FRP 非対称積層板の自由振動解析*

細川 健治^{*1}, 山田 康孝^{*2}, 坂田 敏行^{*1}

Free Vibration Analysis of Unsymmetrically Laminated Plates

Kenji HOSOKAWA, Yasutaka YAMADA and Toshiyuki SAKATA

For the free vibration problem of a symmetrically laminated FRP (fiber reinforced plastic) composite plate, the authors proposed a numerical approach using Green's function for a static bending problem. By this approach, one can accurately estimate the natural frequency and mode shape of plates with various shapes and boundary conditions. First, in the present study, this approach is modified for application to an unsymmetrically laminated FRP composite plate. Numerical calculations are carried out for a clamped antisymmetrically laminated rectangular plate which is a kind of unsymmetrically laminated plate. Convergence of natural frequencies of the plate are discussed. Next, by the vibration tests of clamped antisymmetrically laminated rectangular plates, natural frequencies and mode shapes are obtained. From the comparison between experimental and numerical results, it follows that one can accurately estimate the natural frequency and mode shape using the numerical approach proposed by the authors.

Key Words: Vibration, Free Vibration, Vibration of Continuous System, Composite Material, Antisymmetrically Laminated Plate

1. 緒 言

近年、繊維強化複合材料は広く用いられ、さまざまな面から研究されている。基本的な構造部材であるFRPを積層した板の振動問題もかなり研究されている^{(1)~(10)}。著者らは、各種形状および境界条件を有するFRP対称積層板の自由振動問題を解析するため、板の静的曲げ問題のグリーン関数を用いる方法を提案した⁽⁷⁾。また、提案した方法により求められた固有振動数および振動モードの解析結果を実験結果と比較した結果、よく一致することが明らかになった⁽⁸⁾。さらに、内部減衰(構造減衰)を考慮したFRP対称積層板の強制振動問題を解析する方法をも提案した⁽⁹⁾。

本論文では、前述の対称積層板の自由振動の解析方法を非対称積層板の自由振動の解析方法に拡張する。計算例として、非対称積層板の一種である四辺固定されたFRP逆対称アングルプライ積層長方形板(全層数が偶数の場合)の自由振動問題を解析し、得られる解の収束性を検討する。また、四辺固定された逆対称

アングルプライ積層長方形板の固有角振動数はほとんど報告されていないので、代表的な3種類の積層材料より作られた四辺固定長方形板の固有角振動数を計算する。さらに、固有角振動数および振動モードに及ぼすFRPの繊維角度の影響を明らかにする。

最後に、四辺固定された逆対称アングルプライ積層長方形板の固有振動数および振動モードを実験的モデル解析法により求め、提案した数値計算法により求められた解析結果と比較検討することにより、解析方法の妥当性を明らかにする。

2. 数 値 計 算 法

2.1 振動数方程式 非対称積層板の自由振動問題を解析する数値計算法の概要を簡単に説明する。古典的な積層理論を用いれば、非対称積層板の自由振動の微分方程式は次式で表される。

$$\left. \begin{aligned} L_1(u, v, w) &= 0 \\ L_2(u, v, w) &= 0 \\ L_3(u, v, w) + \rho h \ddot{w} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1)$$

ただし、 h は板厚、 $L_1(\) \sim L_3(\)$ は静的曲げ変形の微分演算子、 $u(x, y, t)$ 、 $v(x, y, t)$ は、それぞれ板の x 方向、 y 方向の伸び、 $w(x, y, t)$ は板のたわみ、 $\ddot{w} = \partial^2 w / \partial t^2$ 、 t は時間変数、また、 ρ は密度である。式(1)

* 平成4年7月9日 Dynamics and Design Conference 1992 Niseko および平成5年3月10日 東海支部第42期総会講演会において講演、原稿受付 平成5年10月22日。

^{*1} 正員、中部大学工学部 (〒487 春日井市松本町1200)。

^{*2} 学生員、中部大学大学院。

の解は,

$$\left. \begin{aligned} u &= - \iint \rho h \ddot{w}(\xi, \eta, t) G_1(x, y, \xi, \eta) d\xi d\eta \\ v &= - \iint \rho h \ddot{w}(\xi, \eta, t) G_2(x, y, \xi, \eta) d\xi d\eta \\ w &= - \iint \rho h \ddot{w}(\xi, \eta, t) G_3(x, y, \xi, \eta) d\xi d\eta \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2)$$

