空間に固定した点で拘束された回転円板の安定性*
(減衰を考慮した場合)本田 善久*¹, 松 久 寛*¹, 佐 藤 進*²Stability of a Rotating Disk Restrained at a Fixed Point in Space
(Damped System)

Yoshihisa HONDA, Hiroshi MATSUHISA and Susumu SATO

The stability of a rotating elastic disk with a stationary restraint, such as a computer memory disk with a magnetic head, is theoretically analyzed taking account of damping. The Nyquist stability criterion is applied, and exact expressions of stability boundaries in a mass-stiffness plane are derived. The relation between the vector locus of the receptance of the rotating disk and the stability boundaries is discussed. For the restraint of a single degree of freedom, the minimum critical mass and the minimum critical stiffness are introduced so that a stable system may be designed, and the effects of the rotation speed and the viscous damping of the disk on these values are discussed. It is found that the damping of the restraint generally destabilizes the system, and that the addition of the damping to the disk can stabilize the system.

Key Words: Stability, Rotating Disk, Coupled System, Stability Criterion, Stability Boundary, Damping

1. 緒 言

著者らは、空間に固定した点で拘束された回転円板の安定性に関する特性方程式を導き⁽¹⁾、減衰を無視した場合のその安定性について検討した⁽²⁾。本報では、減衰を考慮した場合のその安定性について検討する。まず、安定判別にナイキストの方法が利用できることを示す。さらに、拘束系を 1 自由度の質量・ダンパ・ばね系に特定して、その減衰比を一定としたときのその質量と剛性に関する安定境界の厳密式を導く。そして、回転円板の減衰がその固有モードの特性や回転円板のリセプタンスのベクトル軌跡の形状に及ぼす影響を考察し、回転円板や拘束系の減衰が安定性に及ぼす影響を解析的に明らかにする。

2. 基 礎 式⁽¹⁾

空間に固定した点で拘束された回転円板の特性方程式は、回転円板のリセプタンス $\alpha_D(s)$ と拘束系のリセプタンス $\alpha_R(s)$ を用いて、次式で表される。

$$\alpha_D(s) + \alpha_R(s) = 0 \quad \cdots \cdots (1)$$

回転円板のリセプタンスは、固有関数展開によって次のように表すことができる。

$$\alpha_D(s) = \sum_{mn} \frac{1}{M_{mn}s^2 + C_{mn}s + K_{mn}} \quad \cdots \cdots (2)$$

ここで、 M_{mn} , C_{mn} , K_{mn} は固有モード (m, n) のそれぞれ等価質量, 等価減衰係数, 等価剛性であり、次式で与えられる。

$$M_{mn} = \frac{\omega_{mn}\sqrt{1-\xi_{mn}^2}}{R_{mn}^2(r_0)(\omega_{mn}\sqrt{1-\xi_{mn}^2} + m\Omega)} \quad \cdots \cdots (3)$$

$$C_{mn} = \frac{2\xi_{mn}\omega_{mn}^2\sqrt{1-\xi_{mn}^2}}{R_{mn}^2(r_0)(\omega_{mn}\sqrt{1-\xi_{mn}^2} + m\Omega)} \quad \cdots \cdots (4)$$

$$K_{mn} = \frac{[(\omega_{mn}\sqrt{1-\xi_{mn}^2} + m\Omega)^2 + \xi_{mn}^2\omega_{mn}^2]\omega_{mn}\sqrt{1-\xi_{mn}^2}}{R_{mn}^2(r_0)(\omega_{mn}\sqrt{1-\xi_{mn}^2} + m\Omega)} \quad \cdots \cdots (5)$$

ただし、 ω_{mn} , $R_{mn}(r)$, ξ_{mn} はそれぞれ固有振動数, 正規化された固有関数の半径の因子, モード減衰比であり、 Ω は回転速度である。なお、モードの次数を表す二つの添字のうち、 m はその符号が波動の回転方向を、その絶対値が波数を表し、 n は節円数である。

