厚肉円筒の理論振動モード解析*

亢 恒^{*1}, 林 巖^{*2}, 岩 附 信 行^{*3}

The Theoretical Modal Analysis of a Thick Cylinder

Heng KANG, Iwao HAYASHI and Nobuyuki IWATSUKI

This paper describes the new theoretical modal analysis of a thick cylinder. The five element-simultaneous second differential equations of elastic vibration of a thick cylinder, which are derived considering rotatory inertia and out-of-plane shear deformation, are rewritten into the ten element-simultaneous first differential equations by introducing new variables. The first differential equations can be solved under various boundary conditions by applying Euler's method. In this paper the equations were solved for a thick cylinder with both ends free. The calculated natural frequencies and mode shapes coincided with those obtained by the experimental and FEM modal analyses with practically sufficient accuracy for all modes.

Key Words: Theoretical Modal Analysis, Natural Frequency, Mode Shape, Free Vibration, Thick Cylindrical Shell

1. 緒 言

著者らは、軽量化のために薄肉の特殊な形状をしている航空機用歯車をサイレント化するための基礎研究を進めている。この研究では、歯車の固有振動モードを正確に求めることが必要であるが、実際の歯車を理論的に扱うことは困難であるので、歯を省略して単純化した軸付円板円筒モデルを対象として進めている。しかしながら軸付円板円筒モデルも一度に理論的に振動モード解析を行うことは困難である。そこで、軸付円板円筒を軸一体円板と円筒とに分け、それぞれについて理論的な振動モード解析を行った後、接続条件を与えて組合せ、軸付円板円筒全体の振動モード解析を行う方法を試みている。

軸一体円板の振動モード解析は、Mindlinの厚肉板理論を用いて行ったこれまでの研究により結果が得られている^{(1),(2)}。厚肉円筒の振動モード解析は、両端単純支持の場合のみ、弾性振動方程式と境界条件の両方を満足する形の解を設定することができて、解析解が得られている⁽³⁾。しかし、その他の固定条件と自由条件の場合には、まだ解析解が得られていない。

そこで著者らは、Mindlinの厚肉板理論を円筒に拡張し、近似的な方法を用いて両端自由厚肉円筒の振動モード解析を試みた。この手法では、与えた近似条件を満足するモードのうち比較的高次モードについては

よい精度で解が得られたが、その他の振動モードは十分な精度で得ることができず、まだ不十分であった⁽⁴⁾。

そこで本研究では、両端自由縁を含む任意の境界条件における厚肉円筒の固有振動モードを正確に求めるため、まず、面外せん断変形と回転慣性の影響を考慮して厚肉円筒の弾性振動方程式を導いた。そして、得られた5元連立2階微分弾性振動方程式に新しく関数を導入して10元連立1階微分方程式に書換え、その一般解をEulerの方法で与えて境界条件と組合せて解く新しい解法を試みた。その結果、固有振動数および固有振動モード形状とも、実験モード解析および有限要素法による振動モード解析ときわめてよく一致した解が得られた。その結果について報告する。

2. 厚肉円筒の理論振動モード解析

2.1 弾性振動方程式の導出 面外せん断変形と回転慣性を考慮した円筒の弾性振動方程式を導く。

厚さ h 、長さ b の厚肉円筒に図1のように円柱座標系 (r, θ, z) を設定する。外側円筒面と内側円筒面の中央を通る面を中央円筒面と名付け、その半径を a とする。中央円筒面の変位を (u, v, w) とおくと、Kirchhoff-Loveの仮説⁽⁵⁾によって、円筒内部の各点の変位 (u_r, u_θ, u_z) は次式で表される。

$$u_r = u, \quad u_\theta = \frac{r}{a}v + (r-a)\psi_\theta, \quad u_z = w + (r-a)\psi_z \quad (1)$$

式中の ψ_θ および ψ_z は、それぞれ中央円筒面の円周方向と軸方向の傾きである。 $u, v, w, \psi_\theta, \psi_z$ は、それぞれ θ, z および時間 t の関数である。

* 原稿受付 平成5年10月29日。

*¹ 正員, 東京工業大学大学院 (〒227 横浜市緑区長津田町4259)。*² 正員, 東京工業大学工学部 (〒152 東京都目黒区大岡山2-12-1)。*³ 正員, 東京工業大学精密工学研究所 (〒227 横浜市緑区長津田町4259)。

r, θ, z 方向の応力の釣合式は、それぞれ次式で与えられる⁽⁶⁾。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{r \partial \theta} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + X_r &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_\theta}{r \partial \theta} + \frac{\partial \tau_{z\theta}}{\partial z} + 2 \frac{\tau_{r\theta}}{r} + Y_\theta &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{\theta z}}{r \partial \theta} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\tau_{rz}}{r} + Z_z &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

ここに、 X_r, Y_θ, Z_z は、円筒の微小要素に作用する r, θ, z 方向の体積力を表し、それぞれ次のように与えられる。

$$X_r = -\rho \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2}, \quad Y_\theta = -\rho \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial t^2}, \quad Z_z = -\rho \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2}$$

