長さが変化する弦の振動解析*

(厳密解について)

小 寺

忠^{*1}

Vibration of String with Time-Varying Length (On the Exact Solution)

Tadashi KOTERA

The simplest exact solution of free vibration of a string with timevarying length is presented. Taking into account virtual sources of waves which can be assigned to reflecting waves, an extended Stokes' formula is obtained. Coordinates of the virtual sources of the waves which can be observed at (t, x) are given by $(0, -at+x)$ and $(0, at+x)$. Using values of the virtual sources, the solution at (t, x) can be obtained.

Key Words: Vibration, Free Vibration, String with Time-Varying Length, Exact Solution, Stokes Formula, Elastic Wave

1. ま え が き

鉱山用エレベータの縦振動防止の目的で、時間とともに長さが変化する弦の振動解析が始められてすでに数十年が経過している。この問題は、通常の変数分離法が適用できないとの理由で、何らかの解析解法を考案することに主眼が置かれてきた。著者も、波動方程式に変数変換を施して変数分離法が適用できる方程式を誘導し、それを解析的に解くという川井の手法⁽¹⁾を継承発展させてきた^{(2)~(6)}。しかし、この方法では、ある特定の初期変位の場合しか解析解を求めることができないというのが実情である。

これに対して橋本が提案した厳密解法⁽⁶⁾、いわゆるダランベールの形式の解をストークスの公式と無限弦のグリーン関数と移動荷重の概念を用いて求めるというまったく別の解法といえる。しかし、単にダランベール形式の厳密解がほしいというだけならば、もっと簡単な方法がある。しかも、橋本の手法は一定の張力で張られた弦だけにしか通用せず、つるされた弦とか、はりには適用できない。

つるされた弦とか、はりにも適用可能な一般的な方

法は、著者らがすでに発表済み⁽⁷⁾であるので、本報では、著者が今まで追い求めてきた形式の解ではないが、橋本よりももっと簡単な(多分最も簡単な)ダランベール形式の厳密解の求め方を示す。

2. 基 礎 式

本報では図1のように、長さが l_0 から一定速度 v で短くなる弦を考える。線密度を σ 、張力を T とすれば、波動方程式は

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad a^2 = \frac{T}{\sigma} \dots\dots\dots (1)$$

となり、その自由振動の一般解は、ダランベールの解

$$u = \phi(x+at) + \psi(x-at) \dots\dots\dots (2)$$

で表され、この ϕ や ψ を次のように求めることができる。

初期変位を $u_0(x)$ 、初期速度を $v_0(x)$ とすれば

$$\phi(x) + \psi(x) = u_0(x) \dots\dots\dots (3)$$

図1 時間とともに長さが変化する弦

* 原稿受付 平成5年8月12日。

*1 正員、福井大学工学部 (〒910 福井市文京 3-9-1)。

$$a\phi'(x) - a\psi'(x) = v_0(x) \quad \dots\dots\dots (4)$$

が成立する。\$x=0\$ で変位が零であることを考慮して式(4)を積分すると、

$$a\phi(x) - a\psi(x) = \int_0^x v_0(\xi) d\xi \quad \dots\dots\dots (5)$$

となる。式(3)と(5)より

$$\phi(x) = \frac{1}{2a} \left\{ au_0(x) + \int_0^x v_0(\xi) d\xi \right\} \quad \dots\dots\dots (6)$$

$$\psi(x) = \frac{1}{2a} \left\{ au_0(x) - \int_0^x v_0(\xi) d\xi \right\} \quad \dots\dots\dots (7)$$

これらを式(2)に代入すれば

$$u = \frac{1}{2} \{ u_0(x+at) + u_0(x-at) \} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} v_0(\xi) d\xi \quad \dots\dots\dots (8)$$

