非線形はりの実験的同定* (モード関数を既知としない同定法)

神谷 恵輔^{*1}, 安田 仁彦^{*1}

Experimental Identification of a Nonlinear Beam (Technique That Does Not Require Prior Knowledge of the Modal Functions)

Keisuke KAMIYA and Kimihiko YASUDA

In previous papers, the authors proposed a new technique of experimental identification of a nonlinear beam. The proposed technique requires prior knowledge of the modal functions of the linearized beam, causing inconvenience in some cases. In this paper, a technique free from this requirement is proposed wherein a set of functions are used in place of the modal functions, and they as well as the governing equations are determined simultaneously with the use of the experimental data. The applicability of the technique is confirmed by numerical simulation and by experiment.

Key Words: Identification, Nonlinear Vibration, Vibration of Continuous System, Principle of Harmonic Balance

1. ま え が き

機械や構造物に対する高速化, 高性能化, 軽量化の要求とともに, 非線形系の実験的同定の問題が重要となり, この問題を扱った多くの研究が報告されている^{(1)~(17)}. これまでの研究は多自由度系を対象としたものがほとんどであったので, 前報で著者らは, 連続系を対象とした同定法の基礎的検討を目的として, はり^{(18)~(20)}を対象に新しい同定法を提案した. しかしそこで提案した同定法では, 対象とする系に対応する線形系のモード関数をあらかじめ求めておく必要があった. これは場合によっては不便である.

この報告では, 前報の制約を取り除いたはりの同定法を提案する. この方法では, モード関数に代わる関数と支配方程式を実験データから同時に決定する. 提案した同定法の有効性を数値シミュレーションおよび実験により検討する.

2. 問 題 設 定

両端で軸方向に拘束された一様なはりを考える. 一方の端を原点とする x 軸をはりに沿って定める. はり

のたわみを w , はりに作用する分布外力を Q とする. w , Q はいずれも時間 t と位置 x の関数である. はりには係数 c の粘性減衰と係数 μ の内部減衰が作用するものとする. 大きな振幅で振動するときの運動方程式は

$$\rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - \frac{EA}{l} \left[u_0 + \frac{1}{2} \int_0^l \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx \right] \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + c \frac{\partial w}{\partial t} + \mu EI \frac{\partial^5 w}{\partial t \partial x^4} = Q \dots \dots \dots (1)$$

となる. ここに ρ , l , A , E , I , u_0 はそれぞれはりの密度, 長さ, 断面積, 縦弾性係数, 断面二次モーメント, 軸方向の初期伸びである.

外力 Q およびそれに対するはりの動的応答の実験データから式(1)を定めることができれば, 対象としているはりが同定できたことになる. しかし式(1)は偏微分方程式であり, この式をこの形で定めることは困難と思われる. そこで式(1)を等価な別の形の式に変換し, それを定めることを考える.

たわみ w を, 互いに一次独立な適当な関数 $\phi_n(x)$ ($n=1, 2, 3, \dots$) を用いて

$$w = \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(x) X_n(t) \dots \dots \dots (2)$$

* 原稿受付 平成5年8月23日.

*1 正員, 名古屋大学工学部 (〒464-01 名古屋市千種区不老町).

の級数の形で表す。ここに $X_n(t)$ は時間 t の未知関数である。式(2)を式(1)に代入してガラーキン法を適用すると、支配方程式として

$$\sum_{m=1}^{\infty} \{m_{nm}\ddot{X}_m(t) + c_{nm}\dot{X}_m(t) + k_{nm}X_m(t)\} + N_n \\ = F_0\phi_n(0) + F_l\phi_n(l) + M_0\phi_n'(0) + M_l\phi_n'(l) \\ + q_n(t) \quad (n=1, 2, 3, \dots) \quad (3)$$

を得る。ここに記号「 $\cdot$ 」および「 $'$ 」はそれぞれ時間 t および位置 x に関する微分を表している。また m_{nm} , c_{nm} , k_{nm} はそれぞれ

$$m_{nm} = \int_0^l \rho A \phi_n(x) \phi_m(x) dx \quad (4)$$

$$c_{nm} = \int_0^l \left\{ c \phi_n(x) \phi_m(x) + \mu EI \frac{d^2 \phi_n(x)}{dx^2} \frac{d^2 \phi_m(x)}{dx^2} \right\} dx \quad (5)$$

$$k_{nm} = \int_0^l \left\{ EI \frac{d^2 \phi_n(x)}{dx^2} \frac{d^2 \phi_m(x)}{dx^2} + \frac{EA}{l} u_0 \frac{d\phi_n(x)}{dx} \frac{d\phi_m(x)}{dx} \right\} dx \quad (6)$$

