塔状構造物の多自由度系モデル作成法と振動制御*

江連勝彦*¹, 猿渡克巳*², 背戸一登*³Vibration Control and Modeling Method
of Multi-Degree-of-Freedom System for Tower Structure

Katsuhiko EZURE, Katsumi SAWATARI and Kazuto SETO

This paper proposes the modeling method of multi-degree-of-freedom system like a tower structure, and the design method using the hybrid dynamic absorber and LQ control theory for controlling the vibrations of the multi-degree-of-freedom system. The first vibration mode is the most important to control vibrations of a tower structure, because of exciting most sensitively by strong wind. Therefore, as a structure is higher and higher, it is necessary to control the higher order vibration modes, considering to prevent spillover instability. In this paper, the unobservability is used for making reduced-order-model, and the LQ control theory is used for controller design. For vibration control using a hybrid dynamic absorber, reduced-order-model of two-degree-of-freedom system, is made at the nodes of third vibration mode to prevent spillover instability. And using root locus plot, it will be clear that the relationship between weighting parameters and control effect in LQ control theory. It is demonstrated experimentally that the hybrid dynamic absorber, designed by this method is able to control first and second vibration modes well without the spillover instability.

Key Words: Vibration Control, Spillover Instability, LQ control Theory Hybrid Dynamic Absorber, Flexible Structures

1. 序 論

近年, 塔状構造物や高層建築物等の振動制御において, アクティブ動吸振器への関心が高まっており, 多くの研究がなされ, 実際の建築物への適用例も見られるようになってきている。さらに, 最近では1000 m級の超高層ビルの未来構想が発表されるなど, 高層建築物はますます高層化, 柔軟化の傾向にある。このように高層化柔軟化が進むと, 一次モードのみでなくより高次のモードの振動制御が必要となってくる。

一方, 制御系設計にはLQ制御理論を用いるのが一般的であるが, この理論を適用する場合, 制振対象の厳密なモデルが必要とされるため, このモデル作成時に低次元化が適切でなかった場合, スピルオーバー不安定と呼ばれる激しい不安定振動の発生が懸念される。そこで, 著者らは, このスピルオーバー防止を目的とした, 「不可制御・不可観測性を活用した低次元化モデル作成法」を提案している⁽¹⁾。

また, 著者らはこれまでに, 1自由度系の制振対象

によってLQ制御理論によるアクティブ動吸振器の制振効果を調べ⁽²⁾, これを, 2自由度系の制振対象に拡張し, 数値解析と実験により良好な制振効果を確認している⁽³⁾。また, 水平2方向の一次モードの振動制御においては, 2方向ハイブリッド動吸振器により良好な制振効果を確認している⁽⁴⁾。

そこで本研究では, 分布定数系の代表例の一つである塔状構造物を, 多自由度系の最小次数である2自由度系モデルに低次元化し, 1個のハイブリッド動吸振器により一次と二次モードを同時に制御し, この制御手法が多自由度系構造物の振動制御に有効であることを数値解析と実験により検証する。また, 根軌跡図により, LQ制御における重み係数の役割を解析する。

2. 塔状構造物の低次元モデル化

図1に, 制振対象である塔状構造物の概要を示す。塔状構造物は, 高さ1.5 m, 断面が30×60 mm, 厚さ2.3 mmの鉄製の中空角材からなり, 下端は垂直に固定されている。

まず, 実験モード解析により, 制振対象である多自由度系構造物の固有振動数と振動モード形を調べた。塔状構造物と得られた振動モード形, および, 2自由度系モデルを図2に示す。ここで, 著者らが提案して

* 原稿受付 平成5年10月1日。

*¹ 准員, 防衛庁 (〒114 東京都北区十条台1-5-70)。*² 正員, (株)小野測器 (〒226 横浜市緑区白山1-16-1)。*³ 正員, 日本大学 (〒101 東京都千代田区神田駿河台1-8)。

いる「不可制御・不可観測性を活用した低次元化モデル作成法」により、制振対象を三次モードの節である点3と点8を質点とする集中定数系モデルに低次元化する。このモデル化の手法は、モード形の節が構造的に有する不可観測性を活用して、スピルオーバーを防止し、実験モード解析と感度解析の手法を用いて固有モードを修正し、指定した点を質点とする集中定数系モデルを作成する考え方に基づいている。

