振動インテンシティによる動吸振器の効果*

本 多 聡 志^{*1}, 長 松 昭 男^{*2}, 鈴 木 英 男^{*3}

Effect of Dynamic Absorber with Vibration Intensity

Satoshi HONDA, Akio NAGAMATSU and Hideo SUZUKI

The relationship between kinematic energy flow and the effect of the dynamic absorber on suppression of vibration is studied. Energy flow is shown as vibration intensity. It is clarified by simulation that the effect varies according to where the absorber is attached, even if all positions have the same maximum amplitude of vibration.

Key Words: Vibration Intensity, Vibration Mode, Dynamic Absorber, Forced Vibration, Resonance Peak, Kinematic Energy

1. は じ め に

機械構造物の振動を低減する方法としては、問題となる共振を回避するような構造にする、減衰剤を塗布する、動吸振器のような制振器を取付ける、能動的に振動を制御する、などの方法がある。これらの中で動吸振器は、(1)エネルギーを外部から供給する必要がない、(2)取付けることにより系が不安定になることがない、(3)構造が簡単であるため保守が容易、など種々の利点があり、多用されている。

動吸振器の研究は古く、1920 年代の Den Hartog⁽¹⁾らによって求められた 1 自由度系に対する単一動吸振器の設計に始まる。その後、設計値の変化による制振効果低減を改善した二重動吸振器⁽²⁾や、多自由度系の複数モードを同時に制振するための調製手法⁽³⁾、さらに能動制御と組合せたハイブリッド形動吸振器⁽⁴⁾等も研究されている。これらは、固有モードを抑えるといった観点から、いずれも対象物の自由振動の特定の固有モードに同調させるよう設計するのが現状である。

さて、多自由度系において、振動の腹(振幅が極大の地点)が複数存在する固有モードの振動を抑えるために動吸振器を用いる場合には、振幅が同一であれば、どの振動の腹に取付けても、その効果が同じであるとされていた。それは自由振動の情報から動吸振器の設計が行われる以上、当然の結果であると言える。

一方、実際の機械構造物に動吸振器を用いる目的としては、自由振動ではなく強制振動応答の低減であることが圧倒的に多い。強制振動では、力学的エネルギーが流入する加振点が必ず存在し、その点からエネルギーが機械構造物全体に拡散していく。そこで、固有モードが有する複数の振動の腹のいずれかに動吸振器を取付ける場合には、加振点と動吸振器の取付地点の位置関係により、たとえ振幅が同一であっても動吸振器の効果には差があるのではないかと疑われる。

このような疑問は、振動をエネルギーの面から見ることによって初めて生ずる。動吸振器はエネルギーを吸収することによって振動を抑制する装置であるから、その現象や効果を論ずるためには、エネルギー流れを考慮する必要がある。しかし著者らの知る限りでは、このような研究はまだない。そこで本論文では、まず強制振動応答における力学的エネルギーの流れを振動インテンシティベクトルの形で示す。解析対象は、

* 原稿受付 平成 5 年 9 月 20 日。

^{*1} 正員、東京工業大学大学院 (●152 東京都目黒区大岡山 2-12-1)。^{*2} 正員、東京工業大学工学部。^{*3} 正員、(株)小野測器 (●226 横浜市緑区白山 1-16-1)。

板厚一定の長方形平板とし、動吸振器を用いないときに板を流れるエネルギーを計算し図示する。次に、動吸振器を取付けたときのエネルギー流れを計算し、たとえ振幅が同一の場所でも、動吸振器の取付位置によってその振動低減効果に差があることを、周波数応答関数によって示す。

2. 振動インテンシティの理論

振動インテンシティは、1970 年代に Pavic⁽⁵⁾ らによって提唱されたものであり、平板の場合には、その単位幅、単位断面当たり、単位時間当りに流れるエネルギーで定義される。ここでは曲げ振動のみを対象とするので、回転慣性とせん断変形は無視する。

xy 平面を板面としたとき、板要素に作用する力とモーメントは、面外変位を ζ とすると以下になる。

$$\begin{aligned} M_{xx} &= -B \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right), \\ M_{yy} &= B \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \right) \end{aligned} \quad (1)$$