ただし、上式に含まれる関数 $G_1(x, y, \xi, \eta)$, $G_2(x, y, \xi, \eta)$, および $G_3(x, y, \xi, \eta)$ は板の境界条件および微分方程式

$$\left. \begin{aligned} L_1(G_1, G_2, G_3) &= 0 \\ L_2(G_1, G_2, G_3) &= 0 \\ L_3(G_1, G_2, G_3) &= \delta(x-\xi) \cdot \delta(y-\eta) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3)$$

を満足する。ここで、 $\delta(\quad)$ は Dirac のデルタ関数である。図 1 に示すように板を分割し、式(2)の被積分関数は分割領域内では一定と仮定して近似積分を行い、板のたわみを $w(x, y, t) = W(x, y) \sin \omega t$ と仮定すれば、振動数方程式は次式で与えられる。

$$\det |\delta_{m,n} - \omega^2 \rho h G_3(x_m, y_m, x_n, y_n) \Delta S_n| = 0$$

$$(m, n = 1, 2, 3, \dots, N) \dots\dots\dots (4)$$

ただし、 ΔS_n は分割された微小領域の面積 [図 1 (a) 参照], (x_n, y_n) は微小領域の代表点の座標, ω は角振動数, および $\delta_{m,n}$ は Kronecker の δ である。

2・2 関数 G_1, G_2, G_3 の計算 関数 G_1, G_2 , および G_3 をそれぞれ次のように仮定する。

$$G_1(x, y, \xi, \eta) = \sum_{i=1}^l A_i(\xi, \eta) \phi_1(x, y) x^k y^l \dots\dots (5)$$

$$G_2(x, y, \xi, \eta) = \sum_{i=1}^l B_i(\xi, \eta) \phi_1(x, y) x^k y^l \dots\dots (6)$$

$$G_3(x, y, \xi, \eta) = \sum_{i=1}^l C_i(\xi, \eta) \phi_2(x, y) x^k y^l \dots\dots (7)$$

ただし、 $A_i(\xi, \eta)$, $B_i(\xi, \eta)$, および $C_i(\xi, \eta)$ は単位荷重の作用位置 (ξ, η) により決まる定数, k, l は零および正整数, i は正整数であり, k と l は i により決められる。また、関数 $\phi_1(x, y)$ は G_1, G_2 が、関数 $\phi_2(x, y)$ は G_3 が板の周辺での境界条件を満足するための関数である。ガラーキン法に従って、係数 $A_i(\xi, \eta)$, $B_i(\xi, \eta)$, および $C_i(\xi, \eta)$ を決める。すなわち、

(a) 板の分割方法

(b) r 番めの層

図 1 非対称積層長方形板

$$\left. \begin{aligned} \iint L_1(G_1, G_2, G_3) \phi_1(x, y) x^{k'} y^{l'} dx dy &= 0 \\ \iint L_2(G_1, G_2, G_3) \phi_1(x, y) x^{k'} y^{l'} dx dy &= 0 \\ \iint [L_3(G_1, G_2, G_3) - \delta(x-\xi) \cdot \delta(y-\eta)] \\ &\times \phi_2(x, y) x^{k'} y^{l'} dx dy = 0 \\ &(k', l' = 0, 1, 2, \dots) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (8)$$

式(8)を変形すると、 $A_i(\xi, \eta)$, $B_i(\xi, \eta)$, および $C_i(\xi, \eta)$ に関する連立一次方程式が得られる。この連立一次方程式より求められる $A_i(\xi, \eta)$, $B_i(\xi, \eta)$, および $C_i(\xi, \eta)$ をそれぞれ式(5)~(7)に代入することにより、関数 G_1, G_2 , および G_3 が求められる。

3. 計 算 例

提案した数値計算法の収束性を検討するため、非対称積層板の一種である逆対称アングルプライ積層(全層数が偶数)長方形板に本解析法を適用した(図 1 参照)。逆対称アングルプライ積層板の場合、曲げ剛性、伸び剛性、およびカップリング剛性の一部は零となり、式(1)に含まれる微分演算子は⁽¹⁰⁾,

$$\begin{aligned} L_1(u, v, w) &= A_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + A_{66} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ &+ (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - 3B_{16} \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} - B_{26} \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} \end{aligned} \dots\dots\dots (9)$$

$$\begin{aligned} L_2(u, v, w) &= A_{66} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + A_{22} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \\ &+ (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - B_{16} \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - 3B_{26} \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \end{aligned} \dots\dots\dots (10)$$

$$\begin{aligned} L_3(u, v, w) &= D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + D_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \\ &+ 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} - 3B_{16} \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} - B_{26} \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} \\ &- B_{16} \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} - 3B_{26} \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial y^2} \end{aligned} \dots\dots\dots (11)$$