のようになる(ストークスの公式)。この右辺第1項めは初期変位を表す波が速度 \$a\$ で左右両側に進行することを意味している。しかし、初期条件の定義域は \$0 \le x \le l_0\$ であるので、式(8)においても \$0 \le x \pm at \le l_0\$ である。したがってこのままでは、左右両側に進行した波の反射波が表されていないことに注意する必要がある。この点を解決するために橋本は、弦の長さを無限とし、支点を移動荷重に置き換えている。その結果、荷重点で変位が零という条件から移動荷重の大きさを求め、反射波が表されるようにしている。この方法は、確かに厳密解法といえるが、\$\phi(x+at)\$ と \$\phi(x-at)\$ の中に最初から反射波を含めることができれば、橋本よりもはるかに簡単に厳密解が得られることになる。

以下では、\$\phi(x+at)\$ と \$\phi(x-at)\$ の中に反射波を含める方法を示す。

3. 長さ変化する弦の反射波

図2のように横軸に時間 \$t\$、縦軸に弦の座標 \$x\$ をとれば、巻取り端は \$x = l = l_0 - vt\$ のように表される。波は弦の中を速度 \$a\$ で伝ばするので、例えば、\$x=0\$ (0点) から \$x\$ の正の向きに出る波の位置は \$x=at\$ で表され、\$t=l_0/(a+v)\$ において、巻取り端 \$x=al_0/(a+v)\$ (A点) に達する。そこで反射した波の位置は

$$x = \frac{a}{a+v} l_0 - a \left(t - \frac{1}{a+v} l_0 \right) = \frac{2a}{a+v} l_0 - at \quad \dots\dots\dots (9)$$

というように表される。これは仮想的には、

$$x = \frac{al_0}{v} \left(1 - \frac{a-v}{a+v} \right) \quad \dots\dots\dots (10)$$

(B点) から \$x\$ の負の向きに出る波といえる。

こうして、\$x=0 \sim l_0\$ から \$x\$ の正の向きに進む波 [この変位分布は式(6)で与えられる] は、\$x=l_0 \sim al_0/v \{ 1 - (a-v)/(a+v) \}\$ から \$x\$ の負の向きに出る逆

図2 波の反射および仮想の波の源

符号の波 [式(7)と比べて \$x\$ 方向に縮んでいる] と重なりあう。巻取り端では、大きさが等しく、逆符号の波が重なるので、変位は常に零である。

同じように、\$x=l_0\$ (C点) から \$x\$ の負の向きに出る波の位置は \$x=l_0-at\$ で表され、\$t=l_0/a\$ で \$x=0\$ 端 (D点) に達する。そこで反射した波の位置は

$$x = a \left(t - \frac{l_0}{a} \right) \quad \dots\dots\dots (11)$$

というように表される。これは仮想的には、

$$x = -l_0 \quad \dots\dots\dots (12)$$

(E点) から \$x\$ の正の向きに出る波といえる。

こうして、\$x=0 \sim l_0\$ から \$x\$ の負の向きに進む波 [この変位分布は式(6)で与えられる] は、\$x=0 \sim -l_0\$ から \$x\$ の正の向きに出る逆符号の波 [式(6)と \$x=0\$ に関して点対称] と重なりあう。\$x=0\$ 端では、大きさが等しく、逆符号の波が重なるので、変位は常に零である。

したがって、仮想的な波の出発位置と波の大きさの関係がわかればよい。上で行った操作を繰返せば、\$x=0 \sim l_0\$ から \$x\$ の正の向きに出る波、およびその反射波と重なるのは、

$$\textcircled{1} \quad x = \frac{al_0}{v} \left\{ 1 - \left(\frac{a-v}{a+v} \right)^n \right\} - \left(\frac{a-v}{a+v} \right)^n l_0 \sim \frac{al_0}{v} \left\{ 1 - \left(\frac{a-v}{a+v} \right)^n \right\} \quad ; n \geq 1 \quad \dots\dots\dots (13)$$

から \$x\$ の負の向きに出る式(7)と逆対称的(ただし \$x\$ 方向に縮んでいる)な波、および

$$\textcircled{2} \quad x = -\frac{al_0}{v} \left\{ 1 - \left(\frac{a-v}{a+v} \right)^n \right\} \sim -\frac{al_0}{v} \left\{ 1 - \left(\frac{a-v}{a+v} \right)^n \right\} + \left(\frac{a-v}{a+v} \right)^n l_0 ; n \geq 1 \quad \dots\dots\dots (14)$$