回転円板の固有モードには臨界速度をもつものがあり、そのモーダルパラメータである等価質量, 等価減衰係数, 等価剛性は、回転速度がその臨界速度を超え

* 原稿受付 平成 5 年 12 月 29 日。

*¹ 正員, 京都大学工学部 (〒606-01 京都市左京区吉田本町)。*² 正員, 金蘭会学園 (京都大学工学部)。

ていなければ正であり、超えていれば負である。臨界速度をもたない固有モードのそれらは常に正である。ある回転速度において、それらが正である固有モードを正特性の固有モード、負である固有モードを負特性の固有モードと呼ぶ。また、正特性と負特性の固有モードの見掛けの固有振動数が一致する速度を交差速度、その振動数を交差振動数と呼ぶ。

一方、拘束系のリセプタンスも、一般に式(2)と同様の形で表すことができる。特に、1自由度の質量・ダンパ・ばね系の場合、質量を M 、ダンパの減衰係数を C 、ばねの剛性を K とすると、次式で与えられる。

$$\alpha_R(s) = \frac{1}{Ms^2 + Cs + K} \quad \text{.....(6)}$$

3. 安定判別

特性方程式(1)は次のように変形できる。

$$1 + \alpha_D(s)\alpha_R^{-1}(s) = 0 \quad \text{.....(7)}$$

ここで、 $\alpha_R^{-1}(s)$ は拘束系のリセプタンスの逆数、つまり拘束系の動剛性である。式(7)はフィードバック制御系の特性方程式と同じ形式である。実際、回転円板の応答は拘束系によってフィードバックされており、ブロック線図は図1のように表せる。その一巡伝達関数は、回転円板のリセプタンス $\alpha_D(s)$ と拘束系の動剛性 $\alpha_R^{-1}(s)$ の積で与えられる。

このような系に関する安定判別は、多くの方法が知られている。ただし、回転円板のリセプタンスは、理論上は無限級数で表されるものであり、数値計算の際には有限項で打ち切らざるを得ない。打ち切り誤差を抑えて精度を上げるために項数を増やすと、ラウスの方法などの代数的な手法では手に負えなくなる。そこで、安定判別には図式的な手法が適していると考えられるので、ナイキストの方法を採用する。

特に、個々の固有モードのモーダルパラメータの符号が一致するから、回転円板のリセプタンスの極はすべて左半平面にある。一般に拘束系の動剛性の極もすべて左半平面にあると考えてよいから、それらの積である一巡伝達関数の極もすべて左半平面にある。しかも、一巡伝達関数の s の係数はすべて実数である。したがって、安定判別が一巡伝達関数のベクトル軌跡

($s = i\omega$, $\omega: 0 \sim \infty$) を描くことによって容易に行える。すなわち、そのベクトル軌跡が、 -1 の点を左に見て $\omega \rightarrow \infty$ に至れば安定であり、右に見て $\omega \rightarrow \infty$ に至れば不安定であると判定できる。

4. 安定境界

拘束系を1自由度の質量・ダンパ・ばね系に特定して、そのパラメータと安定性との関係を求める。この場合、拘束系のリセプタンスは式(6)で与えられるから、その動剛性は次式で与えられる。

$$\alpha_R^{-1}(s) = Ms^2 + Cs + K \quad \text{.....(8)}$$

減衰を考慮しているので、この場合の拘束系には独立な3個のパラメータが存在する。ここでは、拘束系の減衰比を固定して、拘束系の質量と剛性に関する安定境界を導く。拘束系の減衰比を Z と表すと、それは次式で与えられる。

$$Z = \frac{C}{2\sqrt{MK}} \quad \text{.....(9)}$$

安定領域と不安定領域の境界では、

$$\alpha_D(i\omega)\alpha_R^{-1}(i\omega) = -1 \quad \text{.....(10)}$$

を満たす実数 ω が存在する。静的不安定に関する境界に対応する $\omega = 0$ に対しては、次のようになる。

$$\alpha_D(0) = \sum_{mn} \frac{1}{K_{mn}}, \quad \alpha_R^{-1}(0) = K \quad \text{.....(11)}$$