で与えられる定数であり、

$$m_{nm} = m_{mn}, \quad c_{nm} = c_{mn}, \quad k_{nm} = k_{mn} \quad (7)$$

が成り立つ。 N_n は

$$N_n = \sum_{i \leq j \leq k} \beta_{n,ijk} X_i(t) X_j(t) X_k(t) \quad (8)$$

の形に導かれる非線形関数である。また F_0 , F_l , M_0 , M_l は

$$F_0 = EI \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \Big|_{x=0} - \frac{EA}{l} \left[u_0 + \frac{1}{2} \int_0^l \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx \right] \\ \times \frac{\partial w}{\partial x} \Big|_{x=0} + \mu EI \frac{\partial^4 w}{\partial t \partial x^3} \Big|_{x=0} \\ F_l = -EI \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \Big|_{x=l} + \frac{EA}{l} \left[u_0 + \frac{1}{2} \int_0^l \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx \right] \\ \times \frac{\partial w}{\partial x} \Big|_{x=l} - \mu EI \frac{\partial^4 w}{\partial t \partial x^3} \Big|_{x=l} \\ M_0 = -EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \Big|_{x=0} - \mu EI \frac{\partial^3 w}{\partial t \partial x^2} \Big|_{x=0} \\ M_l = EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \Big|_{x=l} + \mu EI \frac{\partial^3 w}{\partial t \partial x^2} \Big|_{x=l} \quad (9)$$

で与えられる量で、それぞれ $x=0$, $x=l$ の端に作用する力およびモーメントである。さらに $q_n(t)$ は

$$q_n(t) = \int_0^l Q \phi_n(x) dx \quad (10)$$

で与えられる時間の関数である。式(3)が式(1)に代わる支配方程式で、常微分方程式となっている。

さて問題設定に移る。以上の議論からわかるように、適当な関数 $\phi_n(x)$ を与えれば、式(3)によって、任意の外力に対する応答を予測することができる。したがって対象とする系を実験的に同定するという問題は、適当な関数 $\phi_n(x)$ を与え、実験データから式(3)を定めるとい問題に帰着される。関数 $\phi_n(x)$ はたわみ w

を表すためのものであるから、これを定めるのに、実験データを用いれば、同定に都合のよい関数を定め得る。ここではこのような考え方で、適当な外力 Q とそれに対するたわみ w の実験データを用いて、支配方程式(3)と関数 $\phi_n(x)$ を同時に定める方法を提案する。

3. 同定法の提案

3.1 関数 $\phi_n(x)$ の定め方 提案する同定法において必要となる手順に従って、はじめに、たわみの測定データから関数 $\phi_n(x)$ を定める方法を考える。同定を効率よく行うためには、できるだけ少ない数の関数 $\phi_n(x)$ によってたわみ w を表し得ることが望ましい。このため H. Vold と J. Leuridan⁽²¹⁾ が提案した方法を利用してこの関数を定めることにする。

はりの上に測定点として N 個の点を定める。これらの測定点の位置におけるたわみ w と求める関数 $\phi_n(x)$ の値をそれぞれ w_p , ϕ_{np} ($p=1, 2, \dots, N$) とおき、ベクトル

$$\{w\} = [w_1 w_2 \dots w_N]^T \quad (11)$$

および

$$\{\phi\}_n = [\phi_{n1} \phi_{n2} \dots \phi_{nN}]^T \quad (12)$$

を導入する。またベクトル $\{\phi\}_n$ を並べてできるマトリックス $[\Phi]$ を

$$[\Phi] = [\{\phi\}_1 \{\phi\}_2 \dots \{\phi\}_N] \quad (13)$$

で定義する。式(2)の展開式で、はじめの N 個の項以外は無視できるものとし、ベクトル

$$\{X\} = [X_1(t) X_2(t) \dots X_N(t)]^T \quad (14)$$

を導入すれば、式(2)より

$$\{w\} = [\Phi] \{X\} \quad (15)$$

を得る。

関数 $\phi_n(x)$ を定めるために、まず式(12)のベクトル $\{\phi\}_n$ を定めることを考える。このため外力として基本角振動数 ω_r の周期外力を採用し、定常状態のたわみを測定して w_p の実験データとする。得られた w_p は、外力と同じ周期をもつので、