ねじりモーメント

$$M_{xy} = -M_{yx} = B(1-\nu) \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y} \quad (2)$$

図 1 12 点差分近似による計測点

図 2 2 点間のクロススペクトルによる計測点

せん断力

$$Q_x = B \frac{\partial}{\partial x} (\nabla^2 \zeta), \quad Q_y = B \frac{\partial}{\partial y} (\nabla^2 \zeta) \quad (3)$$

ここで B は板の曲げ剛性であり、ポアソン比を ν 、ヤング率を E 、板厚を h として次式で表される。

$$B = \frac{Eh^3}{12(1-\nu)} \quad (4)$$

エネルギーは力と速度、またはモーメントと角速度の積として定義されるので、 x 方向の時刻 t における瞬時振動インテンシティ $W_x(x, y, t)$ は、次の式で表される。

$$\begin{aligned} W_x(x, y, t) &= Q_x \frac{\partial \zeta}{\partial t} + M_{xx} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial t} + M_{xy} \left(-\frac{\partial^2 \zeta}{\partial y \partial t} \right) = B \left[\frac{\partial}{\partial x} (\nabla^2 \zeta) \frac{\partial \zeta}{\partial t} - \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right) \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial t} \right. \\ &\quad \left. - (1-\nu) \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y \partial t} \right] \end{aligned} \quad (5)$$

ここで、第 1 項はせん断力による項で、第 2 項は曲げモーメントによる項、第 3 項はねじりモーメントによる項である。これを 1 周期について時間平均し、周波数 f におけるスペクトル密度によって振動インテンシティを表す。 y 方向については式の x と y を入れ換えればよい。式 (5) によると振動インテンシティを計算するためには、平面内の直交成分の 3 回微分まで必要とすることがわかる。このため差分近似を行う場合、計測点まわりの 8 箇所の差分点を必要とするが、 xy 方向の対称性から差分点 12 箇所を図 1 のように決めて、その面外変位を $\zeta_1 \sim \zeta_{12}$ とする。差分間隔を Δ として式 (1) の各項を有限差分近似すれば、式 (6) のように表される。

$$\begin{aligned} W_x(x, y, t) &= \frac{\pi f B}{4j \Delta^3} \{ (\bar{\zeta}_1 + \bar{\zeta}_2 + 2\bar{\zeta}_3 - 9\bar{\zeta}_4 + 3\bar{\zeta}_5 - 2\bar{\zeta}_6 - 2\bar{\zeta}_7 + 9\bar{\zeta}_8 - 3\bar{\zeta}_9 + 2\bar{\zeta}_{10} - \bar{\zeta}_{11} - \bar{\zeta}_{12}) (\bar{\zeta}_4^* + \bar{\zeta}_5^* + \bar{\zeta}_8^* + \bar{\zeta}_9^*) \\ &\quad - (\bar{\zeta}_4^* + \bar{\zeta}_5^* - \bar{\zeta}_8^* - \bar{\zeta}_9^*) \{ (\bar{\zeta}_1 + \bar{\zeta}_2 - \bar{\zeta}_4 - \bar{\zeta}_5 - \bar{\zeta}_8 - \bar{\zeta}_9 + \bar{\zeta}_{11} + \bar{\zeta}_{12}) + \nu (\bar{\zeta}_3 + \bar{\zeta}_7 - \bar{\zeta}_4 - \bar{\zeta}_5 - \bar{\zeta}_8 - \bar{\zeta}_9 + \bar{\zeta}_{10}) \\ &\quad - 4(1-\nu) (\bar{\zeta}_4 - \bar{\zeta}_5 - \bar{\zeta}_8 + \bar{\zeta}_9) (\bar{\zeta}_4^* - \bar{\zeta}_5^* + \bar{\zeta}_8^* - \bar{\zeta}_9^*) \} \} \end{aligned} \quad (6)$$