これらには剛性に関するパラメータしか現れていないので、静的不安定は剛性だけに依存する。よって、減衰を考慮した場合でも静的臨界剛性 K_{CS} を定めることができ、それは次式で与えられる。

$$\begin{aligned} K_{CS} &= -\frac{1}{\alpha_D(0)} = -\left(\sum_{mn} \frac{1}{K_{mn}}\right)^{-1} \\ &= -\left\{\sum_{mn} R_{mn}^2(r_0)(\omega_{mn}\sqrt{1-\xi_{mn}^2} + m\Omega) \right. \\ &\quad \left. / [(\omega_{mn}\sqrt{1-\xi_{mn}^2}[(\omega_{mn}\sqrt{1-\xi_{mn}^2} + m\Omega)^2 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \xi_{mn}^2\omega_{mn}^2])]\right\}^{-1} \quad \text{.....(12)} \end{aligned}$$

拘束系の剛性は正であるから、静的臨界剛性が存在するための必要十分条件は、 $\alpha_D(0)$ が負であることである。これは、回転円板のリセプタンスのベクトル軌跡が実軸の負の部分から出発することを意味する。

減衰比 Z が一定の条件で、任意の正の実数 ω に対して式(10)を満たす拘束系の質量、剛性をそれぞれ境界質量 M_B 、境界剛性 K_B とすると、次式が得られる。

$$M_B = \frac{\sqrt{\sin^2\psi(\omega) + Z^2\cos^2\psi(\omega)} + Z\cos\psi(\omega)}{2Z\omega^2G(\omega)} \quad \text{.....(13)}$$

$$K_B = \frac{\sqrt{\sin^2\psi(\omega) + Z^2\cos^2\psi(\omega)} - Z\cos\psi(\omega)}{2ZG(\omega)} \quad \text{.....(14)}$$

図1 ブロック線図

ここで、 $G(\omega)$ と $\phi(\omega)$ は、 $\alpha_D(i\omega)$ のそれぞれ絶対値と偏角、つまりゲインと位相である。拘束系の質量と剛性は正であるから、境界質量、境界剛性が存在するための必要十分条件は、その正の実数 ω が次式を満たすことである。

$$G(\omega) \neq 0, 0 < \phi(\omega) < \pi \quad \dots\dots\dots (15)$$

これは、回転円板のリセプタンスのベクトル軌跡上のその正の実数 ω で与えられる点 $\alpha_D(i\omega)$ が実軸よりも上にあることを意味する。

特に、拘束系がばねだけの場合を考えると、式(10)に $\alpha_R^{-1}(s) = K$ を代入することによってその境界が得られる。その境界を動的臨界剛性と名付け、 K_{CD} と表すと、それは次式で与えられる。

$$K_{CD} = \frac{1}{G(\omega_K)} = -\frac{1}{\alpha_D(i\omega_K)} \quad \dots\dots\dots (16)$$

ただし、 ω_K は $\phi(\omega) = \pi$ を満たす ω 、つまり $\alpha_D(i\omega)$ が負の実数になる ω であり、回転円板のリセプタンスのベクトル軌跡が実軸の負の部分と交わるときのその交点を与える ω である。

また、拘束系が質量だけの場合を考え、同様に得られる境界を臨界質量と名付け、 M_C と表すと、それは次式で与えられる。

$$M_C = \frac{1}{\omega_M^2 G(\omega_M)} = \frac{1}{\omega_M^2 \alpha_D(i\omega_M)} \quad \dots\dots\dots (17)$$