$$w_p = (w_p)_{r0} \\ + (w_p)_{r1} \cos \omega_r t + (w_p)_{r1}^* \sin \omega_r t \\ + (w_p)_{r2} \cos 2\omega_r t + (w_p)_{r2}^* \sin 2\omega_r t + \dots \quad (16)$$

の形のフーリエ級数に展開できる。ここでフーリエ係数 $(w_p)_{r0}$, $(w_p)_{r1}$, $\dots$ は高速フーリエ変換(FFT)などの手法により容易に求めることのできる量である。外力の基本角振動数 ω_r を変化させ、同じようにフーリエ係数を求める。こうして得られるフーリエ係数を並べてできるマトリックス

$$[w] = \begin{bmatrix} (w_1)_{10} & (w_1)_{11} & (w_1)_{11}^* & \cdots & (w_1)_{r0} & \cdots \\ (w_2)_{10} & (w_2)_{11} & (w_2)_{11}^* & \cdots & (w_2)_{r0} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \\ (w_N)_{10} & (w_N)_{11} & (w_N)_{11}^* & \cdots & (w_N)_{r0} & \cdots \end{bmatrix} \quad \cdots \cdots (17)$$

を作成する。ここに第 p 行は、測定点 p において、ある ω_r の外力に対して得られたフーリエ係数を適当な次数まで並べ、次に別の ω_r の外力に対して得られたフーリエ係数を再び適当な次数まで並べるということを繰返して作られている。このようにして実験データから定められるマトリックス $[w]$ を用いて、固有値問題

$$([w][w]^T)\{\phi\} = \gamma\{\phi\} \quad \cdots \cdots (18)$$

を設定する。これを解いて得られる N 個の固有ベクトルを求めるベクトル $\{\phi\}_n (n=1, 2, \cdots, N)$ とする。ここで $\{\phi\}_n$ は、条件

$$\{\phi\}_n^T \{\phi\}_n = 1 \quad \cdots \cdots (19)$$

によって正規化するものとする。ここで後のため、いくつかの性質を確認しておく。式(19)から

$$[\phi]^T [\phi] = [I] \quad ([I] \text{ は単位マトリックス}) \quad \cdots \cdots (20)$$

が成り立つ。また各固有ベクトル $\{\phi\}_n$ は式(18)を満たすので、

$$([w][w]^T)[\phi] = [\phi][\Gamma] \quad \cdots \cdots (21)$$

が成り立つ。ここに $[\Gamma]$ は固有値問題(18)の固有値 $\gamma_n (n=1, 2, \cdots, N)$ を対角成分に並べてできる対角マトリックスである。

固有値問題(18)から得られる固有ベクトルを、式(12)のベクトル $\{\phi\}_n$ として採用するのは次の理由による。 $X_n(t)$ は、 w_p と式(15)の線形変換の関係にあるので、外力の周期と同じ周期の関数となり、

$$\begin{aligned} X_n(t) = & (X_n)_{r0} \\ & + (X_n)_{r1} \cos \omega_r t + (X_n)_{r1}^* \sin \omega_r t \\ & + (X_n)_{r2} \cos 2\omega_r t + (X_n)_{r2}^* \sin 2\omega_r t + \cdots \end{aligned} \quad \cdots \cdots (22)$$

のようにフーリエ級数の形に展開できる。そのフーリエ係数を、式(17)と同じように並べてできるマトリックス

$$[X] = \begin{bmatrix} (X_1)_{10} & (X_1)_{11} & (X_1)_{11}^* & \cdots & (X_1)_{r0} & \cdots \\ (X_2)_{10} & (X_2)_{11} & (X_2)_{11}^* & \cdots & (X_2)_{r0} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \\ (X_N)_{10} & (X_N)_{11} & (X_N)_{11}^* & \cdots & (X_N)_{r0} & \cdots \end{bmatrix} \quad \cdots \cdots (23)$$