ここで $\bar{\zeta}$ は、 ζ のフーリエ変換である。

次に、曲げ振動の伝ぱが x 方向だけに生じる場合について考える。無限の板が外力や境界の拘束力を受けずに振動している場合を考えると、振動インテンシティは次のように与えられる。

$$W_x(x, f) = \frac{(2\pi f)^2 \sqrt{Bm}}{j} \left(\bar{\zeta} \frac{\partial \bar{\zeta}^*}{\partial x} - \bar{\zeta}^* \frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial x} \right) = 2(2\pi f)^2 \sqrt{Bm} \operatorname{Im} \left[\bar{\zeta} \frac{\partial \bar{\zeta}^*}{\partial x} \right] \quad (7)$$

この式を有限差分近似すると、図 2 に示すような計測点前後の 2 箇所の測定点のクロススペクトルから、式 (8) のように計算することができる。

$$W_x(x, f) \approx 2(2\pi f)^2 \sqrt{Bm} \frac{\bar{\zeta}_1 + \bar{\zeta}_2}{2} \frac{\bar{\zeta}_2^* - \bar{\zeta}_1^*}{\Delta} \approx \frac{(2\pi f)^2 \sqrt{Bm}}{\Delta} (\bar{\zeta}_1 \bar{\zeta}_2^* - \bar{\zeta}_2 \bar{\zeta}_1^*) = \frac{2(2\pi f)^2 \sqrt{Bm}}{\Delta} \operatorname{Im} [\bar{\zeta}_1 \bar{\zeta}_2^*] \quad (8)$$

この仮定は、力の釣合いが変化する加振点近くや、特性の異なる境界部分では成立しない。

3. 周辺支持平板における 振動インテンシティ

まず、動吸振器を取付けない場合の二次元平板において、強制振動応答のシミュレーション結果を用いて

図3 四辺支持平板モデル

各モードの周波数における振動インテンシティを計算する。解析対象は図3に示す平板で、これを等間隔の四辺形要素に分割し、有限要素法によってモード特性を解析する。これを用いて各節点の周波数応答関数(コンプライアンス)を計算し、その結果をインテンシティの計算式(6)、(8)の $\bar{z}$ の入力として用いる。これは、その周波数応答関数が、単位振幅力が作用するときの面外変位 z のフーリエ変換 $\bar{z}$ になっているからである。構造減衰係数は0.3%と仮定し、境界条件は四辺とも単純支持とする。加振位置は図3中左下の●印(節点番号49番)の地点で、面外方向加振とし、同図中▲印(A~H)のいずれかの点に動吸振器を取付ける。

図4に、動吸振器を取付けない場合の振動インテンシティのベクトル図を一次から五次の固有モード形とともに示す。なおベクトル図はそれぞれの最大値の振幅で正規化している。左列は式(6)を用いた12点の差分近似による結果、右列は式(8)を用いた2点のクロススペクトルによる計算結果で、いわば簡便法によるものである。

振動インテンシティのベクトル図は、(1)加振点から放射して周辺に向かって徐々にエネルギーが吸収されていく形、(2)蛇行する形、(3)渦を巻く形の三と

1st (165 Hz)

2nd (343 Hz)

3rd (482 Hz)

4th (640 Hz)

5th (660 Hz)

Mode shape

Finite difference method (12-point)

Cross-spectrum method

図4 四辺支持平板における振動インテンシティのベクトル図

おり⁽⁶⁾があり、ここにあげた中では、一次と二次が(1)に、三次～五次が(3)に相当する。双方とも、エネルギーは各振動モードの節にほぼ直交する様に流れているが、式の導出の仮定に差異があるため、やや様子が異なっている。しかしながら、伝達経路については双方とも大差なく、動吸振器の効果を調べるための経路特定と流量分析にはどちらの解析方法を用いてもよいことがわかる。

