_1) \} + \int_0^L \left\{ p^2 \rho h(x) - \frac{D(x)}{R^2} \right\} \phi_k(x) dx \\ & \times \frac{A}{L} \sin pt \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

$(k = 1, 2, \dots, n)$

但し、未定係数 d は $\phi_j(x)$ の直交性より定められる。

式(17)を状態変数ベクトルを導入し、状態方程式の形で表すと次式の様になる。ここで加振項は外乱として省略した。

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{A}_c \mathbf{X}(t) + \mathbf{B}_c u(t) \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{X}(t) &= [q_1(t) \ \dots \ q_n(t) \ \dot{q}_1(t) \ \dots \ \dot{q}_n(t)]^T \\ u(t) &= M_p(t) \end{aligned}$$

$$\mathbf{A}_c = \begin{bmatrix} \mathbf{O} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{\Omega} & -c\mathbf{\Omega} \end{bmatrix}, \mathbf{B}_c = \begin{bmatrix} \mathbf{O} \\ \mathbf{\Phi} \end{bmatrix} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} [\mathbf{\Omega}] &= \begin{bmatrix} \omega_1^2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \omega_n^2 \end{bmatrix} \\ [\mathbf{\Phi}] &= \frac{1}{bL} \begin{bmatrix} \phi_1'(x_2) - \phi_1'(x_1) \\ \vdots \\ \phi_n'(x_2) - \phi_n'(x_1) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

また、センサーを $x = x_p$ の位置に配置するとシステムの出力方程式は次式で表される。

$$y(t) = \mathbf{C}_c \mathbf{X}(t) \quad (20)$$

$$\mathbf{C}_c = [\phi_1(x_p) \ \phi_2(x_p) \ \dots \ \phi_n(x_p) \ 0 \ 0 \ \dots \ 0]$$

2.3 H_∞ 制御理論 実際に制御を行う際には縦弾性係数などの各パラメータに対する同定誤差による不確かさ、あるいは高次振動モード等、モデル化されなかったダイナミクスによる不確かさがある。またアーチは片持ちはりなどと異なり振動の非線形性が存在する。そこで本研究ではロバスト性が強い制御法の1つである H_∞ 制御法を用いる。コントローラの設計に当たって、図2に示すような拡大制御システムを考える。この図はモデルの不確かさや制御仕様に関係した重み関数を含んだ制御対象とコントローラのフィードバック構造を表しており、点線で囲まれた部分は実際の制御対象モデルを表し、その伝達関数マトリクスを $\mathbf{G}$ とす

る。点線の中は制御対象の公称モデル $\mathbf{G}_{nom}$ とモデルの不確かさをパラメライズする要素 $\mathbf{W}_{del}$ とモデル化誤差である Δ_G からなる。ここで $\mathbf{K}$ は出力フィードバックコントローラであり、 d は外乱、センサノイズ、目標値信号などからなる外部入力を、 e は誤差出力を、 y は観測出力を、 u は操作入力を表す。また $\mathbf{W}_{del}$ はモデルの不確かさの量を反映し既知であるとし、 Δ_G は安定かつ $\|\Delta_G\|_\infty < 1$ の条件を満たす以外は未知であるとする。また、要素 $\mathbf{W}_p$ は制御性能仕様が満たすべき周波数帯域を相対的に規定するものである。 H_∞ コントローラの設計においては、この2つの重み関数 $\mathbf{W}_{del}$ と $\mathbf{W}_p$ の選定が鍵となる。

本研究ではこの拡大制御システムに対してロバスト安定性、公称制御性能、ロバスト制御性能を満足し、かつ d から e までの伝達関数の H_∞ ノルムが最小となるコントローラ $\mathbf{K}$ を求める。

図2 拡大制御システム

図3 実験装置

表1 各パラメータ

Length of arch	$L = 188.0(\text{mm})$
Radius of arch	$R = 500(\text{mm})$
Width of arch	$b = 20.0(\text{mm})$
Young's modulus of arch	$E_b = 5.55 \times 10^9(\text{N/m}^2)$
Internal viscosity factor	$c = 2.8 \times 10^{-4}(\text{s})$
Mass density of arch	$\rho_b = 1.405 \times 10^3(\text{kg/m}^3)$
Thickness of arch	$h_b = 0.100(\text{mm})$
Young's modulus of piezoelectric film	$E_p = 2.0 \times 10^9(\text{N/m}^2)$
Mass density of piezoelectric film	$\rho_p = 1.78 \times 10^3(\text{kg/m}^3)$
Thickness of piezoelectric film	$h_p = 0.110(\text{mm})$
Position of actuator	$x_1 = 20.0(\text{mm})$ $x_2 = 94.0(\text{mm})$

3. 実験

3.1 実験方法 本研究で用いた実験装置を図3に示す。実験は、アクリル製の台座に取り付けられたアーチを加振器によって水平方向に加振振幅 $20\text{ }\mu\text{m}$ で加振して共振状態を発生させ、それによって発生する横振動を制御入力を加えて能動的に制振を行った。

観測出力としてアーチの下端から 60mm の位置での変位をギャップ・センサを用いて測定し、その出力電圧をもとに制御入力 $u(k)$ をオン・ラインで算出し、アンプで増幅して圧電アクチュエータに印加した。