ここに、 ρ は厚肉円筒素材の密度である。

体積力を式(2)に代入する。さらに、式(2)の第1, 2, 3式に r/a を乗じて、 $a-h/2 \leq r \leq a+h/2$ で積分する。また、式(2)の第2式および第3式に $r(r-a)/a$ を乗じて、 $a-h/2 \leq r \leq a+h/2$ で積分する。そうすると、次の厚肉円筒の弾性振動方程式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial Q_\theta}{a \partial \theta} + \frac{\partial Q_z}{\partial z} - \frac{T_\theta}{a} + p_r &= \rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\ \frac{\partial T_\theta}{a \partial \theta} + \frac{\partial S_{z\theta}}{\partial z} + \frac{Q_\theta}{a} + p_\theta &= \rho h \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \frac{\rho h^3}{12a} \frac{\partial^2 \psi_\theta}{\partial t^2} \\ \frac{\partial S_{\theta z}}{a \partial \theta} + \frac{\partial T_z}{\partial z} + p_z &= \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{\rho h^3}{12a} \frac{\partial^2 \psi_z}{\partial t^2} \\ \frac{\partial M_\theta}{a \partial \theta} + \frac{\partial M_{z\theta}}{\partial z} - Q_\theta + m_\theta &= \frac{\rho h^3}{6a} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \frac{\rho h^3}{12} \frac{\partial^2 \psi_\theta}{\partial t^2} \\ \frac{\partial M_{\theta z}}{a \partial \theta} + \frac{\partial M_z}{\partial z} - Q_z + m_z &= \frac{\rho h^3}{12a} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{\rho h^3}{12} \frac{\partial^2 \psi_z}{\partial t^2} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

ここで、 $p_r, p_\theta, p_z, m_\theta, m_z$ は円筒の表面に作用する単位幅あたりの外力および外力モーメントである。また、 T_θ, T_z は引張力、 $S_{\theta z}, S_{z\theta}$ は面内せん断力、 Q_θ, Q_z は面外せん断力、 M_θ, M_z は曲げモーメント、 $M_{\theta z}, M_{z\theta}$ はねじりモーメントである。これらは、それぞれ図1

図1 円筒の微小要素に作用する力とモーメント

に示した向きを正とし、次式で定義される。

$$\left. \begin{aligned} [T_z, S_{z\theta}, Q_z] &= \int_{a-h/2}^{a+h/2} [\sigma_z, \tau_{z\theta}, \tau_{zr}] \frac{r}{a} dr \\ [T_\theta, S_{\theta z}, Q_\theta] &= \int_{a-h/2}^{a+h/2} [\sigma_\theta, \tau_{\theta z}, \tau_{\theta r}] dr \\ [M_z, M_{z\theta}] &= \int_{a-h/2}^{a+h/2} [\sigma_z, \tau_{z\theta}] \frac{r}{a} (r-a) dr \\ [M_\theta, M_{\theta z}] &= \int_{a-h/2}^{a+h/2} [\sigma_\theta, \tau_{\theta z}] (r-a) dr \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

応力とひずみの関係式、およびひずみと変位の関係式を用いて式(4)を計算する。そして、積分後に現れる対数はべき級数で展開し、その3乗の項までを取ることにする。つまり、

$$\ln \frac{a+h/2}{a-h/2} = \frac{h}{a} + \frac{1}{12} \left(\frac{h}{a} \right)^3$$

と近似する。そうすると、力およびモーメントはそれぞれ次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} T_\theta &= N \left(\frac{u}{a} + \frac{\partial v}{a \partial \theta} + \nu \frac{\partial w}{\partial z} \right) - D \frac{\partial \psi_\theta}{a^2 \partial \theta} \\ T_z &= N \left[\frac{\partial w}{\partial z} + \nu \left(\frac{u}{a} + \frac{\partial v}{a \partial \theta} \right) \right] + \frac{D}{a} \frac{\partial \psi_z}{\partial z} \\ S_{\theta z} &= \frac{1-\nu}{2} N \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{a \partial \theta} \right) - \frac{1-\nu}{2a} D \frac{\partial \psi_z}{a \partial \theta} \\ S_{z\theta} &= \frac{1-\nu}{2} N \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{a \partial \theta} \right) + \frac{1-\nu}{2a} D \frac{\partial \psi_\theta}{\partial z} \\ Q_\theta &= \frac{\pi^2 G h}{12} \left(\frac{\partial u}{a \partial \theta} + \psi_\theta \right) \\ Q_z &= \frac{\pi^2 G h}{12} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \psi_z \right) \\ M_\theta &= D \left(-\frac{u}{a^2} + \frac{\partial \psi_\theta}{a \partial \theta} + \nu \frac{\partial \psi_z}{\partial z} \right) \\ M_z &= D \left[\frac{1}{a} \left(\frac{\partial w}{\partial z} + \nu \frac{\partial v}{a \partial \theta} \right) + \frac{\partial \psi_z}{\partial z} + \nu \frac{\partial \psi_\theta}{a \partial \theta} \right] \\ M_{\theta z} &= \frac{1-\nu}{2} D \left[\frac{1}{a} \left(\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{a \partial \theta} \right) + \frac{\partial \psi_\theta}{\partial z} + \frac{\partial \psi_z}{a \partial \theta} \right] \\ M_{z\theta} &= \frac{1-\nu}{2} D \left(\frac{2 \partial v}{a \partial z} + \frac{\partial \psi_\theta}{\partial z} + \frac{\partial \psi_z}{a \partial \theta} \right) \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

ここに、 $D (= Eh^3/[12(1-\nu^2)])$ は円筒の曲げ剛性、 $N (= Eh/(1-\nu^2))$ は円筒の伸び剛性で、 E, G, ν は、それぞれ円筒素材の縦弾性係数、横弾性係数、およびポアソン比である。

厚肉円筒の境界条件は次のとおりである。

$$\left. \begin{aligned} 1) \text{ 単純支持縁 } & u = v = \psi_z = M_z = T_z = 0 \\ 2) \text{ 固定縁 } & u = v = w = \psi_z = \psi_\theta = 0 \\ 3) \text{ 自由縁 } & Q_z = S_{z\theta} = M_z = M_{z\theta} = T_z = 0 \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

これらの条件式をそれぞれの端部の条件に合わせて用いればよい。

2.2 理論振動モード解析 厚肉円筒の固有振動モードを求めるため、外力および外力モーメントをすべて0、つまり $p_r = p_\theta = p_z = m_\theta = m_z = 0$ において自

