多段階強度衝撃法による非線形系の同定法* (第2報, ゴム粘弾性の連続変化非対称粘性多項式形モデル)

小林 一 敏^{*1}, 湯川 治 敏^{*2}

Identification of Nonlinear System by Multiintensity Impact Test (2nd Report, Polynomial Model of Rubber Viscoelasticity with Continuous Unsymmetrical Viscosity)

Kazutoshi KOBAYASHI and Harutoshi YUKAWA

Purpose of this study is to propose a identification technique of nonlinear viscoelastic model considering the continuous unsymmetrical viscosity through the change of direction and magnitude of the deformation velocity of viscous element. In this paper, the model is represented by the nonlinear Voigt model which is composed of both polynomials of the viscous element and elastic element. For such a characteristics of the viscosity to be realized, the following property is employed: the sign of odd-order terms contained in the polynomial of viscous element depends on the direction of deformation velocity, and that of even-order terms does not. By comparing the identification accuracy of transient response of this model with those of symmetrical viscosity model and discontinuous unsymmetrical viscosity model by relative standard error, this model was evaluated as valid for a wide intensity range of shock loads.

Key Words: Identification, Shock, Transient Response, Nonlinear System, Polynomial Model, Unsymmetrical Viscosity, Rubber Visco Elasticity, Multiintensity Impact Test

1. 結 言

スポーツサーフェースやシューズ底のように、衝撃力による圧縮変形時のゴム粘弾性材料の過渡特性を利用している例は多い。衝撃試験法による非線形粘弾性モデルの同定法の研究^{(1)~(4)}においては、速度の向きによって、粘性項は符号のみが反転するようにした通常の「対称粘性モデル」を構成している。一方、粘性項の同定を圧縮過程と復元過程に分けて行う非対称粘性モデルによると、同定の精度が向上する場合がしばしばみられた。しかし、圧縮から復元への接続点で係数を切替える「不連続変化非対称粘性モデル」のためにモデルの加速度応答が不連続になるという問題点があった。

本研究では、Voigt モデルの粘性要素と弾性要素をそれぞれ多項式で表しているが、速度の正負の向きが変わると奇数次べき項の符号は反転するが、偶数次べき項の符号は変わらないという性質を用いて変形の圧縮過程と復元過程の非対称粘性特性の違いを、粘性項

のパラメータを切替えることなくかつ加速度も滑らかに接続して表せるところの「連続変化非対称粘性モデル」と、その同定法を提案する。また、広い強度の範囲における衝撃にも対応できるモデルを同定するために、同定対象に種々な強度の衝撃を多段階にわたって与え、各段階ごとの衝撃応答を多段階にわたり一括処理することによって、非線形弾性要素と非線形粘性要素のパラメータを同定する多段階強度衝撃試験法⁽⁴⁾⁽⁵⁾を用いた。

2. 測定装置と多段階強度衝撃法について

衝撃試験装置の概要図を図1に示す。

ここで使用した装置は、小さい荷重変換器と加速度変換器および非接触電気変位センサを一体化した衝撃検出部を同定対象表面に衝撃伝達部(Test Foot)を経て静止状態に置き、検出部後面に重錘等を落下させて衝撃を与えるようになっている。この装置は速度、変位の初期値を零に設定できるので、加速度波形を積分して速度や変位を計算することができる。多段階強度衝撃試験法は、重錘の落下高を種々変えて、多段階の衝撃速度において同定対象表面に生じる圧縮と復元の過程の衝撃力、加速度、速度、変位の時間的経過を測定しようとするものである。なお、速度は変位を微分

* 平成4年10月29日 スポーツ工学シンポジウムにおいて講演、原稿受付 平成5年9月2日。

*¹ 正員、筑波大学体育科学系 (〒305 つくば市天王台1-1-1)。

*² 正員、筑波大学大学院。

図1 衝撃試験装置の概要

して求めた値を用いるが、初期値が常に零となっている加速度を積分して得た速度と比較して試験の不備をチェックしている。

本研究では、質量 5 kg の落下重錘の落下高を 5 mm (衝撃強度 I_1) から 100 mm (衝撃強度 I_{20}) までの 20 段階に変化させて衝撃試験を行った。