を導入する。式(15)よりマトリックス $[w]$ と $[X]$ は

$$[w] = [\phi][X] \quad \cdots \cdots (24)$$

を満足する。式(24)を式(21)に代入し、式(20)を用い

ると

$$[X][X]^T = [\Gamma] \quad \cdots \cdots (25)$$

を得る。式(25)は、マトリックス $[X]$ の第 n 行の成分から作られるベクトルの大きさの二乗、すなわち $X_n(t)$ の各振動数成分の振幅の二乗和を、 ω_r を変えて加え合せたものが固有値 γ_n に等しいことを示している。このようにして、 γ_n の値によって $\{w\}$ への寄与の大きい $X_n(t)$ およびこれに対応する $\{\phi\}_n$ を選ぶことができる。

以下、固有値を大きい順に並べ、はじめの M 個が残りの固有値より十分に大きいとする。このとき、はじめの M 個のベクトル $\{\phi\}_n$ と $X_n(t)$ を用いて $\{w\}$ を十分表すことができる。

ベクトル $\{\phi\}_n$ の成分は関数 $\phi_n(x)$ の測定点における値であったので、各測定点でこれらの値に一致し、その間を適当な関数で補間したものを関数 $\phi_n(x)$ とする。このようにすれば、たわみ w をはじめの M 個の関数 $\phi_n(x)$ と $X_n(t)$ を用いて十分表すことができる。

3.2 支配方程式の形に関する考察 次に支配方程式の形について考えておく。

式(3)の右辺に、境界における量に関係した項が現れている。これらの項は、境界が自由端あるいは固定端の場合には零となる。また境界で弾性支持され、例えば

$$F = -k_t w \quad \cdots \cdots (26)$$

$$M = -k_r \frac{\partial w}{\partial x} \quad \cdots \cdots (27)$$

が成り立つような場合、式(2)を用いると、境界における量に関係した項は式(7)の関係を保ったまま左辺に含ませることができる。

これらのいずれの場合にも、 M 個の $X_n(t)$ に対する支配方程式は

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^M \{ m_{nm} \ddot{X}_m(t) + c_{nm} \dot{X}_m(t) + k_{nm} X_m(t) \} \\ + N_n = q_n(t) \quad (n=1, 2, \cdots, M) \end{aligned} \quad \cdots \cdots (28)$$

の形に表される。

非線形項 N_n は、式(1)に含まれる以外の非線形性を含めるため、式(8)より一般の形とし、 $X_n(t)$ の二乗から始まる

$$N_n = \sum_{i \leq j} a_{n,ij} X_i X_j + \sum_{i \leq j \leq k} \beta_{n,ijk} X_i X_j X_k \cdots \quad \cdots \cdots (29)$$

の形の多項式におく。ここに係数 $a_{n,ij}$, $\beta_{n,ijk}$, $\cdots$ は未知のパラメータである。

以上のように支配方程式の形が定められたので、式(28)の未知パラメータ m_{nm} , c_{nm} , k_{nm} および式(29)の

未知パラメータ $\alpha_{n,i}, \beta_{n,ijk}, \dots$ を決定すれば、支配方程式が定められたことになる。

3.3 $X_n(t)$ と $q_n(t)$ の求め方 これらのパラメータを定めるため、まず、たわみ $\{w\}$ と外力 Q から M 個の $X_n(t), q_n(t) (n=1, 2, \dots, M)$ を求める。

$X_n(t)$ は、関数 $\phi_n(x)$ を定める際に用いた実験データ $\{w\}$ を利用して、式(15)と式(20)より

$$\{X\} = [\Phi]^T \{w\} \dots\dots\dots (30)$$

によって求められる。こうして求められる $X_n(t)$ のうち、固有値問題(18)の固有値の大きなものに対応する M 個を同定に用いる。

$q_n(t)$ は 3.1 節で定めた関数 $\phi_n(x)$ を用いて外力 Q の測定データから

$$q_n(t) = \int_0^l Q \phi_n(x) dx \dots\dots\dots (31)$$

によって求める。

3.4 支配方程式のパラメータの定め方 以上のようにして得られた $X_n(t), q_n(t)$ から支配方程式の未知パラメータを決定することを考える。

まず $X_n(t)$ を式(22)のフーリエ級数に展開する。次に式(31)により定めた $q_n(t)$ を

$$\begin{aligned} q_n(t) = & (q_n)_{r0} \\ & + (q_n)_{r1} \cos \omega_r t + (q_n)_{r1}^* \sin \omega_r t \\ & + (q_n)_{r2} \cos 2\omega_r t + (q_n)_{r2}^* \sin 2\omega_r t + \dots \\ & \dots\dots\dots (32) \end{aligned}$$