由振動解析を行う。さらに、 $u, v, w, \psi_\theta, \psi_z$ の時間項は $e^{j\omega t}$ とおく。ここで、 ω は角振動数である。

式(5)を式(3)に代入し整理すると、次の中央円筒面の変位 u, v, w および傾き ψ_θ, ψ_z で表した厚肉円筒の弾性振動方程式が得られる。ただし、時間項 $e^{j\omega t}$ は省略してある。

$$\left. \begin{aligned} & G'h \left(\frac{\partial^2 u}{a^2 \partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\partial \psi_\theta}{a \partial \theta} + \frac{\partial \psi_z}{\partial z} \right) \\ & - \frac{N}{a} \left(\frac{\partial v}{a \partial \theta} + \nu \frac{\partial w}{\partial z} \right) + (\rho h \omega^2 - \frac{N}{a^2}) u = 0 \\ & \left(\frac{N}{a} + G'h \right) \frac{\partial u}{a \partial \theta} + N \left(\frac{\partial^2 v}{a^2 \partial \theta^2} + \frac{\nu_1}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) \\ & + \frac{\nu_2}{2} N \frac{\partial^2 w}{a \partial \theta \partial z} + \frac{D}{a} \left(\frac{\nu_1}{2} \frac{\partial^2 \psi_\theta}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \psi_\theta}{a^2 \partial \theta^2} \right) \\ & + \rho h \omega^2 v + \left(G'h + \frac{\rho h^3}{12a} \omega^2 \right) \psi_\theta = 0 \\ & \frac{N\nu}{a} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\nu_2}{2} N \frac{\partial^2 v}{a \partial \theta \partial z} + N \left(\frac{\nu_1}{2} \frac{\partial^2 w}{a^2 \partial \theta^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \\ & + \frac{D}{a} \left(\frac{\partial^2 \psi_z}{\partial z^2} - \frac{\nu_1}{2} \frac{\partial^2 \psi_z}{a^2 \partial \theta^2} \right) + \rho h \omega^2 w + \frac{\rho h^3}{12a} \omega^2 \psi_z = 0 \\ & \left(G'h + \frac{D}{a^2} \right) \frac{\partial u}{a \partial \theta} - D \left(\frac{\nu_1}{2} \frac{\partial^2 \psi_\theta}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \psi_\theta}{a^2 \partial \theta^2} \right) - \frac{\nu_1 D}{a} \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \\ & - \frac{\rho h^3}{6a} \omega^2 v - \frac{\nu_2}{2} D \frac{\partial^2 \psi_z}{a \partial \theta \partial z} - \left(\frac{\rho h^3}{12} \omega^2 - G'h \right) \psi_\theta = 0 \\ & G'h \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\nu_2}{2a} D \frac{\partial^2 v}{a \partial \theta \partial z} - \frac{D}{a} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} - \frac{\nu_1}{2} \frac{\partial^2 w}{a^2 \partial \theta^2} \right) \\ & - \frac{\nu_2}{2} D \frac{\partial^2 \psi_\theta}{a \partial \theta \partial z} - D \left(\frac{\partial^2 \psi_z}{\partial z^2} + \frac{\nu_1}{2} \frac{\partial^2 \psi_z}{a^2 \partial \theta^2} \right) \\ & - \frac{\rho h^3}{12a} \omega^2 w - \left(\frac{\rho h^3}{12} \omega^2 - G'h \right) \psi_z = 0 \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

ここに $G' = \pi^2 G / 12$, $\nu_1 = 1 - \nu$, $\nu_2 = 1 + \nu$ である。

式(7)の解を

$$\left. \begin{aligned} u(\theta, z) &= U(z) \cos m\theta \\ v(\theta, z) &= V(z) \sin m\theta \\ w(\theta, z) &= W(z) \cos m\theta \\ \psi_\theta(\theta, z) &= \Phi(z) \sin m\theta \\ \psi_z(\theta, z) &= \Psi(z) \cos m\theta \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

とおく、ここに $m = 1, 2, \dots$ である。式(8)を式(7)に代入し整理すると、 θ の関数項を消去することができ、次のように z のみの関数の方程式が得られる。

$$[A_{ij}] \mathbf{A} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, 5, \quad j = 1, 2, \dots, 15 \quad (9)$$

ここに、ベクトル $\mathbf{A}$ は

$$\{U, U', U'', V, V', V'', W, W', W'', \Phi, \Phi', \Phi'', \Psi, \Psi', \Psi''\}^T$$

で、 $'$, $''$ はそれぞれ z に関する 1 階微分、2 階微分を表す。マトリクスの要素 A_{ij} は付録 1 に示す。

式(9)を解くために、新しい関数

$$\left. \begin{aligned} Z_1 &= U, \quad Z_2 = U', \quad Z_3 = V, \quad Z_4 = V' \\ Z_5 &= W, \quad Z_6 = W' \\ Z_7 &= \Phi, \quad Z_8 = \Phi', \quad Z_9 = \Psi, \quad Z_{10} = \Psi' \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

を導入する。式(10)を式(9)に代入し、さらに、

$$Z'_1 = Z_2, \quad Z'_3 = Z_4, \quad Z'_5 = Z_6, \quad Z'_7 = Z_8, \quad Z'_9 = Z_{10}$$