ただし、 ω_M は $\phi(\omega) = 0$ を満たす ω 、つまり $\alpha_D(i\omega)$ が正の実数になる ω であり、回転円板のリセプタンスのベクトル軌跡が実軸の正の部分と交わるときのその交点を与える ω である。

条件式(15)の第2式の不等式の境界における極限値を求めると、 $\phi(\omega) = \pi$ では $\omega = \omega_K$ であり、 $\phi(\omega) = 0$ では $\omega = \omega_M$ であるから、それぞれ次のようになる。

$$\lim_{\omega \rightarrow \omega_K} M_B = 0, \lim_{\omega \rightarrow \omega_K} K_B = K_{CD} \quad \dots\dots\dots (18)$$

$$\lim_{\omega \rightarrow \omega_M} M_B = M_C, \lim_{\omega \rightarrow \omega_M} K_B = 0 \quad \dots\dots\dots (19)$$

ただし、その不等式の境界で $\omega = 0$ となる場合については、上記の極限とは異なり次のようになる。すなわち、 $\alpha_D(s)$ の s に関する微分を $\alpha'_D(s)$ と表すと、

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{\sin \phi(\omega)}{\omega} = \frac{\alpha'_D(0)}{|\alpha_D(0)|} \quad \dots\dots\dots (20)$$

であるから、

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} M_B K_B = \left[\frac{\alpha'_D(0)}{2Z\alpha_D^2(0)} \right]^2 \quad \dots\dots\dots (21)$$

が得られ、 $\phi(0) = \pi$ のときには

$$\left. \begin{aligned} \lim_{\omega \rightarrow 0} M_B &= -\frac{[\alpha'_D(0)]^2}{4Z^2\alpha_D^3(0)}, \\ \lim_{\omega \rightarrow 0} K_B &= -\frac{1}{\alpha_D(0)} = K_{CS} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (22)$$

となり、 $\phi(0) = 0$ のときには

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} M_B = \infty, \lim_{\omega \rightarrow 0} K_B = 0 \quad \dots\dots\dots (23)$$

となる。

また、 $\phi(\omega) = \pi/2$ を満たす ω を ω_0 とすると、 $\omega = \omega_0$ のときには次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} M_B &= \frac{1}{2Z\omega_0^2 G(\omega_0)}, K_B = \frac{1}{2ZG(\omega_0)}, \\ \frac{K_B}{M_B} &= \omega_0^2 \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (24)$$

5. 考 察

5.1 ベクトル軌跡

まず、回転円板の拘束点におけるモード応答のベクトル軌跡の特徴を述べる。モーダルパラメータが同符号であるから、 ω が零から無限大に至る間にその軌跡は時計方向に回転する。特に、実軸上の点 $(K_{mn}^{-1}, 0)$ から出発し、 $\omega = \sqrt{K_{mn}/M_{mn}}$ のときに虚軸を点 $(0, -\omega^{-1}C_{mn}^{-1})$ で横切り、その後原点へ向かう。その固有モードが正特性のときは、軌跡は実軸上の正の部分から出発し、第4象限を通って虚軸の負の部分で横切り、第3象限に入って原点へ向かう。負特性のとき、つまり臨界速度を超えているときは、軌跡は反対に実軸上の負の部分から出発し、第2象限を通って虚軸の正の部分で横切り、第1象限に入って原点へ向かう。軽減衰の場合、一般に ω が $\sqrt{K_{mn}/M_{mn}}$ に近い値のときに実軸から離れたところを急激に動き、それ以外のときには実軸の付近を緩やかに動くものであり、その軌跡は出発点付近を除いて原点で実軸に接する円に近い形状をしている。