試験材料は厚さ 13 mm の合成ゴム舗装のスポーツサーフェースを用い、それに比べて十分な硬度を有する直径 55 mm, 厚さ 23 mm, 質量 79 g のポリアセタール製円柱の衝撃伝達部を経て衝撃を与えて測定した。

3. 非対称粘性多項式形粘弾性モデル

図2のように衝撃力 F が質量 m の衝撃伝達部を経て外力 f としてシステムに加えられたとき、非線形粘性要素による反力 f_c と非線形弾性要素による反力 f_k とが、それぞれ多項式として表されるとする。

$$F - m\ddot{x} = f = f_c + f_k \quad \dots\dots\dots (1)$$

$\ddot{x}$, $\dot{x}$, x はそれぞれ同定対象表面の加速度, 速度, 変位を示す。

3.1 対称粘性モデル 対称粘性モデル(モデル A)は,

$$f_c = \left| \frac{\dot{x}}{x} \right| \sum_{i=1}^r c_i |\dot{x}^i| \quad \dots\dots\dots (2)$$

$$f_k = \left| \frac{x}{x} \right| \sum_{j=1}^s k_j |x^j| \quad \dots\dots\dots (3)$$

となり、非線形 Voigt モデルは次式として表される。

図2 非線形 Voigt モデル

$$f = \left| \frac{\dot{x}}{x} \right| \sum_{i=1}^r c_i |\dot{x}^i| + \left| \frac{x}{x} \right| \sum_{j=1}^s k_j |x^j| \quad \dots\dots\dots (4)$$

3.2 不連続変化非対称粘性モデル 不連続変化非対称粘性モデル(モデル B)は、 $c_1(\dot{x} \geq 0)$ と $c_2(\dot{x} < 0)$ が不連続的に切換わる。

$$f = \begin{cases} \left| \frac{\dot{x}}{x} \right| \sum_{i=1}^r c_{1i} |\dot{x}^i| + \left| \frac{x}{x} \right| \sum_{j=1}^s k_j |x^j| & (\dot{x} \geq 0) \\ \left| \frac{\dot{x}}{x} \right| \sum_{i=1}^r c_{2i} |\dot{x}^i| + \left| \frac{x}{x} \right| \sum_{j=1}^s k_j |x^j| & (\dot{x} < 0) \end{cases} \quad \dots\dots\dots (5)$$

3.3 連続変化非対称粘性モデル 連続変化非対称粘性モデル(モデル C)は,

$$f = \sum_{i=1}^r c_i \dot{x}^i + \sum_{j=1}^s k_j x^j \quad \dots\dots\dots (6)$$

となる。

4. 多段階強度衝撃法によるパラメータ同定法

多段階にわたる強度の各衝撃ごとに得られる時系列のデータ対 $(f, \dot{x}, x)$ の集合 $\{(f, \dot{x}, x)\}$ を多段階にわたり一括して集めた集合を $\{(f, \dot{x}, x)\}'$ とする。

これを式(4)~(6)において、 f を従属変数、 $\dot{x}^i$, x^j を独立変数と考えて重回帰係数 c_i , k_j を求める方法⁽⁵⁾を用いて、短い計算時間で高い同定精度で得られた。

5. 各種の多段階多項式形モデルの同定精度の比較

多段階強度試験により同定した多項式形 Voigt モデル(以下、多段階多項式形モデルとする)の粘性項に非対称性をもたせた多段階非対称粘性多項式形モデルの有効性を検討するために、モデル A, B, C の同定精度の比較を行った。

5.1 同定精度の評価法 この研究では、多段階強度のそれぞれの単一衝撃試験について、外力 f に対応して測定された $\dot{x}$, x のデータ対の時系列を、同定

したモデルに代入して得られる外力の推定値を $\hat{f}$ 、および外力の時間平均値を $\bar{f}$ としたときの推定の相対標準誤差 Relative Standard Error (RSE)

$$RSE = \frac{1}{\bar{f}} \left(\frac{\sum_{i=1}^n (\hat{f}_i - f_i)^2}{n-1} \right)^{1/2} \dots\dots\dots (7)$$

によって、その強度の衝撃に対するモデルの同定精度を評価し、多段階全体の平均相対標準誤差 Mean RSE (MRSE) によって多段階モデルの総合的同定精度を評価した。