から x の正の向きに出る式(7)を x 方向に縮めた波である。

$x=0 \sim l_0$ から x の負の向きに出る波と重なるのは、

$$\textcircled{3} \quad x = \frac{al_0}{v} \left\{ 1 - \left(\frac{a-v}{a+v} \right)^n \right\} \sim \frac{al_0}{v} \left\{ 1 - \left(\frac{a-v}{a+v} \right)^n \right\} + \left(\frac{a-v}{a+v} \right)^n l_0; n \geq 1 \quad \dots\dots\dots (15)$$

から x の負の向きに出る式(6)を x 方向に縮めた波、および

$$\textcircled{4} \quad x = -\frac{al_0}{v} \left\{ 1 - \left(\frac{a-v}{a+v} \right)^n \right\} - \left(\frac{a-v}{a+v} \right)^n l_0 \sim -\frac{al_0}{v} \left\{ 1 - \left(\frac{a-v}{a+v} \right)^n \right\}; n \geq 0 \quad \dots\dots\dots (16)$$

から x の正の向きに出る、式(6)と逆対称的(ただし x 方向に縮んでいる)な波である。

もし今、 $0 \leq x \leq l_0$ において定義される式(6)と(7)を $\Phi(X)$, $\Psi(X)$ ($0 \leq X \leq l_0$) とおけば、短縮しつつある弦の t, x における変位は次のようにして求められる。図2の点 (t, x) にくる波の源は x 軸上の $-at+x$, $at+x$ にあるので、もし、

① $at+x$ が式(13)の範囲内にあれば、そこからくる波の大きさは $-\Psi(X_{1n})$ となる。ただし、式(13)の領域の幅は

$$\left(\frac{a-v}{a+v} \right)^n l_0$$

であり、 $0 \leq x \leq l_0$ における $0 \sim X_{1n}$ は

$$\left(\frac{a-v}{a+v} \right)^n X_{1n}$$

に縮められ、それが

$$\frac{al_0}{v} \left\{ 1 - \left(\frac{a-v}{a+v} \right)^n \right\} - (at+x)$$

に等しくなるので、

$$X_{1n} = \left(\frac{a+v}{a-v} \right)^n \left[\frac{al_0}{v} \left\{ 1 - \left(\frac{a-v}{a+v} \right)^n \right\} - (at+x) \right] \quad \dots\dots\dots (17)$$

によって、点 (t, x) に対応する点 $(0, X_1)$ の座標を求めることができる(以下同様)。

② $-at+x$ が式(14)の範囲内にあれば、そこからくる波は $\Psi(X_{2n})$ となる。ただし、

$$X_{2n} = \left(\frac{a+v}{a-v} \right)^n \left[\frac{al_0}{v} \left\{ 1 - \left(\frac{a-v}{a+v} \right)^n \right\} + (-at+x) \right] \quad \dots\dots\dots (18)$$

③ $at+x$ が式(15)の範囲内にあれば、そこからくる波は $\Phi(X_{3n})$ となる。ただし、

$$X_{3n} = \left(\frac{a+v}{a-v} \right)^n \left[(at+x) - \frac{al_0}{v} \left\{ 1 - \left(\frac{a-v}{a+v} \right)^n \right\} \right] \quad \dots\dots\dots (19)$$

④ $-at+x$ が式(15)の範囲内にあれば、そこから

くる波は $-\Phi(X_{4n})$ となる。ただし、

$$X_{4n} = \left(\frac{a+v}{a-v} \right)^n \left[-\frac{al_0}{v} \left\{ 1 - \left(\frac{a-v}{a+v} \right)^n \right\} - (-at+x) \right] \quad \dots\dots\dots (20)$$

こうして、①または③と、②または④を重ねたものが求める解である。すなわち

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \{ -\Psi(X_{1n}) + \Psi(X_{2n}) + \Phi(X_{3n}) - \Phi(X_{4n}) \} \quad \dots\dots\dots (21)$$