のようにフーリエ級数に展開する。さらに式(29)で仮定した項 $X_i X_j, X_i X_j X_k, \dots$ を、上で求めた $X_n(t)$ の演算によって求め、その結果もフーリエ級数

$$\begin{aligned} X_i X_j = & (X_i X_j)_{r0} \\ & + (X_i X_j)_{r1} \cos \omega_r t + (X_i X_j)_{r1}^* \sin \omega_r t \\ & + (X_i X_j)_{r2} \cos 2\omega_r t + (X_i X_j)_{r2}^* \sin 2\omega_r t + \dots \\ X_i X_j X_k = & (X_i X_j X_k)_{r0} \\ & + (X_i X_j X_k)_{r1} \cos \omega_r t \\ & + (X_i X_j X_k)_{r1}^* \sin \omega_r t \\ & + (X_i X_j X_k)_{r2} \cos 2\omega_r t \\ & + (X_i X_j X_k)_{r2}^* \sin 2\omega_r t \\ & + \dots \\ & \dots\dots\dots (33) \end{aligned}$$

の形におく。各フーリエ級数展開のフーリエ係数はFFTなどの手法により求められる既知の量である。

式(22), (32), (33)を式(28)に代入し、ハーモニクバランスの原理を用いて両辺の定数項および $\cos \omega_r t, \sin \omega_r t, \dots$ の係数をそれぞれ等しいとおくと、次の形の方程式を得る。

$$[A]\{S\} = \{Q\} \dots\dots\dots (34)$$

ここに $[A]$ は式(22), (33)に表れるフーリエ係数から決まる既知のマトリックス, $\{Q\}$ は式(32)に表れるフーリエ係数から決まる既知のベクトル, そして $\{S\}$ は系のパラメータ m_{nm}, c_{nm}, k_{nm} および非線形項 N_n の係数パラメータ $\alpha_{n,i}, \beta_{n,ijk}, \dots$ を成分とする未知のベクトルである。これらの表示式は、求めたい方程式の数, 非線形項を表す多項式の次数, フーリエ級数展開の打ち切り次数などを指定すれば容易に求められるもので、一般的な表示は面倒であるからここでは省略する。

実験データを求めるときに、角振動数 ω_r を十分な回数変えて行えば、式(34)は未知数の数より多い方程式を含んだものとなる。そこでこの式に最小二乗法を適用すれば、 $\{S\}$ は

$$\{S\} = ([A]^T [A])^{-1} [A]^T \{Q\} \dots\dots\dots (35)$$

によって定められる。これで方程式(28)が定められ、同定が完了したことになる。

表 1 固有値

γ_1	8.366×10^{-6}
γ_2	7.777×10^{-6}
γ_3	0.538×10^{-6}
γ_4	0.001×10^{-6}
γ_5	0.000×10^{-6}

図 1 同定に用いたデータおよび同定結果との共振曲線による比較

4. 数値シミュレーションによる同定の例

提案した同定法の有効性を検討するため、数値的に求めた応答データを実験データとみなして同定の数値シミュレーションを行った。

応答データを数値的に求めるため、はりとは両端単純支持とし、式(1)の各パラメータの値を次のように定

めた。

$$\begin{aligned} l &= 0.816 \text{ m}, & A &= 9.50 \times 10^{-6} \text{ m}^2 \\ I &= 1.93 \times 10^{-13} \text{ m}^4, & \rho &= 7.84 \times 10^3 \text{ kg/m}^3 \\ E &= 2.06 \times 10^{11} \text{ Pa}, & u_0 &= 1 \times 10^{-6} \text{ m} \\ c &= 0.15 \text{ Ns/m}^2, & \mu &= 3.00 \times 10^{-4} \text{ s} \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (36)$$