4. 動吸振器取付時の振動インテンシティ

動吸振器を設計する場合には、その設置場所によって効果が異なるので、どこに動吸振器を設置するかということが問題となり、連続体や多自由度系に対しては、設置場所を慎重に選定しないと制振効果を高めることはできない。また、 n 個のモードを制振するためには原則として n 個の動吸振器を必要とするが、多くの動吸振器を付加すると、元の系そのものに変化を与えてしまうため、なるべく軽量の動吸振器を効率よく配置することが要求される。動吸振器の質量を小さくして効率を上げるためには、対象とするモードでの最大振幅の地点、つまり腹に設置すればよいことが知られている⁽⁷⁾。最大振幅の地点は等価質量が最も小さく、動吸振器の効果が大きいためである。さらに、対象とする固有モード以外の固有モードになるべく影響を与えないためには、他の固有モードの振幅がなるべく小さく、できれば節になっているところを選ぶなどの工夫が必要となる⁽⁷⁾。図5には、図3に示した周辺単純支持平板における二次、三次、五次の固有モードを示す。図5中の点線は振動の節である。

上記のことを考慮すれば、これらの各固有モードの振動を低減するための動吸振器を設置する場合、候補に上げられる設置場所(最大振幅点)が複数存在する。従来の固有モード形を基準とした設計指針では、振幅

表 1 動吸振器の最適諸元

Mode	$m[\text{kg}]$	$k[\text{N/m}]$	$c[\text{Ns/m}]$
2 n d	0.3019	1272.1	0.1656
3 r d	0.3019	2507.2	0.2325
5 t h	0.3019	4703.1	0.3184

図 5 各固有モードの節線と最大振幅点
[▲：最大振幅点(動吸振器取付点)，●：加振点]

が同一であれば、これらのうちこの振動の腹に動吸振器を取付けても効果が同じであると考えられていた。このことの正否を調べるために、それぞれの固有モードにおいて振動インテンシティを利用して動吸振器の効果を比較する。動吸振器取付けによる系の変更をなるべく避けるために、動吸振器の質量と主系の質量の比は 0.05 と小さめに設定し、Den Hartog らの設計式に基づいて同調させてある。各モードにおける取付位置は図3と図5に示すとおりで、二次固有モードが A と B, 三次固有モードが C と D, 五次固有モードが E, F, G, H である。また、動吸振器の諸元の最適値は表1のとおりである

それぞれ取付位置を変えた状態で振動インテンシティを計算したものを、エネルギーの主な流れの概略図とともに以下に示す。ここでのインテンシティの計算は式(6)の12点の差分近似による方法を用い、取付位置の違いによるエネルギーレベルの相違がわかるように、各ベクトル図中の最大値で正規化してある。

図6に、二次の共振振動数で加振するときのエネルギー

図 6 振動インテンシティによる二次固有モードでの動吸振器の効果

ギー流れを示す。動吸振器を付けない場合、図中左下●印の加振点で流入したエネルギーが、節線に直交するようにやや蛇行して流れ、少しずつ一様に吸収され減少しながら板全体に広がっていく。左の点 A に動吸振器を付けた場合は、加振点で流入したエネルギーが、それに近い点 A の動吸振器に吸収され、右半面にはほとんど流れていない。一方、右の点 B に付けた場合は、付けないときの流れを基本とし、節線を横切った後に動吸振器に流れ込んでいる。このように、加振点に近い左側の点 A に付けたほうが板全体のエネルギー流れを小さくできることがわかる。

二次固有モードの共振振動を抑えるために動吸振器を取付ける場合には、従来は左右対称な固有モードの腹のうち、点 A と B のどちらに付けてもその効果は同一であるとされていた。しかし、エネルギー流れを比較すると、以上のように両者間には明らかな相違があることがわかった。そこで、動吸振器の取付けによる共振峰の低減効果を、周波数応答関数によって調べてみる。図 7, 8, 9 は、それぞれ加振点の自己コンプライアンス、加振点と点 A の間の相互コンプライアンス、加振点と点 B の間の相互コンプライアンスを示す。いずれの図においても、点線が動吸振器を取付けないうち、実線が取付けたときである。また、それぞれ上の図が点 A に、下の図が点 B に動吸振器を取付けた場合である。