となる。ただし、各関数の中の変数 X_{in} が $0 \leq X_{in} \leq 1$ ($i=1 \sim 4$) を満たすもののみが意味をもつ。

そして時間 t が

$$\frac{l_0}{v} \left\{ 1 - \left(\frac{a-v}{a+v} \right)^{n-1} \right\} \sim \frac{l_0}{v} \left\{ 1 - \left(\frac{a-v}{a+v} \right)^n \right\}$$

の範囲での振動のようすは、 $n=1$ の範囲でのそれを x, t の両方向について

$$\left(\frac{a-v}{a+v} \right)^{n-1}$$

図3 初期変位による自由振動

(a) $\nu=0.2$ (b) $\nu=0.5$ 図4 初期速度による自由振動 $\eta=2$

倍したものとなる。ただし、変位 u 方向には変化はない。

4. 数値計算例

数値計算にあたり次のような無次元量を導入する

$$\zeta = \frac{x}{l_0}, \quad \tau = \frac{at}{l_0}, \quad \nu = \frac{v}{a}$$

図3は、弦の中央の変位が h であるような折れ線状初期変位を与えたときの振動のようすを立体的に表している。時間軸は、 $t=l_0/v$ で終わりであるので、 $\tau=1/\nu$ までである。変位は u/h で表している。

図4は、 $b \sin \pi \xi$ なる初期速度を与えたときの振動のようすを表している。ただし、パラメータ η は初期速度の振幅を定義する

$$\eta = \frac{l_0}{h} \cdot \frac{b}{a}$$

である。いずれの図も $\tau=2/(1+\nu)$ 付近で計算を止めている。以後同じ挙動の繰返しになる。

5. 結 言

長さが時間とともに変化する弦の振動の厳密な解法を示した。その結果

1. いわゆる解析解法というよりむしろ図式解法に近いが、従来のいずれよりもずっと簡単に厳密解が得られた。

2. 時間 t が

$$\frac{l_0}{v} \left\{ 1 - \left(\frac{a-v}{a+v} \right)^{n-1} \right\} \sim \frac{l_0}{v} \left\{ 1 - \left(\frac{a-v}{a+v} \right)^n \right\}$$

の範囲での振動のようすは、 $n=1$ の範囲でのそれを x, t の両方について

$$\left(\frac{a-v}{a+v} \right)^{n-1}$$

倍したものである。ただし、変位 u 方向には変化はない。

付 録

既報(2)～(5)と類似の座標変換

$$\frac{at}{l_0} = \frac{1}{\nu} (1 - e^{-c\tau})$$

$$\frac{x}{l_0} = \xi e^{-c\tau} \quad ; \quad c = \ln \frac{1+\nu}{1-\nu}$$

を導入すれば、運動方程式(1)は

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} + c \frac{\partial u}{\partial \tau} + 2c^2 \xi \frac{\partial u}{\partial \xi} \\ + 2c\xi \frac{\partial^2 u}{\partial \tau \partial \xi} + c^2 \left(\xi^2 - \frac{1}{\nu^2} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} = 0 \end{aligned}$$

となり、 τ について周期1の解をもち、式(2)に対応する解は

$$\begin{aligned} u(\xi, \tau) = \phi \left\{ \left(\xi - \frac{1}{\nu} \right) e^{-c\tau} + \frac{1}{\nu} \right\} \\ + \phi \left\{ \left(\xi + \frac{1}{\nu} \right) e^{-c\tau} - \frac{1}{\nu} \right\} \end{aligned}$$

のように表現できる。

文 献

- (1) Kawai, R., *Proc. 7th Japan National Congress for Applied Mechanics*, (1957), 355.
- (2) Kotera, T., *Theo. and Appl. Mech.*, 22(1974), 245.
- (3) Kotera, T., *Bull. of the JSME*, 21-160(1978), 1469.
- (4) Kotera, T. and Kawai, R., *JSME Int. J.*, III, 31-3(1988), 524.
- (5) 金山・小寺, 機論, 59-564, C(1993), 2421.
- (6) 橋本, 機論, 57-539, C(1991), 2167.
- (7) 金山・小寺, 機論, 59-564, C(1993), 2415.