の関係をを用いて整理すれば、次の微分方程式が得られる。

$$\mathbf{Z}' = [C_{ij}] \mathbf{Z}, \quad i, j = 1, 2, \dots, 10 \quad (11)$$

ここに

$$\mathbf{Z} = \{Z_1, Z_2, \dots, Z_{10}\}^T$$

$$\mathbf{Z}' = \{Z'_1, Z'_2, \dots, Z'_{10}\}^T$$

である。マトリクスの要素 C_{ij} は付録 2 に示す。

式(11)は 10 元連立同次微分方程式で、Euler の解法を適用して解くことができる⁽⁷⁾。ここで、

$$\mathbf{Z} = \exp(\lambda z) \mathbf{k} \quad (12)$$

の形の解を求める。ここに λ は定数、 $\mathbf{k}$ は 10 元ベクトルである。式(12)を式(11)に代入すると、次式が得られる。

$$\lambda \mathbf{k} = [C_{ij}] \mathbf{k} \quad (13)$$

ここで、 $\mathbf{k} \neq \mathbf{0}$ ($\mathbf{0}$ は 0 ベクトル) と仮定すると、 λ は固有方程式

$$|C - \lambda I| = 0 \quad (14)$$

の根、 $\mathbf{k}$ はそれに対応する固有ベクトルである。ここに $C \equiv [C_{ij}]$ である。

いま C の固有値 λ_j , $j = 1, 2, \dots, 10$ が求まったとし、すべて異なると仮定すると、対応する固有ベクトル $\mathbf{k}_j$, $j = 1, 2, \dots, 10$ は 1 次独立になる。ここで

$$\mathbf{k}_j = \{k_{1j}, k_{2j}, \dots, k_{10j}\}^T$$

である。

さて、得られた解 $\exp(\lambda_j z) \mathbf{k}_j$ はすべて同次方程式(11)の解だから、その一次結合である

$$\mathbf{Z} = \sum_{j=1}^{10} \alpha_j \exp(\lambda_j z) \mathbf{k}_j \quad (15)$$

も式(11)の解になる。ここで α_j は境界条件によって決まる定数である。

ここで固有値と固有ベクトルについて調べたところ、次のような関係が見出された。

1) 固有値 λ_j が実数ならば、固有ベクトル $\mathbf{k}_j$ も実数からなる。また λ_j が実数ならば、 λ_{j+1} も実数である。

2) 固有値 λ_j が複素数ならば、固有ベクトル $\mathbf{k}_j$ も複素数からなる。また λ_j が複素数ならば、 λ_{j+1} も複素数である。

ただし、 $j = 1, 3, 5, 7, 9$ である。

固有値 λ_j および固有ベクトル $\mathbf{k}_j$ の成分 k_{ij} , $i, j = 1, 2, \dots, 10$ をそれぞれ次のように表す。ここに $j = \sqrt{-1}$ である。

$$\left. \begin{aligned} \lambda_j &= \lambda_j^R + j \lambda_j^I \\ k_{ij} &= k_{ij}^R + j k_{ij}^I \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

前述の関係を考慮して、式(15)を計算し整理すると、次式となる。

$$Z = [B_{i,j}(z)] \beta, \quad i, j = 1, 2, \dots, 10 \quad (17)$$

ここに、 $\beta = \{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{10}\}^T$ である。そして

$$\left. \begin{array}{l} 1) \lambda_j \text{ が実数の場合は} \\ B_{i,j}(z) = k_{i,j}^R \exp(\lambda_j^R z) \\ B_{i,j+1}(z) = k_{i,j+1}^R \exp(\lambda_{j+1}^R z) \\ \beta_j = \alpha_j, \quad \beta_{j+1} = \alpha_{j+1} \\ 2) \lambda_j \text{ が複素数の場合は} \\ B_{i,j}(z) = \exp(\lambda_j^R z) (k_{i,j}^I \cos \lambda_j^I z - k_{i,j}^I \sin \lambda_j^I z) \\ B_{i,j+1}(z) = \exp(\lambda_j^R z) (k_{i,j}^I \cos \lambda_j^I z + k_{i,j}^I \sin \lambda_j^I z) \\ \beta_j = \alpha_j + \alpha_{j+1}, \quad \beta_{j+1} = j(\alpha_j - \alpha_{j+1}) \end{array} \right\} \quad (18)$$

ただし、 $i = 1, 2, \dots, 10, j = 1, 3, 5, 7, 9$ である。

式(17)で与えられる Z_1, Z_3, Z_5, Z_7, Z_9 , つまり $U(z), V(z), W(z), \Phi(z), \Psi(z)$ を求め(式(10)), それらを式(8)に代入することにより、中央円柱面の変位 $u(\theta, z), v(\theta, z), w(\theta, z)$ および傾き $\psi_\theta(\theta, z), \psi_z(\theta, z)$ が得られる。さらに、それらを式(5)に代入すると、円周方向の引張力 T_θ などが得られる(付録3参照)。これらを厚肉円筒の両端部について式(6)により与えた境界条件に代入し、 β_j について整理すると、次の式が得られる。

$$[M_{i,j}] \beta = 0, \quad i, j = 1, 2, \dots, 10 \quad (19)$$

一例として、両端自由縁厚肉円筒のマトリクス $[M_{i,j}]$ の要素を付録4に示す。

式(15)の α_j は一般に0でなく、また α_j によって与えられる β_j も一般に0でない値である。したがって、式(19)が常に成立するためには、係数マトリクス $[M_{i,j}]$ の行列式が0にならない。つまり

$$|M_{i,j}| = 0 \quad (20)$$

である。

以上導いた式を用いて、厚肉円筒の固有振動モードの固有振動数および振動モード形状を次の手順で求めることができる。

- 1) 角振動数 ω を与える。
- 2) 係数マトリクス $[C_{i,j}]$ を求める(式(11))。
- 3) マトリクス $[C_{i,j}]$ の固有値 λ_j ($j = 1, 2, \dots, 10$) と固有ベクトル k_j ($j = 1, 2, \dots, 10$) を求める。
- 4) 行列式 $|M_{i,j}|$ の値を求める(式(20))。
- 5) $|M_{i,j}| = 0$, つまり式(20)が成立するとき、角振動数 ω は厚肉円筒の固有角振動数 ω_{mn} と等しい。このときの λ_j, k_j を $\lambda_{j,mn}, k_{j,mn}$ とする。