5・2 多項式の次数と同定精度 陸上競技場走路のゴム粘弾性舗装材について実験したデータを用いて、モデル A, B, C の多項式の次数の組合せを変えた場合の同定精度を求めた結果を表1に示す。

表中の*印は同定したモデルについて、計算機シミュレーションにより、衝撃波形 F を与えて $\ddot{x}, \dot{x}, x$ を安定に計算できたものである。3種のモデルでシミュレーション可能な最高次数は7次なので、モデルの比較が必要なときに7次のモデルを対象にする。この結果からは、粘性項の次数を固定して弾性項の次数を3, 5, 7, 9次と変えても同定精度はほとんど同じであったが、粘性項の次数が大きくなると同定精度が向上し

た。したがって、同定精度は粘性項の次数に依存性が大きいと考えられる。これをモデル C の係数 c_i, k_j の面から考察したものが表2, 3である。表2は粘性項を7次に固定して、弾性項を3, 5, 7, 9次にした場合の c_i, k_j の値であるが、ともにほとんど変化しない。表3は弾性項を7次に固定して、粘性項を3, 7, 9次にした場合で、 c_i, k_j とも大きく変化している。このことはモデル A, B についても同様である。

5・3 モデルから推定した f_c と f_k 図3は、粘性項、弾性項が7次の各モデルについて5段階の $f(A, B, C, D, E)$ を抜き出して、時間経過にしたがって f と x との関係がループを描くようすを示してある。その f のうち弾性要素の反力によるものが f_k である。各 f と x のループの先端部の最も右に寄った位置は最大圧縮変位の状態、つまり $\dot{x}=0$ になっていると考えられるので、その瞬間は $f_c=0$ であるから $f=f_k$ となる。モデル C の f_k 曲線は、大略このような各点を通して物理的に見てもモデル A, B より合理性が高いと考えられる。

f_c 曲線についてモデル B, C を見ると圧縮過程(速度+)と復元過程(速度-)で抵抗係数が異なっていることが推定される。また、座標軸の原点 ($\dot{x}=0, f_c=0$)

表1 モデル A, B, C における多項式の次数と同定精度・シミュレーション可能性

Nonlinear elastic element represented in s th-order polynomial										
Nonlinear viscous element represented in r th-order polynomial	s: r:	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	1 A	* 0.3072								
	B	* 0.2761								
	C	* 0.3072								
	2 A		0.1182							
	B		0.1101							
	C		0.0980							
	3 A			* 0.1135		* 0.1135		* 0.1135		* 0.1135
	B			* 0.0970		* 0.0970		* 0.0970		* 0.0970
	C			* 0.0922		* 0.0922		* 0.0922		* 0.0922
	4 A				* 0.1103					
	B				0.0958					
	C				* 0.0875					
	5 A					0.1094				
	B					* 0.0964				
	C					* 0.0837				
	6 A						0.1088			
	B						0.0941			
	C						0.0835			
	7 A			* 0.1083		* 0.1083		* 0.1083		* 0.1083
	B			* 0.0964		* 0.0964		* 0.0964		* 0.0964
	C			* 0.0833		* 0.0833		* 0.0833		* 0.0833
	8 A								0.1076	
	B								0.0938	
	C								0.0828	
	9 A			0.1067		0.1067		0.1067		0.1067
	B			* 0.0935		* 0.0935		* 0.0935		* 0.0935
	C			* 0.0826		* 0.0826		* 0.0826		* 0.0826

numbers are mean relative standard error, and * marks show to be possible for computer simulation

A: Symmetrical viscosity model

B: Discontinuous changing unsymmetrical viscosity model

C: Continuous changing unsymmetrical viscosity model

における f_c 曲線の左右のこう配は、モデル C が最も滑らかに接続されている。このため、非対称粘性を原因とする加速度の不連続性は小さいと考えられる。

5・4 f の強度とその推定値 $\hat{f}$ の精度 図 4 は、7 次のモデル A, B, C について、 f の強度を I_1, I_6, I_{20} と変えたときの f と推定の相対標準誤差を示したも

のである。すべての強度についてモデル A < モデル B < モデル C の順に同定精度が高くなっているが、特に同定精度が低下する低い衝撃力の方でモデル C による精度の向上が著しい。