まず図 7 について述べる。点 A に取付けたほうは、二次共振峰がほぼ等しく二つに割れており、動吸振器が効果的に働くことを示している。これに対して点 B に取付けた場合は、二つに割れた共振峰のうちで、低

周波数側のレベルが若干高くなっている。つまり、1 自由度系の自由振動に対する設計指針では最適調整から若干外れるのと同じような状態になることがわかる。

次に図 8 について述べる。点 A に動吸振器を取付けた場合は、図 7 と同様に二次の共振峰がほぼ等しく割れているが、点 B に取付けた場合は、やはり低次側のレベルがわずかに高くなった。さらに反共振点もずれている。次に図 9 では、取付位置による差異は少なかった。

このように、各部の周波数応答関数で比較すると、従来の常識とは異なり、同一振幅の固有モードの腹でも、加振点との位置関係によって動吸振器の取付効果にはわずかながらあるが、相違が生ずることがわかる。

図 10 は、三次の共振振動数で加振するときのエネルギー流れを示す。動吸振器を付けないときには、左下の加振点で流入したエネルギーが節をまたいで流れ、右回りの渦が発生している。上の点 C に動吸振器を取付けた場合には、その点でエネルギーが吸収されるために、流れがせき止められ、右半面の渦の発生は阻止される。これに対して下の点 D に動吸振器を取付けた場合は、節をまたいだ流れが回って戻ってきて、点 D の動吸振器に流れ込んでいる。

次に周波数応答関数を調べてみる。図 11, 12, 13 は、それぞれ加振点の自己コンプライアンス、加振点と点 C の間の相互コンプライアンス、加振点と点 D の間の相互コンプライアンスを示す。いずれの図においても、点線が動吸振器を取付けないうち、実線が取付けたときである。また、それぞれ上の図が点 C に、下の図が

図 7 動吸振器効果の比較(二次モード制振/加振点自己コンプライアンス)

図 8 動吸振器効果の比較(二次モード制振/加振点～点 A 間のコンプライアンス)

図 9 動吸振器効果の比較(二次モード制振/加振点～点 B 間のコンプライアンス)

図 10 振動インテンシティによる三次固有モードでの動吸振器の効果

点 D に動吸振器を取付けた場合である。

まず、図 11 について述べる。点 C に取付けたものは動吸振器の最適調整状態からのずれは少なく、効果的に三次共振峰が低減している。しかし点 D に付けたものは、同じ動吸振器を取付けたのにもかかわらず、共振峰が等しく割れないで高次側(約 500 Hz)にずれており、動吸振器の効果が少し小さい。このように周波数応答関数上でも、点 C のほうが点 D よりも動吸振器の効果が高いという明らかな差が認められる。

次に図 12 について述べる。このときにも周波数応答関数は、点 C に取付けたほうがレベルが低く、点 D に取付けたものは高周波数側が高い。次に図 13 では、三次共振峰付近で点 C に取付けたものより点 D に取付けたもののほうがわずかに低い、両者の傾向はほとんど同じである。

図 14 は、五次の共振振動数で加振するときのエネルギー流れを示す。動吸振器を付けないときのベクトル図を見ると、板全体を大きく右回りする流れができています。五次モードでは、振動の節が図 5 のように十字状になり、最大振幅点は 4 箇所あるので、動吸振器をこの 4 箇所にそれぞれに取付けたものについて比較する。まず、点 F と点 G に取付けたときは、動吸振器のところでエネルギーがよく吸収されていることがわかる。点 F の場合は加振点に近いので、流入したエネルギーが拡散する前に吸収され、エネルギー流れのレベルが最も小さくなっている。点 G の場合は、エネルギーが加振点から半周した後に、十分に吸収されている。これに対して点 E や点 H に取付けた場合には、エネルギー流れのレベルが板全体で大きく、同一の動吸