次に、本研究での低次元モデル作成法の手順を簡単に述べる。なお、低次元モデル作成法の詳細は、文献(1)を参照されたい。

まず、2個の質量とばねをもつ物理モデルを仮定し、一次と二次のモーダルパラメータから2自由度の物理モデルを作成する。ここでは、モード行列を単位行列にするように正規化した固有モードを正規モードと呼ぶことにし、この正規モード行列を Φ 、固有振動数を対角要素とする周波数行列を Ω としたときの、質量行列 M 、剛性行列 K との関係は以下のようになる。

$$\Phi\Phi^T = M^{-1} \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$\Phi(\Omega^2)^{-1}\Phi^T = K^{-1} \quad \dots\dots\dots (2)$$

ここで、実験モード解析で求めた一次の振動モード形から求めた点8と点3の一次の固有モード成分を Φ_{11} 、 Φ_{21} 、同様に二次の正規モード成分を Φ_{12} 、 Φ_{22} とすると、仮の正規モード行列は、次のようになる。

$$\Phi = \begin{bmatrix} \Phi_{11} & \Phi_{12} \\ \Phi_{21} & \Phi_{22} \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (3)$$

したがって、式(1)は次式のようにになる。

$$\begin{bmatrix} \Phi_{11}^2 + \Phi_{12}^2 & \Phi_{11}\Phi_{21} + \Phi_{12}\Phi_{22} \\ \Phi_{11}\Phi_{21} + \Phi_{12}\Phi_{22} & \Phi_{21}^2 + \Phi_{22}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/M_1 & 0 \\ 0 & 1/M_2 \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (4)$$

これより質量集中の条件を満たすために、次の拘束条

件を満たさなければならない。

$$\Phi_{11}\Phi_{21} + \Phi_{12}\Phi_{22} = 0 \quad \dots\dots\dots (5)$$

そこで、上式を物理モデルへの変換誤差として考え、次の誤差関数 ϵ_1 を定義する。

$$\epsilon_1 = \Phi_{11}\Phi_{21} + \Phi_{12}\Phi_{22} \quad \dots\dots\dots (6)$$

誤差関数 ϵ_1 を零にするように正規モードを修正する。ために、正規モードに対する誤差関数の感度行列を次のように置く。

$$\left[\frac{\partial \epsilon}{\partial \Phi} \right] = \left[\frac{\partial \epsilon_1}{\partial \Phi_{11}} \quad \frac{\partial \epsilon_1}{\partial \Phi_{21}} \quad \frac{\partial \epsilon_1}{\partial \Phi_{12}} \quad \frac{\partial \epsilon_1}{\partial \Phi_{22}} \right] \quad \dots\dots\dots (7)$$

ここで、 Φ_{11} 、 Φ_{21} 、 Φ_{12} 、 Φ_{22} について、修正量を各々、 $\delta\Phi_{11}$ 、 $\delta\Phi_{21}$ 、 $\delta\Phi_{12}$ 、 $\delta\Phi_{22}$ とする。誤差関数 ϵ_1 を零とするような正規モードの修正量を求めるには、以下の式を解けばよい。

$$\left[\frac{\partial \epsilon}{\partial \Phi} \right] [\delta\Phi_{11} \quad \delta\Phi_{21} \quad \delta\Phi_{12} \quad \delta\Phi_{22}]^T = -\epsilon_1 \quad \dots\dots\dots (8)$$

これを、最小ノルム解を使った一般化逆行列により、次の修正量を求める。

$$[\delta\Phi_{11} \quad \delta\Phi_{21} \quad \delta\Phi_{12} \quad \delta\Phi_{22}]^T = \left[\frac{\partial \epsilon}{\partial \Phi} \right] \left(\left[\frac{\partial \epsilon}{\partial \Phi} \right] \left[\frac{\partial \epsilon}{\partial \Phi} \right]^T \right)^{-1} (-\epsilon_1) \quad \dots\dots\dots (9)$$

この修正量を用いて誤差を零に収束させれば、式(5)を満足する固有モードが得られる。

ところで、 i 次モードの j 点における等価質量を M_{eqij} とすると、等価質量と正規モードの関係は次式となる。

$$M_{eqij} = 1/\Phi_{ij}^2 \quad \dots\dots\dots (10)$$

したがって、実験モード解析より求めた固有モードと、1自由度等価質量同定法により求めた各モードにおける最大振幅点での等価質量より、正規モード行列 Φ を求めることができる。ただし、正負については、伝達関数における位相を参照することにより決定した。