図 5 は 7 次のモデル A, B, C について $\hat{f}$ の強さと同定精度の変化を相対標準誤差により表したグラフで

表 2 モデル C において粘性項を 7 次に固定し、弾性項を 3, 5, 7, 9 次にした場合の各係数

Nonlinear elastic element represented in s th-order polynomial	s	Coefficient of nonlinear elastic element k_j ($j = 1 \sim 9$), $r = 7$								(N/mj)
		k_1	k_2	k_3	k_4	k_5	k_6	k_7	k_8	k_9
3	3	1.365×10^5	1.002×10^8	-7.478×10^9						
5	5	1.365×10^5	1.002×10^8	-7.477×10^9	-5.577×10^7	-2.946×10^5				
7	7	1.365×10^5	1.002×10^8	-7.477×10^9	-5.577×10^7	-2.946×10^5	-1.359×10^3	-5.916×10^0		
9	9	1.365×10^5	1.002×10^8	-7.477×10^9	-5.577×10^7	-2.946×10^5	-1.359×10^3	-5.917×10^0	-4.094×10^{-2}	-9.157×10^{-5}
Nonlinear viscous element represented in r th-order polynomial	r	Coefficient of nonlinear viscous element c_i ($i = 1 \sim 9$), $s = 7$								(N/(m/s) ⁱ)
		c_1	c_2	c_3	c_4	c_5	c_6	c_7	c_8	c_9
3	3	3.878×10^2	-6.521×10^2	-2.922×10^2	1.187×10^3	-2.447×10^2	-5.974×10^2	2.704×10^2		
5	5	3.878×10^2	-6.521×10^2	-2.922×10^2	1.187×10^3	-2.447×10^2	-5.974×10^2	2.704×10^2		
7	7	3.878×10^2	-6.521×10^2	-2.922×10^2	1.187×10^3	-2.447×10^2	-5.974×10^2	2.704×10^2		
9	9	3.878×10^2	-6.521×10^2	-2.922×10^2	1.187×10^3	-2.447×10^2	-5.974×10^2	2.704×10^2		

表 3 モデル C において弾性項を 7 次に固定し、粘性項を 3, 7, 9 次にした場合の各係数

Nonlinear viscous element represented in r th-order polynomial	r	Coefficient of nonlinear elastic element k_j ($j = 1 \sim 9$), $s = 7$								(N/mj)
		k_1	k_2	k_3	k_4	k_5	k_6	k_7	k_8	k_9
3	3	1.089×10^5	1.138×10^8	-9.511×10^9	-7.057×10^7	-3.713×10^5	-1.708×10^3	-7.347×10^0		
7	7	1.365×10^5	1.002×10^8	-7.477×10^9	-5.577×10^7	-2.946×10^5	-1.359×10^3	-5.916×10^0		
9	9	1.433×10^5	9.718×10^7	-7.091×10^9	-5.290×10^7	-2.794×10^5	-1.289×10^3	-5.417×10^0		
Nonlinear viscous element represented in r th-order polynomial	r	Coefficient of nonlinear viscous element c_i ($i = 1 \sim 9$), $s = 7$								(N/(m/s) ⁱ)
		c_1	c_2	c_3	c_4	c_5	c_6	c_7	c_8	c_9
3	3	2.865×10^2	-2.749×10^2	7.040×10^1						
7	7	3.878×10^2	-6.521×10^2	-2.922×10^2	1.187×10^3	-2.447×10^2	-5.974×10^2	2.704×10^2		
9	9	3.636×10^2	-8.552×10^2	2.394×10^2	2.372×10^3	-3.237×10^3	-1.071×10^3	4.867×10^3	-3.394×10^3	7.605×10^2

(a) モデル A

(b) モデル B

(c) モデル C

図 3 7 次の各モデルについての 5 段階の外力 f と x , $\dot{x}$ と f_k , $\dot{x}$ と f_c の曲線

図4 7次の各モデルA, B, Cについての3段階の強度における外力 f と推定した力 $\hat{f}$

図5 平均外力の強度による同定精度

表4 平均外力強度範囲区分によるモデルA, B, Cの同定精度

	Mean relative standard error		
	Low intensity range (200N~400N)	High intensity range (400N~840N)	A wide intensity range (200N~840N)
Model A	0.1966	0.0897	0.1164
Model B	0.1569	0.0835	0.1019
Model C	0.1047	0.0704	0.0790