たわみの測定点を

$$x = \frac{1}{6}l, \frac{2}{6}l, \frac{3}{6}l, \frac{4}{6}l, \frac{5}{6}l \quad \dots\dots\dots (37)$$

の5箇所の位置にとり、この順に点1, 2, 3, 4, 5とする。外力は

$$Q = Q_0 \delta(x - x_f) \cos \omega t \quad \dots\dots\dots (38)$$

の形の集中調和外力とした。ここに Q_0 は外力の大きさを表し、 x_f は集中外力を作用させる点である。以下の数値例では大きさ Q_0 は $Q_0 = 1.0 \times 10^{-2} \text{ N}$ とし、外力の作用点 x_f は $(1/5)l$ とした。

たわみ w の応答データを次のように求めた。はりの運動方程式を、線形モード関数を用いてモード方程式に変換する。そのはじめの6式を、式(38)で与えられる周期外力に対し、適当な初期条件のもとに数値的に積分し、外力と同じ周期の周期解になるまで積分を続ける。こうして得た周期解から各測定位置におけるたわみ振動を求める。以上を外力の振動数 ω のいろいろな値に対して繰返して得たデータを実験データと見なした。

図2 $\phi_n(x)$ の例 ($n=1, 2, 3$)

図3 X_n の振幅

表2 同定結果

kg	$\times 10^{-2}$	N/m ²	$\times 10^4$
m_{11}	1.014	α_{111}	0.000
m_{12}	0.000	α_{112}	0.000
m_{13}	0.000	α_{113}	0.000
m_{22}	1.007	α_{122}	0.000
m_{23}	0.001	α_{123}	0.000
m_{33}	0.978	α_{133}	0.000
Ns/m		α_{222}	0.000
		α_{223}	0.000
		α_{233}	0.000
		α_{333}	0.000
		N/m ²	$\times 10^7$
N/m		β_{1111}	0.126
		β_{1112}	0.102
		β_{1113}	0.023
		β_{1122}	1.000
		β_{1123}	-0.041
		β_{1133}	2.168
$\times 10$	0.623	β_{1222}	0.404
		β_{1223}	0.053
		β_{1233}	1.068
		β_{1333}	0.187
		β_{2222}	1.925
		β_{2223}	-0.195
$\times 10$	0.256	β_{2233}	8.508
		β_{2333}	-0.411
		β_{3333}	9.524

得られた応答データのうち、点1, 2, 3の位置におけるたわみ w_1, w_2, w_3 の振幅を、外力の振動数 ω の関数として示すと図1の○印で示すような結果となった。この図およびここでは示していないたわみ w_4, w_5 のすべての応答データを用いて同定を行った。

まず関数 $\phi_n(x)$ を求めるため、マトリックス $[w]$ を三次の高調波成分までのフーリエ係数を用いて作成した。はりの両端は単純支持されているので、両端における変位を零とし、得られたベクトル $\{\phi\}_n$ から補間関数として三次のB-スプライン関数を採用して関数 $\phi_n(x)$ ($n=1, 2, 3$) を定めた。その結果を図2に示す。また参考のためこの図に線形のモード関数を破線で示した。同時に得られた固有値 γ_n ($n=1, 2, 3, 4, 5$) を表1に示す。この表から固有値 γ_4 と γ_5 は他の固有値に比べて小さいことがわかる。得られた $\phi_n(x)$ から式(30)により求めた $X_n(t)$ の振幅を振動数 ω を横軸にとって示すと図3のようになった。この図から固有値 γ_4, γ_5 が小さいことに対応して、 X_4, X_5 が小さいことがわかる。そこで提案した方法によって、 $X_n(t)$ ($n=1, 2, 3$) に関する三つの支配方程式を求めるものとした。

同定に当って、非線形項は式(29)に示す $X_n(t)$ の二乗、三乗の項よりなるとした。ただし力学的な考察によって、各非線形項はポテンシャルから導かれるとし、ここでは三乗、四乗の多項式で与えられるポテンシャル

$$U = \sum_{i \leq j \leq k} a_{ijk} X_i X_j X_k + \sum_{i \leq j \leq k \leq l} \beta_{ijkl} X_i X_j X_k X_l \dots \quad (39)$$