回転円板のリセプタンスのベクトル軌跡はそのような軌跡のベクトル和である。したがって、最低臨界速度未満では、すべての固有モードが正特性であるから、それは実軸上の正の部分から出発した後は実軸より下の部分にしか現れない。ところが最低臨界速度を超えると、負特性の固有モードが現れるため、軌跡が実軸上の負の部分から出発したり、実軸より上に現れたりする可能性が生じる。個々の見掛けの固有振動数が減衰に比べて十分に離れていると、ベクトル軌跡は個々のモード応答のベクトル軌跡をつないだような形状になるが、複数の見掛けの固有振動数が接近していると、固有モード間の干渉のために、それらの固有振動数に対応するベクトル軌跡の部分がそれらのモード応答のベクトル軌跡を融合したような形状になる。

一方、拘束系のリセプタンスは、一般に回転円板のリセプタンスと同様に固有モード展開で表すことができ、通常、拘束系のすべての固有モードのモーダルパラメータはみな正である。その動剛性は、逆数の関係から、位相が $\omega = 0$ のとき零で、 $\omega > 0$ に対しては常に

零と π の間にある。また、拘束系の質量、減衰係数、剛性のすべてのパラメータを N 倍すると、その絶対値が N 倍されるだけで、その位相は変わらない。

ナイキストの安定判別では、一巡伝達関数のベクトル軌跡が点 $(-1, 0)$ の周りに回転するか否かが問題である。上記の拘束系の動剛性に関する考察から、一巡伝達関数のベクトル軌跡が実軸の負の部分から出発するのは、回転円板のリセプタンスのベクトル軌跡が実軸の負の部分から出発するときに限られる。また、一巡伝達関数のベクトル軌跡が実軸の負の部分横切るのは、回転円板のリセプタンスのベクトル軌跡が実軸より上に現れるときに限られる。したがって、安定判別の際に注目すべき点を回転円板のリセプタンスのベクトル軌跡に関していえば、その出発点が実軸の負の部分であるか、そして実軸より上にその軌跡が現れるかということである。

さらに、一巡伝達関数のベクトル軌跡が実軸の負の部分から出発する、あるいはその部分を横切る場合でも、その出発点や交点がすべて -1 よりも原点側であれば安定である。よって、回転円板のリセプタンスのベクトル軌跡が実軸の負の部分から出発するために静的不安定である場合、その点を原点方向へ十分に移動できれば安定化される。また、回転円板のリセプタンスのベクトル軌跡が実軸より上に現れるために動的不安定である場合、その部分を原点方向に十分に縮小できれば安定化される。例えば、最低臨界速度からあまり高くない速度では負特性となる固有モードには節円がない ($n=0$) ので、拘束点が内側に移動すると、その固有モードのモーダルパラメータの絶対値が大きくなり、そのモード応答のリセプタンスのベクトル軌跡の出発点が原点方向に移動し、その実軸より上に現れる部分が原点方向に縮小する。つまり拘束点が内側にあるほど不安定になりにくい。

一方、拘束系の質量、減衰係数、剛性のすべてのパラメータを N 倍すると、一巡伝達関数のベクトル軌跡は原点からの距離が N 倍に拡大される。したがって、拘束系のパラメータを変更して安定化するには、一般にそのすべてのパラメータを一様に小さくするとよい。ただし、その一部を変更する場合は、その拘束系の固有振動数などが変化するので、安定化されるか否かは一概にいえない。

5・2 回転円板のベクトル軌跡と安定境界 回転円板のリセプタンスのベクトル軌跡を図 2 に、拘束系が 1 自由度の質量・ダンパ・ばね系のときの、その質量、剛性に関する安定境界を図 3 に、それぞれ四とおりの回転速度について示す。モード減衰比はすべての固有

モードについて同一の値としてある。以下に示す他の図でも、回転円板のモード減衰比はすべての固有モードについて同一の値としてある。また、本論文で示すすべての計算結果は、ポアソン比 ν を 0.3、内半径 β を 0.5、拘束点の半径 r_0 を 0.9 として求めたものである。