図1 塔状構造物の概要

図2 塔状構造物の振動モード形と力学モデル

修正前の正規モード行列より求めた物理座標系の質量行列 M は、次のようになり集中定数系の条件が満たされていないことがわかる。

$$M = \begin{bmatrix} 1.4211 & -0.6718 \\ 0.6718 & 3.2234 \end{bmatrix}$$

式(9)による収束計算により同定された M は次のようになり、拘束条件の式(5)を満たしていることがわかる。

$$M = \begin{bmatrix} 1.3500 & 0 \\ 0 & 3.1909 \end{bmatrix}$$

このような値をもつ物理モデルは、自由端に仮想のばねを取付けることによって実現できる。ちなみに、これらの質量、剛性をもとに作成した低次元物理モデルと分布定数モデルの周波数応答はほとんど一致しており、このときの誤差関数は零に収束している。

以上の手法により、弾性構造体である塔状構造物が、集中定数形2質点モデルに低次元化された。固有モード修正後の物理パラメータを以下に示す。

$$M_1 = 3.19 \text{ kg}, M_2 = 1.35 \text{ kg}$$

$$K_0 = -133\,000 \text{ N/m}, K_2 = 249\,000 \text{ N/m}$$

$$K_1 = 363\,000 \text{ N/m}$$

一方、ハイブリッド動吸振器設置位置は、点3と点8が考えられるが、二次モードの制振を考慮して、二次モードの最大振幅点近傍である点8に決定した。

図3 制振対象とハイブリッド動吸振器の力学モデル

3. 状態方程式とLQ制御理論

作成した集中定数形モデルに基づき状態方程式を導入する。図3に、2自由度系に低次元化された制振対象とハイブリッド動吸振器の力学モデルを示す。

ここで、相対変位を次のように定義する。

$$X_d = X_3 - X_1 \dots\dots\dots (11)$$

この相対変位を用いて運動方程式を導き、状態変数ベクトルを、次のように定義すると、

$$X = \{\dot{X}_1, \dot{X}_2, \dot{X}_d, X_1, X_2, X_d\}^T \dots\dots\dots (12)$$

状態方程式は、次のようになる。

$$\dot{X} = AX + bu \dots\dots\dots (13)$$

ただし、

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{C_3}{M_1} & -\frac{K_1+K_2}{M_1} & \frac{K_2}{M_1} & \frac{K_3}{M_1} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{K_2}{M_2} & -\frac{K_0+K_2}{M_2} & 0 \\ 0 & 0 & -\left(\frac{C_3}{M_1} + \frac{C_3}{M_3}\right) & \frac{K_1+K_2}{M_1} & -\frac{K_2}{M_1} & -\left(\frac{K_3}{M_1} + \frac{K_3}{M_3}\right) \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \dots\dots\dots (14)$$

$$b = K_c \cdot \left[\frac{1}{M_1} \ 0 \ -\left(\frac{1}{M_1} + \frac{1}{M_3}\right) \ 0 \ 0 \ 0 \right]^T \dots\dots\dots (15)$$

K_c : 制御力 f_c と制御量 u の関係を示す力変換係数

ここに u は制御量を表すスカラー量である。

制御系の設計には、LQ制御理論を用いる。設計パラメータは、次式で表される線形二次形式の評価関数 J に与える重み係数行列 Q と重み係数 R である。

$$J = \int_0^\infty (X^T Q X + u^2 R) dt \dots\dots\dots (16)$$

ただし、

$$Q = \text{diag} [q_1 \ q_2 \ q_3 \ q_4 \ q_5 \ q_6] \dots\dots\dots (17)$$

ここで、 q_1, q_2, q_3 は、それぞれ質点1、質点2の速度、および、相対速度に掛かる重み係数であり、 q_4, q_5, q_6 は、それぞれ質点1、質点2の変位、および、相対変位に掛かる重み係数である。LQ理論に基づけば、この評価関数を最