から

$$N_n = \frac{\partial U}{\partial X_n} \dots \quad (40)$$

によって導かれるとした。このようにしたほうが、非線形項(29)の未知パラメータの数が減少し、精度の向上が期待される。フーリエ級数展開の打ち切り次数は3とした。

提案した方法に従って同定を行った結果を表2に示す。得られた同定結果の妥当性を検討するため、表2に示したパラメータの値を用いて測定位置でのたわみを求め、図1に重ねて実線で示した。また図4にたわみ w_1, w_2, w_3 の振動波形の例を、もとの波形と比較して示した。図1あるいは図4からわかるように、同定結果はもとの応答データをよく再現している。また同定に用いたデータとは異なる位置を加振した場合の応答も精度よく予測し得た。さらにたわみの測定位置を式(37)とは異なる位置にとった場合の数値シミュレーションも行った。 $\phi_n(x)$ は図2に示したのとは異なったが、固有値問題(18)から得られた固有値はやはりはじめの三つが大きく、この場合も同定結果は応答を精度よく再現するものであった。

5. 実験による同定の例

次に実際のはりに提案した同定法を適用した結果を示す。

5.1 実験装置 同定に用いた実験装置の概略図を図5に示す。この図で B は鋼製のはりであり、その両端は玉軸受けを介して固定台に支持され、軸方向に初期変位を加えられている。はりの諸元は以下のとおりである。

長さ: 1 212 mm, 幅: 20 mm

厚さ: 1.5 mm, 質量: 336 g

このはりにマグネット式の加振装置で周期外力を加

図4 振動波形による比較 ($\omega=4.5$ Hz)

図5 実験装置

えた。マグネットの幅は約 80 mm で、その中心をはりの左端から 763 mm の位置においた。外力の大きさの測定は圧電式の力センサ S_f により、マグネットがはりに加える合力を測定する形で行った。またたわみを測定するための変位センサは光学式のセンサを用い、

$$x = \frac{1}{4}l, \frac{2}{4}l, \frac{3}{4}l \dots\dots\dots (41)$$

の 3 箇所の位置におき、順に点 1, 2, 3 とした。各セ

図 6 同定に用いたデータおよび同定結果との共振曲線による比較

図 7 $\phi_n(x)$ ($n=1, 2, 3$)

ンサからのデータは A/D 変換ボードを通してパーソナルコンピュータに取り込んだ。またそのときのサンプリング周波数は 1 kHz とし、一つの振動数 ω_r につき 4 096 点のデータを収集した。

5・2 同定結果 外力の振動数範囲は 7 Hz から 30 Hz とし、この範囲で 27 個の振動数 ω_r ($r=1, 2, \dots, 27$) についてたわみを測定した。得られたたわみの振幅を共振曲線の形で示すと図 6 の○印のようになった。この図に示したデータから 4 章の場合と同様にして関数 $\phi_n(x)$ および固有値 γ_n ($n=1, 2, 3$) を求めたところ、それぞれ図 7, 表 3 に示すようになった。表 3 からはじめの二つの固有値が大きいことがわかる。そこで同定は $X_1(t)$, $X_2(t)$ に関するものとした。パラメータの決定に際してフーリエ級数展開の打ち切り次数は 3 とした。ただし振幅が 3×10^{-2} mm 以下の成分は同定には用いなかった。また非線形項は式 (39) の形のポテンシャルから式 (40) により与えられるとした。

同定結果から求めた各測定点のたわみの振幅を図 6 に重ねて実線で示す。また図 8 にたわみの振動波形の例を、実験によって得られたデータと比較して示す。これらの図から同定結果はもとのデータをよく再現し

表 3 固有値

γ_1	8.648×10^{-5}
γ_2	7.246×10^{-5}
γ_3	0.002×10^{-5}

図 8 振動波形による比較 ($\omega=8.1$ Hz)