・ $|M_{i,j}| \neq 0$, つまり式(20)が成立しないとき、上記の1)に戻る。

6) $\lambda_{j,mn}, k_{j,mn}$ および ω_{mn} を用いて、式(18)から $\beta_{j,mn}, j = 1, 2, \dots, 10$ を求める。

7) 得られた $\beta_{j,mn}, \lambda_{j,mn}$ および $k_{j,mn}$ を用いて、式(17)から $Z_1(=U), Z_3(=V), Z_5(=W)$ を求め、式(8)に代入して、 $u(\theta, z), v(\theta, z), w(\theta, z)$ を求め、厚肉円筒の固有振動モード形状を決定する。

3. 両端自由縁厚肉円筒の振動モード解析

3.1 実験振動モード解析と有限要素法による振動モード解析 図2に対象としたS45C鋼製両端自由縁厚肉円筒を示す。円筒素材の縦弾性係数 E , 密度 ρ , およびポアソン比 ν はそれぞれ205.8GPa, 7860kg/m³, および0.3である。

この厚肉円筒を、できるだけ両端自由縁となるように図2のようにゴムひもで懸架してインパクトハンマで衝撃加振し、実験モード解析を行った。表1に実験モード解析に使用した機器を示す。

また、図3のように円周方向を72等分、軸方向を20等分し、円筒全体を1440個の要素に分割し、有限要素法による振動モード解析を行った。

3.2 理論振動モード解析結果および比較検討 2章で提案した方法を用いて、振動モード解析を行い、固有振動数と固有振動モード形状を求めた。

表2と表3に、それぞれ5mm厚円筒と10mm厚円筒

図2 両端自由縁厚肉円筒の実験振動モード解析

表1 実験モード解析に用いた機器

FFT Analyzer	Multi-Channel FFT Analyzer SCADAS Two-Channel FFT Analyzer B&K2034
Accelerometer	B&K4375 (×3) (0.1Hz-16.5kHz)
Impact Hammer	B&K8202
Modal Analysis Software	LMS CADA X-5200 Multi-input ver. X-5210

の固有振動数について、本研究で提案した理論解析による値、有限要素解析による値、および実験モード解析による値を比較した結果を示す。表中のモード(m, n)の m は軸方向の節線数の1/2を、 n は節周数を表す。表中の-は実験振動モード解析で得られなかったモードである。また誤差Aは理論解析値の有限要素解析値に対する誤差を、誤差Bは理論解析値の実験モード解析値に対する誤差を表す。

5mm厚円筒では、理論解析値は有限要素解析値、および実験モード解析値に対して、それぞれ4%以内の誤差で一致している。また10mm厚円筒では、同様に5%以内の誤差で一致している。以上のことから、2章で提案した方法により、実用上十分な精度で固有振動数が得られていることがわかる。

次に、厚さ5mmの円筒のいくつかの固有振動モード形状について、理論解析結果、有限要素結果および実験結果を表4に示す。表の理論解析結果と有限要素解析結果のそれぞれ三つのグラフは、半径方向変位の最大値 u_{max} で無次元化した半径方向、円周方向および軸方向の変位 u, v, w を示す。また、変形図の上欄は、実験モード解析により得られた結果で、点線が変形がない状態を、実線が最大振幅時の状態を表す。同図下欄は、理論解析結果より得られた最大振幅時の変形図である。一点鎖線が変位のない状態を表し、太実線と細実線が上端面と下端面の変位を、破線が $z=0$ なる軸方向中心面の変位を表す。

この表で、理論解析値と有限要素解析値のそれぞれの u/u_{max} 、 v/u_{max} および w/u_{max} のグラフは、どのモードともよく一致している。

また、表4に示したモードの中から例として(0,1)、(1,1)、(2,0)および(4,2)の u/u_{max} の理論解析値、有限要素解析値および実験モード解析値を重ねて図4に示す。なお実験モード解析値は軸方向に並んだ三つの測定点(図2の加振点に対応する)のうち、2点での値が理論解析値と一致するものとして示してある。

この図から実験モード解析による u/u_{max} も、理論解析および有限要素解析による u/u_{max} と極めてよく

図3 三角柱要素に分割した厚肉円筒の一部

一致していることがわかる。厚さ10mmの円筒についても同様な結果が得られた。以上のことから2章で提案した方法により、固有振動モード形状も実用十分な精度で得られていることがわかる。

表2 両端自由厚肉円筒の固有振動数(Hz)($h=5\text{mm}$)

Mode	Proposed Theory	FEM	Measured	Error (%)	
				A	B
(0,0)	8343	8342	-	0.01	-
(0,1)	8324	8323	8435	0.01	-1.32
(0,2)	11103	11121	-	-0.16	-
(1,0)	11775	11771	-	0.03	-
(1,1)	8107	8106	8207	0.01	-1.21
(1,2)	11172	11193	11305	-0.19	-1.17
(2,0)	337	338	339	-0.30	-0.59
(2,1)	699	724	728	-3.45	-3.85
(2,2)	8828	8827	8945	0.01	-1.31
(2,2)	11384	11416	11518	-0.28	-1.15
(3,0)	954	955	960	-0.10	-0.63
(3,1)	1963	1983	1992	-1.01	-1.41
(3,1)	11546	11544	11716	0.02	-1.44
(4,0)	1827	1829	1838	-0.11	-0.54
(4,1)	3319	3345	3351	-0.78	-0.93
(4,1)	15583	15580	-	0.02	-
(4,2)	12538	12411	12489	1.02	0.40
(5,0)	2947	2953	2965	-0.20	-0.61
(5,1)	4747	4781	4789	-0.71	-0.88
(5,1)	20205	20203	-	0.01	-
(5,2)	13163	13264	-	-0.76	-
(6,0)	4308	4320	4335	-0.28	-0.60
(6,1)	6302	6348	6354	-0.72	-0.82
(6,2)	14269	14404	-	-0.94	-
(7,0)	5904	5925	5947	-0.35	-0.71
(7,1)	8019	8081	8087	-0.77	-0.83
(8,0)	7726	7761	7780	-0.45	-0.69
(8,1)	9914	9995	10011	-0.81	-0.97
(9,0)	9766	9820	-	-0.55	-
(9,1)	11993	12099	-	-0.88	-
(10,0)	12014	12092	-	-0.65	-
(10,1)	14155	14392	-	-0.95	-
(11,0)	14459	14570	-	-0.76	-