上式に含まれる、 D_{ij}, A_{ij}, B_{ij} ($i, j = 1, 2, 6$) はそれぞれ、曲げ剛性、伸び剛性、およびカップリング剛性であり、各層の繊維方向、繊維に対して直角方向の弾性係数 E_1, E_2 , せん断弾性係数 G_{12} , ポアソン比 ν_{12}, ν_{21} および繊維角度 θ_r より求められる。また、板の境界条件は四辺固定のため、境界 $x=0$ および $x=a$ において、

$$u = v = w = \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \dots\dots\dots (12)$$

境界 $y=0$ および $y=b$ において、

$$u=v=w=\frac{\partial w}{\partial y}=0 \quad \dots\dots\dots (13)$$

関数 G_1, G_2, G_3 が境界条件, 式(12)および(13), を満足するためには, 関数 G_1, G_2, G_3 に含まれる $\psi_1(x, y)$ および $\psi_2(x, y)$ は次の関数であればよい.

$$\psi_1(x, y) = x(x-a)y(y-b) \quad \dots\dots\dots (14)$$

$$\psi_2(x, y) = x^2(x-a)^2y^2(y-b)^2 \quad \dots\dots\dots (15)$$

板の分割方法は図1(a)に示すように x 方向, y 方向ともに等分割とした. また, 積層材料は表1に示す代表的な3種類のエポキシ樹脂を母材とするFRPとした⁽¹¹⁾. 固有角振動数は繊維方向の弾性係数 E_1 を基準とする曲げ剛さ $D_0 = E_1 h^3 / 12(1 - \nu_{12}\nu_{21})$ を用いて無次元化した. 提案した数値計算法の収束性を検討するため, 比較的異方性の度合いが強いグラファイト繊維強化エポキシ材からなる, 積層構成 $[\theta/-\theta/\theta/-\theta]$, 繊維角度 $\theta = 45^\circ$ の4層の正方形板に本解析法を適用した. 表2はガラーキン法に用いられる試行関数の項数 I が固有角振動数の収束性に及ぼす影響を示し, 表3は板の分割数 N の影響を表す. 表2, 3より明らかにガラーキン法に用いる項数 I は66項, 板の分割数は $N = 15 \times 15 = 225$ とすれば, 低次振動の場合には十分収束した値が得られる. 以下の計算では $I = 66$, $N = 15 \times 15 = 225$ とした. 計算例として, アスペクト比 (a/b) を変えた場合の長方形板の1~4次の固有角振動数を表4に示す. 積層構成は $[\theta/-\theta/\theta/-\theta]$, 繊維角度は $\theta = 30^\circ$ であり, 積層材料は表1に示された3種類のFRPとした. 繊維角度 θ が固有角振動数 ω およ

び振動モードに及ぼす影響を図2に表す. 図2(a)は四辺固定正方形板(一辺の長さ a)の場合を, 図2(b)は四辺固定長方形板(アスペクト比は $a/b = 1.5$)の場合である. 図2より, 繊維角度が変化するに従い, 固有角振動数はかなり変化するが, 著者らにより提案された数値計算法による対称積層板の解析結果と比較して振動モードは複雑に変化しない.

4. 実験的検討

実験の様子を図3に示す. 試験片はプリプレグシート8層をオートクレーブ成形した逆対称アングルプライ積層板である(板厚 $h = 1.56 \times 10^{-3}$ m). 各2層を一組として積層されているので, 積層構成は $[\theta/-\theta/\theta/-\theta]$, 繊維角度は $\theta = 30^\circ$ である. ラミナの材料定数の

表3 4層の四辺固定正方形板の固有角振動数 $\omega_s / \sqrt{D_0 / \rho h b^4}$ の収束性(グラファイト繊維強化エポキシ材, $[\theta/-\theta/\theta/-\theta]$, $\theta = 45^\circ$, $I = 66$)

Division number N	$\omega_s / \sqrt{D_0 / \rho h b^4}$			
	$s=1$	$s=2$	$s=3$	$s=4$
9	22.941	42.326	42.563	61.909
25	23.155	44.844	44.851	69.937
49	23.166	44.971	44.978	70.458
81	23.168	44.991	44.996	70.542
121	23.169	44.996	45.001	70.564
169	23.169	44.999	45.002	70.571
225	23.169	44.998	45.003	70.574