3.2 各パラメータ 実験に使用したものの各種パラメータをそれぞれ表1に示す。アーチの内部粘性係数は実験装置の自由振動の減衰波形から求めた。

表2 アーチの固有振動数

Mode	1st	2nd	3rd
Theoretical	23.303(Hz)	42.288(Hz)	70.111(Hz)
Experimental	22.50(Hz)	44.75(Hz)	71.25(Hz)

図4 重み関数 $W_{del}(s)$, $1/W_p(s)$ の Gain plot

図5 閉ループ系のロバスト安定性と公称制御性能

図6 閉ループ系のロバスト制御性能と μ の値

4. 解析結果

本実験で用いたアーチの固有振動数を表2に示す。なお、加振周波数は数値シミュレーションでは $23.0(\text{Hz})$ としたが、実験では $20.0(\text{Hz})$ とした。

図7-a 応答波形:計算結果, $V_{max} = 100(\text{V})$

図7-b 応答波形:実験結果, $V_{max} = 100(\text{V})$

図7-c 制御入力:計算結果, $V_{max} = 100(\text{V})$

図7-d 制御入力:実験結果, $V_{max} = 100(\text{V})$

4.1 重み関数及びコントローラのパラメータ 本研究では、固有振動数の理論値と実験値の差などを考慮してモデリング誤差を表す重み関数 $W_{del}(s)$ を次のようにおいた。

$$W_{del}(s) = \frac{0.4(s + 5000)}{s + 20000} \quad (21)$$

また制御仕様に関する重み係数 $W_p(s)$ は加振周波数での制振効果の要求等を考え、次のようにおいた。

$$W_p(s) = \frac{0.5(s+400)}{s+20} \quad (22)$$

図 8-a 応答波形 : 計算結果, $V_{max} = 300(V)$

図 8-b 応答波形 : 実験結果, $V_{max} = 300(V)$

図 8-c 制御入力 : 計算結果, $V_{max} = 300(V)$

図 8-d 制御入力 : 実験結果, $V_{max} = 300(V)$

これら2つの重み関数の Gain plot を図4に示す。そしてこの重み関数を結合させた拡大システムに対してコントローラの設計を行う。その結果、dからeまでの伝達関数の H_∞ ノルム (γ) の最小値は 0.9162 であった。このときのコントローラを次式に示す。

$$K(s) = \frac{-2.556 \times 10^5 (s + 3.783 + 201.4j)}{(s + 13320)(s + 444.5 + 2299j)} \times \frac{(s + 3.783 - 201.4j)(s + 301.5 + 224.1j)}{(s + 444.5 - 2299j)(s + 1.992 + 200.2j)} \times \frac{(s + 301.5 - 224.1j)(s + 20000)}{(s + 1.992 - 200.2j)(s + 20.00)} \quad (23)$$

設計されたコントローラによる閉ループ系のロバスト安定性と公称制御性能、及びロバスト制御性能の周波数プロットを図5、図6に示す。これらの図からコントローラ $K(s)$ はロバスト安定性、公称制御性能、ロバスト制御性能をいずれも満足していることがわかる。

4.2 計算及び実験結果 計算されたコントローラの出力 $u(s)$ はモーメントであるが、実際に制御を行う場合には電圧が出力となる。しかし、電圧増幅器の最大出力電圧や、圧電フィルムの耐電圧の制約から、印加できる最大電圧が設定される。以下の実験とそれに対応する計算結果は、この最大電圧を変化させたものである。このようにして最大電圧を 100(V)、300(V) と変えて強制振動を行った場合の制御の実験を行った。強制振動のアーチの応答波形と圧電アクチュエータへの印加電圧を計算結果と併せて図7、図8に示す。図7、図8から最大印加電圧が大きくなると共に良好な制振効果が得られているのがわかる。

またこれらの図において最大電圧 V_{max} が高いほど制振し始めるときの波形が計算結果と異なっている。これは数値計算では圧電フィルムにいきなり数百ボルトの電圧を加えるのが可能なのに対し、実験では瞬時に高電圧をかけたことによりアンプ等によってオーバーシュートや時間遅れが生じたためと思われる。

5. 結 言

本研究では、両端固定のアーチに生ずる横振動をアクチュエータとして圧電フィルムを用いてモーメントを加えて材料自体で能動的に制振を行った。その際得られたパラメータをもとに数値シミュレーション及び実験を行い、その有効性を確認した。

- (1) 理論値と実験値は振幅、減衰の点で良く一致した。
- (2) H_∞ 制御理論により設計されたコントローラにより、面内変位を無視したなど系がある程度モデル化誤差を含んでいる場合でも有効な制振効果が得られた。
- (3) アーチなどの曲率を持った物の振動でも、柔軟性を持った圧電フィルムを用いることにより制振することが可能である。

文 献

- (1) 谷・他5名, 機論, 56-525, C (1990), 1147.
- (2) 藤田・他5名, 機論, 59-559, C (1993), 516.
- (3) 佐々木, 猪岡, 機論, 57-534, C (1991), 739.
- (4) Bailey T. and Hubbard, J.E., J. Guid. Contr., 8-5(1985), 605.
- (5) Doyle, J. C. et al., IEEE Transactions on Automatic Control, 34-8(1989), 831.