表3 両端自由厚肉円筒の固有振動数(Hz)($h=10\text{mm}$)

Mode	Proposed Theory	FEM	Measured	Error (%)	
				A	B
(0,0)	8561	8567	8680	-0.07	-1.37
(0,1)	8456	8642	8567	-0.07	-1.30
(1,0)	12065	12064	-	0.01	-
(1,1)	8335	8341	8444	-0.07	-1.29
(2,0)	702	703	710	-0.14	-1.13
(2,1)	1348	1407	1419	-4.19	-5.00
(2,1)	9361	9369	9496	-0.09	-1.42
(3,0)	1973	1980	1996	-0.35	-1.15
(3,1)	3746	3823	3850	-1.46	-2.16
(3,1)	12263	12273	12453	-0.08	-1.53
(4,0)	3746	3767	3793	-0.56	-1.24
(4,1)	6338	6471	6514	-1.28	-1.93
(4,1)	16380	16389	-	-0.05	-
(5,0)	5977	6022	6054	-0.75	-1.27
(5,1)	9120	9245	9287	-1.35	-1.80
(6,0)	8622	8709	8743	-1.00	-1.38
(6,1)	12029	12214	-	-1.51	-
(7,0)	11638	11785	11809	-1.25	-1.45

表4 両端自由厚肉円筒の固有振動モード形状 (厚さ5mm)

Proposed Theory	FEM	Deformation	Proposed Theory	FEM	Deformation
Mode (0, 1)			Mode (1, 1)		
8324Hz 	8323Hz 	Measured 8435Hz Theoretical 	8107Hz 	8106Hz 	Measured 8206Hz Theoretical
Mode (1, 2)			Mode (2, 0)		
11172Hz 	11193Hz 	11304Hz 	337Hz 	338Hz 	339Hz
Mode (2, 1)			Mode (2, 1)		
699Hz 	724Hz 	727Hz 	8828Hz 	8827Hz 	8945Hz
Mode (3, 1)			Mode (4, 2)		
1963Hz 	1983Hz 	1191Hz 	12538.8Hz 	12411Hz 	12489Hz

図4 理論解析, 有限要素解析および実験モード解析による半径方向変位 u の比較 (厚さ5mm)

図5 節線数, 節周数が同じで固有振動数の異なるモードの変位の比較 (厚さ5mm)

次に, 節線数および節周数 m, n が同じ固有振動モード形状でありながら固有振動数が大きく異なるモード, 例えば表2, 5mm厚円筒の(2,1), (3,1), (4,1)および(5,1)モード; 表3, 10mm厚円筒の(2,1), (3,1)および(4,1)モードなどの違いについて考察する. 5mm厚円筒の(2,1)~(5,1)モードの固有振動数の低いモードと高いモードについて u/u_{max} , v/u_{max} , w/u_{max} を比較した結果を図5に示す.

この図から, 固有振動数の低い方のモードは, 低次モードも高次モードも, u, v, w とも軸方向に関してほぼ線形的に変位していること, そして, 固有振動数の高い方のモードは高次モードになるに従って, 半径方向変位 u に曲げによる変位が大きく加わり軸方向に関して線形的な変位でなくなること, 円周方向変位 v も大きくなり線形的な変位でなくなること, また軸方向変位 w が非常に大きくなることからわかる.

つまり定性的に述べると, 図6に最大振幅断面を模式的に示したように, 固有振動数の低い方のモードは, 図(a)のように比較的小さな線形的な変形を示すモードであるのに対して, 固有振動数の高い方のモードは図(b)のように半径方向に曲げによる変形が加わって, 断面が曲線的になり, さらに軸方向に大きく変位するモードであると言える.(ただし, 表4の実験モード解析では半径方向にのみ加振し, 半径方向のみの加速度を計測してモード解析を行ったため, 軸方向変位は現れていない)

このような違いのあるモードについても, 2章で提案した方法により, 固有振動数は, 有限要素解析値および実験モード解析値に対して5%以下の誤差で得られており, また, 固有振動モード形状も表4の(2,1)モードの例のように有限要素解析値とほとんど一致した結果が得られている.

以上の比較検討の結果, 提案した理論解析方法により, 正確に厚肉円筒の固有振動モードが得られることがわかる.