小にする制御量 u は、次のように定式化されており、リカッチ方程式を解くことによりフィードバックゲインを決定することができる。

$$u = -R^{-1}b^T P X = -KX \quad \text{.....(18)}$$

ただし、

$$K = \{k_1 \ k_2 \ k_3 \ k_4 \ k_5 \ k_6\} \quad \text{.....(19)}$$

図 4 変位項に重みを掛けた場合の根軌跡図

(a) 三つの特性根の根軌跡

(b) 制振装置と制振対象の一次の根の軌跡

図 5 速度項に重みを掛けた場合の根軌跡図

ここに、 P は次のリカッチ方程式の解である。

$$PA + A^T P - P b R^{-1} b^T P + Q = 0 \quad \text{.....(20)}$$

4. 数 値 解 析

LQ 制御理論を用いて制御系設計を行う場合に、重み係数と得られる制振効果との関係が明らかでないため、試行錯誤的に重み係数を決定する場合が多い。そこで、重み係数に応じた根軌跡図を作成し、これを比較することで、各々の重み係数と得られる制御系の特性との関係を明らかにする。

まず、変位項と速度項を比較し、次に、各重み係数の役割を比較する。なお、相対変位、相対速度にかかる重み係数は、ハイブリッド動吸振器の制振性能に影響を与える重み係数であり、本研究の場合は、制御系の基本的な傾向を明らかにするため、この二つの重み係数を零とし、ハイブリッド動吸振器に制約条件を与え

図 6 変位項と速度項による周波数応答の比較

(a) 質点2の応答

(b) 質点1の応答

図 7 変位項に重みを掛けた場合のインパルス応答

ない場合の解析を行うことにする。

図4, 図5に, 変位項, 速度項に重みを掛けた場合の根軌跡図を示す。この系においては, 3個の特性根が存在し, 下側から, ハイブリッド動吸振器, 制振対象の一次, 二次の根であり, R を小さくすると s -平面上を左方向に移動する。図中の $a \sim e$ は, 図中に示す重み係数のほかは, すべて零の場合の重み係数を示している。ハイブリッド動吸振器の根が虚軸から離れているのは, 本研究で用いたハイブリッド動吸振器の減衰係数の影響である。以下に, 各々の重み係数による根軌跡の傾向を示す。

(1) $q_4 = q_5 = 1$ の場合

ハイブリッド動吸振器の根は, 原点に向かう。制振対象の一次と二次の根は, 当初近づくが, 一次の根は s -平面上の1点に収束し, 二次の根は s -平面上を左に移動する。

(a) 質点2の応答

(b) 質点1の応答

図8 速度項に重みを掛けた場合のインパルス応答

図9 q_4 と q_5 による制振効果の比較

(2) $q_1 = q_2 = 1$ の場合

ハイブリッド動吸振器の根は, 原点に向かう。制振対象の一次の根は, s -平面上を左方向に移動し, 実軸に引き込まれ, 二次の根は s -平面上の1点に収束する。

(3) $q_4 = q_5 = 1$ と $q_1 = q_2 = 1$ の場合の比較

変位項と速度項に重みを掛けた場合の制振効果を比較するため, $q_4 = q_5 = 1, R = 1 \times 10^{-8}$ と $q_1 = q_2 = 1, R = 1 \times 10^{-4}$ の点をそれぞれ, □印, ○印として図4, 図5にプロットした。この两点の虚軸からの距離を比較すると, ハイブリッド動吸振器と制振対象の一次の根の位置は, どちらの場合でもほぼ等しいが, 二次の根は, 速度項に重みを掛けた場合のほうが明らかに大きく, 制振対象の二次を抑制するには, 速度項に重みを掛けたほうが, 制振効果が大きいことがわかる。

図10 q_1 と q_2 による制振効果の比較

図11 実験装置の構成

図12 ハイブリッド動吸振器の構造

(a) 質点2の応答

(b) 質点1の応答

図 13 変位項に重みを掛けた場合のインパルス応答

図 6 に、変位項、速度項に重みを掛けた場合の周波数応答を示す。同図より、変位項に重みを掛けた場合には二次の制振効果が十分でなく、速度項のほうが二次の制振効果に与える影響が大きいことがわかる。

図 7、図 8 に変位項、速度項に重みを掛けた場合のインパルス応答を示す。両図において、細い実線が非制御時、太い実線が制御時の応答である。非制御時においても振動が収束しているが、これは、ハイブリッド動吸振器が受動的動吸振器として機能しているためである。両図より、制御により、各点の振動が速やかに収束することがわかる。