ていることがわかる。

また同定結果から大きさの異なる外力に対して応答を予測し、実験データと比較してみたところ、この場合も同定結果は精度よく実際の応答を予測し得たことが確かめられた。

6. ま と め

非線形連続系の同定法の開発を目的として、この報告では、前報までに提案した同定法が必要としたモード関数を既知とするという制約を取り除いた非線形はりの同定法を提案した。提案した方法は、周期外力によって引き起こされる定常状態のたわみ振動のデータから、たわみに大きく寄与する成分を求め、それらに関してたわみを展開し、問題を支配する方程式を定めるものである。数値シミュレーションおよび実験を行い、提案した方法ではりが精度よく同定できることを示した。

文 献

- (1) Ibanez, P., Identification of Dynamic Parameters of Linear and Nonlinear Structural Models from Experimental Data, *J. Nucl. Eng. Des.*, **25**(1973), 30.
- (2) Ibrahim, S. R. and Mikulcik, E. C., The Experimental Determination of Vibration Parameters from Time Responses, *Shock Vib. Bull.*, **46-5**(1976), 187.
- (3) Masri, S. F. and Caughey, T. K., A Nonparametric Identification Technique for Nonlinear Dynamic Problems, *Trans. ASME, J. Appl. Mech.*, **46-2**(1979), 433.
- (4) Udawadia, F. E. and Kuo, Chin-Po, Non-Parametric Identification of a Class of Non-Linear Close-Coupled Dynamic Systems, *Earthqu. Eng. Struct. Dyn.*, **9**(1981), 385.
- (5) Stephan, C. U. and Ivan, E. M., *ASME Paper*, 82-DET-138(1982).
- (6) Okudo, N., The Effect of Non-Linearity on Transfer Function Measurement, *J. Sound Vib.*, **16-11**(1982), 34.
- (7) Kirshenboim, J. and Ewins, D. J., A Method for Recognizing Structural Nonlinearities in Steady-State Harmonic Testing, *Trans. ASME, J. Vib. Acoust. Stress Reliab. Des.*, **106-1**(1984), 49.
- (8) 大久保・山本・仁礼, ヒルベルト変換を用いた非線形振動解析—モーダルアナリシスの基礎と応用に関する研究, *精密工学会誌*, **52-3**(1986), 485.
- (9) Stanway, R., Sproston, J. L. and Stevens, N. G., A Note on Parameter Estimation in Non-Linear Vibrating Systems, *Proc. Instn. Mech. Eng.*, 199-C, **1**(1985), 79.
- (10) Yang, Y. and Ibrahim, S. R., A Nonparametric Identification Technique for a Variety of Discrete Nonlinear Vibrating Systems, *Trans. ASME, J. Vib. Acoust. Stress Reliab. Des.*, **107-1**(1985), 60.
- (11) Busby, H. R., Nopporn, C. and Singh, R., Experimental Modal Analysis of Non-Linear Systems: A Feasibility Study, *J. Sound Vib.*, **180-3**(1986), 415.
- (12) 佐藤・岩田・内潟, 一自由度非線形系のパラメータ同定法, *機論*, **54-497**, C(1988), 87.
- (13) 安田・河村・渡辺, 多自由度系の同定法(同定法の提案), *機論*, **53-495**, C(1987), 2191.
- (14) 安田・河村・渡辺, 多自由度系の同定法(ノイズのある場合の同定), *機論*, **54-500**, C(1988), 816.
- (15) 安田・河村, クーロン摩擦の作用する多自由度系の同定法, *機論*, **54-504**, C(1988), 1708.
- (16) 安田・河村, 非線形振動系のノンパラメトリック同定法(方法の提案と一自由度系への応用), *機論*, **54-507**, C(1988), 2550.
- (17) 安田・渡辺, 多自由度非線形系の同定法(同定システムの開発), *機論*, **55-512**, C(1989), 833.
- (18) 安田・神谷, 非線形はりの同定法(第1報, 同定法の提案), *機論*, **55-515**, C(1989), 1609.
- (19) 安田・神谷, 非線形はりの同定法(第2報, 非一様はりの同定法), *機論*, **56-525**, C(1990), 1178.
- (20) 安田・神谷, 非線形はりの同定法(実際のはりへの応用), *機論*, **57-535**, C(1991), 749.
- (21) Vold, H. and Leuridan, J., A Generalized Frequency Domain Matrix Estimation Method for Structural Parameter Identification, *7th Seminar on Modal Analysis Katholieke Univ., Leuven*, (1982), 1.