図6 節線数, 節周数が同じで固有振動数の異なるモードの変形の模式図

4. 結 言

これまで解析解が得られていなかった両端自由縁を含む任意の境界条件における厚肉円筒の固有振動モードを求めるため、面外せん断変形と回転慣性を考慮した厚肉円筒の弾性振動方程式を導き、それを10元連立1階微分方程式に書換えて一般解をEulerの方法で与え、境界条件と組合わせて解く新しい解析手法を提案し、両端自由厚肉円筒の固有振動モード解析を行った。得られた結果は次のとおりである。

1) 低次モードから高次モードまで、固有振動数および固有振動モード形状とも実験振動モード解析および有限要素法による解析とよく一致する結果が得られた。

2) 節線数および節周数が同じで固有振動数が大きく異なる固有振動モードが存在することがわかり、これらについても有限要素法による解析とよく一致する結果が得られた。

以上のことから、提案した解析手法により実用上十分な精度で厚肉円筒の固有振動モードが得られることが明らかになった。

参 考 文 献

- (1) 林 巖 ほか 2 名, 軸一体円板の固有振動モードについて(第1報, 円板と軸の境界部の弾性変形と軸の曲げ変形を考慮した固有振動数の補正), 日本機械学会論文集, 55-516C(1989), 1885.
- (2) 林 巖 ほか 2 名, 軸一体円板の固有振動モードについて(第2報, 円板と軸の境界部における弾性境界条件式のばね定数), 日本機械学会論文集, 56-524C(1990), 952.
- (3) 宇治橋直幸, 円筒殻の衝撃応答に関する研究(東京工業大学学位論文), (1982).
- (4) 岩附信行 ほか 2 名, Mindlin の解法を適用した両端自由縁厚肉円筒の振動モード解析, 日本機械学会論文集, 60-571C(1994), 774.
- (5) 小林繁夫 ほか 1 名, 弾性力学, (1991), 117, 培風館.
- (6) 中原一郎, 応用弾性学, 実教出版株式会社 (1978).
- (7) 西垣久實 ほか 1 名, マトリクスとその応用, コロナ社 (昭和 45 年).

付 録

1. マトリクス $[A_{i,j}]$ の要素

$$\begin{aligned} A_{1,1} &= \rho h \omega^2 - N/a^2 - G'h/a^2, & A_{1,3} &= G'h, & A_{1,4} &= -N\alpha/a \\ A_{1,8} &= -N\nu/a, & A_{1,10} &= G'h\alpha, & A_{1,14} &= G'h \\ A_{2,1} &= -(N/a + G'h/a)\alpha, & A_{2,4} &= \rho h \omega^2 - 2N\alpha^2, & A_{2,6} &= \nu_1 N/2 \\ A_{2,8} &= -\nu_2 N\alpha/2, & A_{2,10} &= (D/a)\alpha^2 + G'h/a + \rho h^3 \omega^2/(12a) \\ A_{2,12} &= D\nu_1/(2a), & A_{3,2} &= N\nu/a, & A_{3,5} &= \nu_2 N\alpha^2/2 \\ A_{3,7} &= \rho h \omega^2 - \nu_1 N\alpha^2/2, & A_{3,9} &= N \\ A_{3,13} &= D\nu_1\alpha^2/(2a) + \rho h^3 \omega^2/(12a), & A_{3,15} &= D/a \\ A_{4,1} &= (G'h/a + D/a^3)\alpha, & A_{4,4} &= \rho h^3 \omega^2/(6a^2) \\ A_{4,6} &= \nu_1 D/a^2, & A_{4,10} &= \rho h^3 \omega^2/(12a) - G'h/a - D\alpha^2/a \\ A_{4,12} &= D\nu_1/(2a), & A_{4,14} &= -\nu_2 D\alpha/(2a), & A_{5,2} &= -G'h/a \\ A_{5,5} &= \nu_2 D\alpha/(2a^2), & A_{5,7} &= D\nu_1\alpha^2/(2a^2) + \rho h^3 \omega^2/(12a^2) \\ A_{5,9} &= D/a^2, & A_{5,11} &= \nu_2 D\alpha/(2a) \\ A_{5,13} &= \rho h^3 \omega^2/(12a) - G'h/a - D\nu_1\alpha^2/(2a), & A_{5,15} &= D/a \end{aligned}$$

ここに, $\alpha = m/a$ である。その他の要素は 0 である。

2. マトリクス $[C_{i,j}]$ の要素

$$\begin{aligned} C_{1,2} &= C_{3,4} = C_{5,6} = C_{7,8} = C_{9,10} = 1 \\ C_{2,1} &= -A_{1,1}/A_{1,3}, & C_{2,3} &= -A_{1,4}/A_{1,3}, & C_{2,6} &= -A_{1,8}/A_{1,3} \\ C_{2,7} &= -A_{1,10}/A_{1,3}, & C_{2,10} &= -A_{1,14}/A_{1,3} \\ C_{4,1} &= -(A_{4,1} - A_{2,1}A_{4,12}/A_{2,12})/(A_{4,6} - A_{4,12}A_{2,6}/A_{2,12}) \\ C_{4,3} &= -(A_{4,4} - A_{2,4}A_{4,12}/A_{2,12})/(A_{4,6} - A_{4,12}A_{2,6}/A_{2,12}) \\ C_{4,6} &= -(A_{2,6}A_{4,12}/A_{2,12})/(A_{4,6} - A_{4,12}A_{2,6}/A_{2,12}) \\ C_{4,7} &= -(A_{4,10} - A_{2,10}A_{4,12}/A_{2,12})/(A_{4,6} - A_{4,12}A_{2,6}/A_{2,12}) \\ C_{4,10} &= -A_{4,14}/(A_{4,6} - A_{4,12}A_{2,6}/A_{2,12}) \\ C_{6,2} &= -(A_{5,2} - A_{3,2}A_{5,15}/A_{3,15})/(A_{5,9} - A_{3,9}A_{5,15}/A_{3,15}) \\ C_{6,4} &= -(A_{5,5} - A_{3,5}A_{5,15}/A_{3,15})/(A_{5,9} - A_{3,9}A_{5,15}/A_{3,15}) \\ C_{6,5} &= -(A_{5,7} - A_{3,7}A_{5,15}/A_{3,15})/(A_{5,9} - A_{3,9}A_{5,15}/A_{3,15}) \\ C_{6,8} &= -A_{5,11}/(A_{5,9} - A_{3,9}A_{5,15}/A_{3,15}) \\ C_{6,9} &= -(A_{5,13} - A_{3,13}A_{5,15}/A_{3,15})/(A_{5,9} - A_{3,9}A_{5,15}/A_{3,15}) \\ C_{8,1} &= -(A_{4,1} - A_{2,1}A_{4,6}/A_{2,6})/(A_{4,12} - A_{2,12}A_{4,6}/A_{2,6}) \\ C_{8,3} &= -(A_{4,4} - A_{2,4}A_{4,6}/A_{2,6})/(A_{4,12} - A_{2,12}A_{4,6}/A_{2,6}) \\ C_{8,6} &= -(A_{4,4} - A_{2,4}A_{4,6}/A_{2,6})/(A_{4,12} - A_{2,12}A_{4,6}/A_{2,6}) \\ C_{8,7} &= -(A_{4,10} - A_{2,10}A_{4,6}/A_{2,6})/(A_{4,12} - A_{2,12}A_{4,6}/A_{2,6}) \\ C_{8,10} &= -A_{4,14}/(A_{4,12} - A_{2,12}A_{4,6}/A_{2,6}) \\ C_{10,2} &= -(A_{5,2} - A_{3,2}A_{5,9}/A_{3,9})/(A_{5,15} - A_{3,15}A_{5,9}/A_{3,9}) \\ C_{10,4} &= -(A_{5,5} - A_{3,5}A_{5,9}/A_{3,9})/(A_{5,15} - A_{3,15}A_{5,9}/A_{3,9}) \\ C_{10,5} &= -(A_{5,7} - A_{3,7}A_{5,9}/A_{3,9})/(A_{5,15} - A_{3,15}A_{5,9}/A_{3,9}) \\ C_{10,8} &= -A_{5,11}/(A_{5,15} - A_{3,15}A_{5,9}/A_{3,9}) \\ C_{10,9} &= -(A_{5,13} - A_{3,13}A_{5,9}/A_{3,9})/(A_{5,15} - A_{3,15}A_{5,9}/A_{3,9}) \end{aligned}$$