(4) q_4 と q_5 の比を変化させた場合

q_4 と q_5 の比を変えた場合においても、基本的には図 4 の c の場合の傾向を示し、 q_4 と q_5 の比を変えることにより、図 4 の a と e で挟まれる領域を移動する。

そこで、図 9 に、 q_4 と q_5 による制振効果を、 $R=1 \times 10^{-8}$ の a と e の場合で比較した。これより、二次のピークはほとんど差がないが、一次のピークは、a の場合のほうが制振効果が高いことがわかる。したがって、 q_4 と q_5 では、 q_5 のほうが制振効果に与える影響が大きいことがわかる。

(5) q_1 と q_2 の比を変化させた場合

q_1 と q_2 の比を変えた場合においても、基本的には図 5 の c の場合の傾向を示し、 q_1 と q_2 の比を変えることにより、図 5 の a と e で挟まれる領域を移動する。

そこで、図 10 に、 q_1 と q_2 による制振効果を、 $R=$

(a) 質点2の応答

(b) 質点1の応答

図 14 速度項に重みを掛けた場合のインパルス応答

1×10^{-4} の a と e の場合で比較した。これより、二次のピークはほとんど差がないが、一次のピークは、a の場合のほうが制振効果が高いことがわかる。したがって、 g_1 と g_2 では、 g_2 のほうが制振効果に与える影響が大きいことがわかる。

5. 振動制御実験

5.1 実験装置の構成

実験装置の構成を図 11 に示す。制御系は基本的に 2 章で使用したものと同一であり、コントローラには、パーソナルコンピュータを使用している。塔状構造物の 2 個の絶対変位とハイブリッド動吸振器の相対変位は、A/D 変換器を介してコンピュータに入力され、差分により速度信号を得る。これら 6 個の状態量と、重み係数に応じて算出したゲインにより、塔状構造物の振動制御を行っている。

図 12 に、ハイブリッド動吸振器の構造を示す。本ハイブリッド動吸振器は、二重動吸振器の質量部にコイルを巻いてハイブリッド・マスとし、図中に示す磁場を構成することにより、アクティブ動吸振器の機能をもたせている。このため、受動的動吸振器の最適設計により、なんらかの理由によりアクティブ動吸振器の機能が阻害された場合においても、受動的動吸振器の機能により安全性を確保する信頼性の高い構造となっている。

5.2 実験結果 図 13 に、変位項に重みを掛けた場合のインパルス応答を示す。同図(a)が質点2の絶対変位、同図(b)が質点1の絶対変位であり、細い実

線が制御を掛けない場合、太い実線が $R=0.1$ で制御した場合である。

図 14 に、速度項に重みを掛けた場合のインパルス応答を示す。同図(a)が質点 2 の絶対変位、同図(b)が質点 1 の絶対変位であり、細い実線が制御を掛けない場合、太い実線が $R=100$ で制御した場合である。図 13, および、図 14 より、制御を掛けることにより、構造物の振動が速やかに収束していることがわかる。

また、両図より、数値解析の結果と同様、二次のピークを安定化させたい場合には、速度項に重みを掛けたほうがよいことがわかる。

6. 結 論

弾性構造物の一例として塔状構造物を制振対象とし、多自由度系の最小次数である 2 自由度系に低次元化し、LQ 制御理論により制御系設計を行い、数値解析と実験により以下の結論を得た。

(1) 本研究で用いた低次元化モデル作成法によれば、容易に低次元化モデルを作成することが可能であり、本手法によるモデル化がスピルオーバーの防止に有効であることを実験により実証した。

(2) 本研究で用いた振動制御手法によれば、柔軟構造物の一次と二次の振動モードを 1 個の制振装置により同時に制御することが可能であることを数値解析と実験により実証した。

(3) 根軌跡図により、LQ 制御における重み係数と得られる制御系の特性との関係を明らかにした。これにより、希望する制御系の特性を得るための重み係数を決定できるようになった。

文 献

- (1) 背戸・光田, 機論, 57-542, C(1991), 281.
- (2) 背戸・ほか 3 名, 機論, 57-538, C(1991), 44.
- (3) 江連・背戸, 機論, 60-571, C(1994), 60.
- (4) 背戸・江連・猿渡, 機論, 59-559, C(1993), 93.