図 11 動吸振器効果の比較(三次モード制振/加振点自己コンプライアンス)

図 12 動吸振器効果の比較(三次モード制振/加振点～点C間のコンプライアンス)

図 13 動吸振器効果の比較(三次モード制振/加振点～点D間のコンプライアンス)

振器を取付けたのにもかかわらず、効果があまりでない。

次に周波数応答関数を調べてみる。図15は、加振点の自己コンプライアンスである。また図16は加振点と点Gの間の相互コンプライアンスである。いずれの図においても、点線が動吸振器を取付けないとき、実線が取付けたときである。これらの図を見ると、五次固有振動数は四次固有振動数と極めて近く、強制振動では両固有モードの連成が生じやすくなっていることがわかる。一方、図4の固有モード形から明らかなように、図5の点Fと点Gでは四次と五次の固有モードが同相、点Eと点Hでは両者が逆相になっている。両者が同相の場合には、五次固有モードに対する動吸振器を取付けることにより、四次固有モードを抑える効果も生じている。しかし両者が逆相の場合には、五次

固有モードでエネルギーを吸収する動吸振器が、四次固有モードでエネルギーを吐き出す作用をするために、両者の効果が相殺し合い、全体として動吸振器は効果を生じていない。このことは、エネルギー流れを示す図14の結果からもよくわかる。

5. ま と め

従来、自由振動をもとに設計されていた動吸振器の制振効果を、振動エネルギーの流れと定常強制振動の両面から見直した結果、以下のことが判明した。

(1) 連続体や多自由度系において、複数の腹を有する固有モードを制振する場合に、たとえ振幅が同じでも、動吸振器の取付場所によってその効果に差が生じる。

(2) エネルギーの流れる量が多い点、本論文では加振点の近く、或いはエネルギー流れの上流に取付けるほど、動吸振器の効果は大きくなる。

(3) 動吸振器の取付点による効果の差は、エネ

図14 振動インテンシティによる五次固有モードでの動吸振器の効果

図15 動吸振器効果の比較(五次モード制振/加振点自己コンプライアンス)

図16 動吸振器効果の比較(五次モード制振/加振点～点G間のコンプライアンス)

ギーの流れる量が多い点ほど大きく現れる。

(4) 複数の固有モードが接近したり密集している場合には、他の固有モードとの位相関係が動吸振器の効果に大きく影響する。

動吸振器の効果の取付点による差は、少なくとも本研究の対象である長方形平板では、通常実用上問題になるほど大きいものではない。しかしこれを言い換えれば、現在動吸振器の仕様がまだ十分ではないからであり、最大の効率を追及した厳しい設計では、本研究で明らかにした事実が今後問題になると思われる。例えば宇宙構造物のように、重量制限が厳しく、しかも隔離されたエネルギー閉鎖系では、エネルギーの流れを完全に管理したうえで、最小の重量で最大の制振効

果を上げる必要がある。このような系では、動吸振器の設計は、自由振動ではなく強制振動におけるエネルギー流れをもとに行う必要がある。

文 献

- (1) Den Hartog, J. P., *Trans. ASME*, 50(1928), 9.
- (2) 岩波・背戸, 機論, 50-449, C(1984), 44-52.
- (3) 山下・大熊・背戸・長松, 機論, 57-534, C(1991), 399-406.
- (4) 背戸・光田・山下, 機論, 57-534, C(1991) 478-484.
- (5) Pavic, G., *J. Sound Vib.*, (1976), 221; (1987), 115(3).
- (6) 菊島・黒田・田中, 環境工学シンポジウム講演論文集, No. 900-41(1990), 583-589.
- (7) 山下・背戸・大熊・長松, 機論, 52-484, C(1986), 478-484.
- (8) 上玉里, 自動車研究, 7-5(1985), 25-29.
- (9) 沖津・畔上・寺本・小林, 機論, 56-525, C(1990), 1131-1138.