その他の要素は 0 である。

3. 境界条件に必要な力とモーメント

$$\begin{aligned} T_z &= \left\{ \sum_{j=1}^{10} [D_1, D_2, D_3, D_4] \right. \\ &\quad \left. [B_{1,j}(z), B_{3,j}(z), B_{6,j}(z), B_{10,j}(z)]^T \beta_j \right\} \cos m\theta \\ S_{z\theta} &= \left\{ \sum_{j=1}^{10} [D_5, D_6, D_7] [B_{4,j}(z), B_{5,j}(z), B_{8,j}(z)]^T \beta_j \right\} \sin m\theta \\ Q_z &= \left\{ \sum_{j=1}^{10} [D_8, D_9] [B_{2,j}(z), B_{9,j}(z)]^T \beta_j \right\} \cos m\theta \\ M_z &= \left\{ \sum_{j=1}^{10} [D_{10}, D_{11}, D_{12}, D_{13}] \right. \\ &\quad \left. [B_{3,j}(z), B_{6,j}(z), B_{7,j}(z), B_{10,j}(z)]^T \beta_j \right\} \cos m\theta \\ M_{z\theta} &= \left\{ \sum_{j=1}^{10} [D_{14}, D_{15}, D_{16}] [B_{4,j}(z), B_{8,j}(z), B_{9,j}(z)]^T \beta_j \right\} \sin m\theta \end{aligned}$$

ここに

$$\begin{aligned} D_1 &= N\nu/a, & D_2 &= N\nu\alpha, & D_3 &= N, & D_4 &= D/a \\ D_5 &= N\nu_1/2, & D_6 &= -N\nu_1\alpha/2, & D_7 &= D\nu_1/(2a) \\ D_8 &= D_9 = G'h, & D_{10} &= D\nu\alpha/a, & D_{11} &= D/a \\ D_{12} &= D\nu\alpha, & D_3 &= D, & D_{14} &= D\nu_1/a \\ D_{15} &= \nu_1 D/2, & D_{16} &= -\nu_1 D\alpha/2 \end{aligned}$$

また, $B_{i,j}(z)$ は式(18)で与えられる。

4. 両端自由縁厚肉円筒のマトリクス $[M_{i,j}]$ の要素

$$\begin{aligned} M_1(z) &= [D_1, D_2, D_3, D_4] [B_{1,j}(z), B_{3,j}(z), B_{6,j}(z), B_{10,j}(z)]^T \\ M_2(z) &= [D_5, D_6, D_7] [B_{4,j}(z), B_{5,j}(z), B_{8,j}(z)]^T \\ M_3(z) &= [D_8, D_9] [B_{2,j}(z), B_{9,j}(z)]^T \\ M_4(z) &= [D_{10}, D_{11}, D_{12}, D_{13}] [B_{3,j}(z), B_{6,j}(z), B_{7,j}(z), B_{10,j}(z)]^T \\ M_5(z) &= [D_{14}, D_{15}, D_{16}] [B_{4,j}(z), B_{8,j}(z), B_{9,j}(z)]^T \end{aligned}$$

とくと,

$$\begin{aligned} \{M_{1,j}, M_{2,j}, M_{3,j}, M_{4,j}, M_{5,j}\} &= \\ \{M_1(z), M_2(z), M_3(z), M_4(z), M_5(z)\}_{z=-b/2} \\ \{M_{6,j}, M_{7,j}, M_{8,j}, M_{9,j}, M_{10,j}\} &= \\ \{M_1(z), M_2(z), M_3(z), M_4(z), M_5(z)\}_{z=b/2} \end{aligned}$$

である。ここに, $j = 1, 2, \dots, 10$ であり, $B_{i,j}(z)$ は式(18)で与えられ, $D_1 \sim D_{16}$ は付録 3 と同じである。