表4 4層の四辺固定長方形板の固有角振動数 $\omega_s / \sqrt{D_0 / \rho h b^4}$ ($[\theta/-\theta/\theta/-\theta]$, $\theta = 30^\circ$, $I = 66$, $N = 225$)

Aspect ratio a/b	$\omega_s / \sqrt{D_0 / \rho h b^4}$			
	$s=1$	$s=2$	$s=3$	$s=4$
E-Glass/Epoxy				
1.0	28.884	54.307	62.439	87.247
1.2	23.878	46.626	50.081	72.241
1.5	20.176	34.045	46.916	56.225
2.0	17.700	24.821	36.774	44.688
2.5	16.725	20.921	28.170	38.477
3.0	16.254	18.981	23.745	30.645
4.0	15.832	17.228	19.674	23.255
Boron/Epoxy				
1.0	23.278	37.640	52.433	59.583
1.2	18.313	32.845	38.747	54.811
1.5	14.404	27.584	29.041	44.037
2.0	11.552	18.970	26.194	29.873
2.5	10.331	15.042	22.063	24.926
3.0	9.7096	12.944	17.842	24.257
4.0	9.1315	10.909	13.673	17.328
Graphite/Epoxy				
1.0	23.324	37.475	52.722	59.149
1.2	18.316	32.672	38.846	54.398
1.5	14.386	27.550	28.866	43.672
2.0	11.532	18.873	26.037	29.850
2.5	10.321	14.942	21.961	24.777
3.0	9.7086	12.858	17.719	24.110
4.0	9.1420	10.854	13.562	17.193

表1 FRPの材料定数

Material	E_1 (GPa)	E_2 (GPa)	G_{12} (GPa)	ν_{12}
E-Glass/Epoxy	60.7	24.8	11.99	0.23
Boron/Epoxy	209	19	6.4	0.21
Graphite/Epoxy	138	8.96	7.1	0.30

表2 4層の四辺固定正方形板の固有角振動数 $\omega_s / \sqrt{D_0 / \rho h b^4}$ の収束性(グラファイト繊維強化エポキシ材, $[\theta/-\theta/\theta/-\theta]$, $\theta = 45^\circ$, $N = 225$)

Number of terms I	$\omega_s / \sqrt{D_0 / \rho h b^4}$			
	$s=1$	$s=2$	$s=3$	$s=4$
3	23.228	45.639	45.639	—
6	23.197	45.516	45.516	71.008
10	23.192	45.085	45.085	70.692
15	23.176	45.069	45.069	70.687
21	23.175	45.019	45.019	70.655
28	23.170	45.015	45.015	70.592
36	23.170	45.003	45.003	70.587
45	23.168	45.000	45.002	70.431
55	23.169	44.994	45.003	70.581
66	23.169	44.998	45.003	70.574

(a) 正方形板 ($a/b=1.0$) (b) 長方形板 ($a/b=1.5$)

図 2 4 層の逆対称アングルプライ積層長方形板の固有角振動数に及ぼす繊維角度 θ の影響 (グラファイト繊維強化エポキシ材, $[\theta/-\theta/\theta/-\theta]$)

実測値は, $E_1=97.62$ GPa, $E_2=6.26$ GPa, $G_{12}=5.18$ GPa, $\nu_{12}=0.33$, および $\rho=1535$ kg/m³ である。四辺固定の境界条件を満足させるため, 頑強なアルミニウムの周辺固定用ジグ [詳細は文献(8)参照] で積層板を挟み, ボルトで締付けた。締付けはトルクレンチで均一に締め, 締付け力による固有振動数の収束性をも検討した。実験には $a=b=0.2$ m の正方形板と, $a=0.24$ m, $b=0.16$ m の長方形板を用いた。振動の検出にはひずみゲージあるいは加速度センサを用い, ひずみゲージは節線の現れない位置に, 加速度センサは板の中心に接着した(表5の場合)。表5は固有振動数 f_s の計算結果と実験結果との比較を示す。加速度センサの場合の計算結果にはセンサの質量 4.8 g を集中質量として考慮している。実験結果と計算結果は比較的良好一致している。次に, モーダル解析により得られた振動モードと計算により得られた振動モードの比較を図

表 5 四辺固定逆対称アングルプライ積層長方形板の固有振動数 (CFRP)