I_1, I_6, I_{20} による x の推定値 $\hat{x}$ を, 計算機シミュレーションにより求めたものである。シミュレーションの精度を相対標準誤差でみると, モデルCが精度が高いことがわかる。

7. シミュレーションの安定性について

シミュレーションが安定に得られない場合は, 圧縮過程で変形速度が同定範囲よりわずかに大きくなったところで f_c が急激に小さくなり負の値となる関数形に同定されているときにみられる。この場合, シミュレーションにおいて同定した範囲内の衝撃力波形 F を入力しても, モデルの不整合の影響でシミュレーション過程で f_c が負になる場合が生じて計算が継続できなくなると考えられる。このことは実際にルンゲ・クッタ法によるシミュレーションが途中で不可能になった場合に, 同定範囲の速度を越えた値における f_c

ある。

表4は, モデルA, B, Cについて, $\hat{f}$ が400 N以上と, 400 N以下の範囲, および全体の範囲について同定精度を評価したものである。

これから見ても, モデルCが広範囲の強度, 特に弱い強度の外力に対して他のモデルに比べ同定精度が高いことがわかる。このためにMRSEで見ると表1に示すように粘性項が3次程度のモデルCでも9次のモデルA, Bよりも高い同定精度が得られている。

6. 各モデルについての計算機シミュレーション

図6は, 7次のモデルA, B, Cについて, f の強度

図6 7次の各モデル A, B, C についての3段階の強度の外力で生じる変位の実測値 x と推定値 $\hat{x}$

を計算しなければならない状態にあり、加速度の大きさも急激な増加を示すことが確認されている。これをふまえ、多項式形非線形 Voigt モデルのように同定が容易で、かつ非線形粘性要素による反力が、同定範囲を超えても負になりにくい関数形を考慮した非線形モデルについて、今後さらに検討を進める予定である。

8. 結 言

衝撃強度を多段階にわたり変化させる衝撃試験法を非線形系に適用することにより、広い強度の範囲における衝撃にも対応できる多段階連続変化非対称粘性多項式モデルを提案する。このモデルの過渡応答に対する同定精度を評価するために対称粘性を有するモデルと不連続的に変化する非対称粘性を有するモデルについて比較した。

同定対象としてゴム粘弾性舗装材を用いた場合の結果を以下に示す。

(1) いずれのモデルも粘性項の多項式の次数が高くなるに従い同定精度が高くなった。しかし、弾性項を3次以上にしても同定精度はほとんど変わらなかった。本提案のモデルは最も高い同定精度を示した。

(2) 圧縮変位最大の時点は、圧縮速度は零になる

はずである。そのときの外力の測定値とモデルによる弾性反力を比べると、本提案のモデルが最もよく一致しており、物理的にもモデルの合理性が高いと考えられる。

(3) 本提案の連続変化非対称粘性モデルは粘性項、弾性項が3次のモデルでも、9次の対称粘性モデル、不連続変化非対称粘性モデルよりも高い同定精度を示した。

(4) 計算機シミュレーションは粘性項が3次と7次の場合に、いずれのモデルも安定に行えた。本提案のモデルが最も高いシミュレーションの精度を示した。

文 献

- (1) 小林, 衝撃試験法による緩衝材および筋の非線形粘弾性特性の測定法, 筑波大学体育科学系紀要, 11 (1988), 205.
- (2) 小林・湯川, 多段階衝撃試験法による緩衝材および筋の非線形粘弾性モデルのパラメータ同定法, 筑波大学体育科学系紀要, 12 (1989), 145.
- (3) 小林・湯川・井上, ベキ級数型非線形モデルによる粘弾性特性の同定, 筑波大学体育科学系紀要, 13 (1990), 187.
- (4) 小林・湯川, 多段階衝撃試験法による非線形系のパラメータ同定法, 機講論, No. 900-14, C (1990-3), 33.
- (5) 小林・湯川, 衝撃試験法によるゴム粘弾性モデルの同定, 機講論, No. 920-89, (1992-10), 36.