Natural frequencies f_s (Hz)				
Order	Strain gage		Accelerometer	
s	Experiment	Analysis	Experiment	Analysis
Square Plate ($a/b=1.0$)				
1	326.0	334.9	269.0	292.3
2	546.0	538.3	534.0	538.3
3	761.0	757.0	722.0	757.0
4	872.0	850.1	778.0	773.3
5	1008.0	997.9	979.0	997.9
Rectangular Plate ($a/b=1.5$)				
1	327.0	324.9	290.0	295.1
2	638.0	621.9	625.0	621.9
3	685.0	652.7	658.0	652.7
4	1021.0	985.8	979.0	964.8
5	1054.0	1061.6	1017.0	985.8

Note : The accelerometer is attached at the center of the plate.

図 3 四辺固定正方形板の加振実験

4 に示す。図中の細線はモーダル解析により得られた節線を, 太線は数値解析により求められた節線を表す。図中の●印は加速度センサを接着した位置を示す。図より明らかなように, 両者はよい一致を示している。また, 表5と図4では固有振動数が異なるが, この理由は加速度センサの位置が異なるためである。

5. 結 論

先に提案した板の静的曲げ問題のグリーン関数を用いて対称積層板の自由振動問題を解析する方法を非対称積層板の自由振動問題に拡張した。

計算例として, 全層数が偶数である逆対称アングルプライ積層長方形板の自由振動問題を解析した。境界条件は四辺固定とした。その結果, 低次固有角振動数に関しては, 十分収束した値が得られた。次に, 報告例が比較的少ない FRP 逆対称アングルプライ積層長方形板に関して, 材料定数およびアスペクト比を変化させた場合の固有角振動数を計算した。さらに, 逆対称アングルプライ積層板の繊維角度が固有角振動数および振動モードに及ぼす影響を検討した結果, 対称アングルプライ積層板の振動モードほど逆対称アングルプ

Modal order		2nd mode	3rd mode	4th mode	5th mode
Nodal pattern	Square Plate $a/b=1.0$
Natural frequency [Hz]	Analysis	509.98	706.95	821.05	928.59
	Experiment	511.67	704.84	827.73	934.57
Nodal pattern	Rectangular Plate $a/b=1.5$
Natural frequency [Hz]	Analysis	616.64	649.58	953.47	1044.19
	Experiment	594.47	623.88	919.41	1014.17

図 4 四辺固定逆対称アングルプライ積層長方形板の振動モード (CFRP)

ライ積層板の振動モードは複雑に変化しないこと、逆に、固有角振動数はかなり変化することが明らかになった。

逆対称アングルプライ積層板の固有振動数および振動モードの実験結果と数値計算結果とを比較した結果、両者はよく一致し、数値計算法の妥当性が明らかになった。対称積層板についても同様の結果が得られており⁽⁸⁾、積層板の自由振動を解析するのに本解析法は大いに有効であると思われる。

本論文では、逆対称アングルプライ積層板のみを示したが、本方法はそれ以外の非対称積層板も同様にして解析できる有用な方法であると思われる。また、本解析法を四辺固定された長方形板に適用したが、対称積層板の自由振動に関して示したように⁽⁷⁾⁽⁸⁾、関数 G_1 , G_2 , G_3 の計算法を考慮すれば、各種形状および境界条件を有する板を解析できると思われる。

本研究を行うにあたり、試験片をご提供いただいた(株)有沢製作所に感謝する。

文 献

- (1) Leissa, A. W. and Narita, Y., *J. Comp. Struct.*, **12** (1990), 113.
- (2) 成田, 機講論, No. 900-44, A (1990-7), 387.
- (3) 鈴木・松本・座古, 機論, **55**-511, C (1989), 533.
- (4) 松本・鈴木, 機講論, No. 900-86 (1990-11), 200.
- (5) 松本・座古・鈴木, 機講論, No. 910-62 (1991-10), 428.
- (6) 一ノ宮・成田・丸山, 機論, **55**-516, C (1989), 1897.
- (7) 細川・矢田・坂田, 機論, **57**-543, C (1991), 3413.
- (8) 細川・矢田・坂田, 機論, **58**-555, C (1992), 3184.
- (9) 細川・矢田・坂田, 機講論, No. 910-79 (1991-11), 83.
- (10) Lin, C. C. and King, W. W., *J. Sound Vib.*, **36**-1 (1974), 91.
- (11) Vinson, J. R. and Sierakowski, R. L., *The Behavior of Structures Composed of Composite Materials*, (1986), 323, Martinus Nijhoff Pub.