図 2 に示した軌跡は ω が 5 ままであり、図に示した程度の回転速度では、すべての負特性の固有モードの見掛けの固有振動数を含み、これより高い ω に対応する部分は常に実軸より下にあり、実軸を横切らない。一般に、 ω がすべての負特性の固有モードの見掛けの固有振動数を超え、負特性の固有モードの影響が相対的に小さくなって実軸より下に入れば、それ以降は常に実軸より下にあり、実軸を横切ることはない。したがって、安定判別のために回転円板のリセプタンスのベクトル軌跡を描く場合、 ω を零から出発させて、すべての負特性の固有モードの見掛けの固有振動数を超えた後、負特性の固有モードとは干渉しない次の正特性である固有モードの見掛けの固有振動数に達する付近までで十分である。よって、安定判別のために一巡伝達関数のベクトル軌跡を描く場合でも、 ω の範囲はそのような区間で十分である。なお、図中の $\times$ 印は $\omega = 0$ の点を表し、 $\circ$ 印は個々のモード応答のベクトル軌跡が虚軸上にくるときの ω に対応する点を表す。

また、図 3 は拘束系の減衰比が 10^{-3} のときの安定境界で、拘束系の剛性を横軸に、質量を縦軸にとって、両対数で示す。縦軸に平行な破線は式 (12) で与えられる静的臨界剛性 K_{cs} を表し、この破線より右で静的不安定である。実線は式 (13)、(14) で与えられる境界質量 M_b 、境界剛性 K_b を表し、この境界より右上で一般に動的不安定である。つまり破線と実線で区切られた領域のうち、最も左下の領域では安定である。縦軸、横軸に平行な一点鎖線は、それぞれ式 (16) で与えられる静的臨界剛性 K_{cd} 、式 (17) で与えられる臨界質量 M_c を表す。これらの一点鎖線は安定境界の漸近線であるが、拘束系の減衰比とは無関係で、その位置は回転円板のパラメータだけに依存する。境界上の $+$ 印が付けてある点は、式 (24) の第 1 式と第 2 式で与えられる点で、回転円板のリセプタンスのベクトル軌跡の虚軸の正の部分との交点に対応する。この点の境界質量と境界剛性は、その交点の原点からの距離に反比例し、交点が原点から遠いほど図の左下に位置する。ただし、その交点の原点からの距離は有限であるから、これらの値は下限をもつ。また、これらの値はともに拘束系の減衰比に反比例するので、その減衰比が変化するとその点は傾き 1 の直線を描く。図ではこの傾き 1 の直

線も一点鎖線で示す。さらに、 ω を零に限りなく近づけたときの境界質量、境界剛性の極限が式(23)で与えられる場合には、質量と剛性の積を式(21)の極限値に等しくした傾き -1 の直線も一点鎖線で示す。この直線は、回転円板のリセプタンスのベクトル軌跡が実軸の正の部分から上向きに出発するときに現れる安定境界の漸近線である。その積の値は拘束系の減衰比の自乗に反比例するので、拘束系の減衰比が大きくなると左下に移動する。

図2(a)、図3(a)には最低臨界速度($\Omega=7.584$)よりわずかに高い速度の場合が示してある。回転円板のリセプタンスのベクトル軌跡の出発点の実軸の負の部分にあるので、静的不安定に関する境界が存在し、軌跡がそこからしばらくは実軸より上を動くので、動的不安定に関する境界も存在する。軌跡と虚軸の正の部分との交点に対応する安定境界上の点は図の範囲より上にあり、その点を通る傾き 1 の直線が図の左上にわずかに現れている。また、軌跡が原点より右で実軸と交わるので、横軸に平行な漸近線が存在する。図3

(a)の実線と縦軸に平行な破線で区切られた左下の領域が安定領域である。

図2(b)、図3(b)には最低交差速度($\Omega=7.731$)よりわずかに低い速度の場合が示してある。回転円板のリセプタンスのベクトル軌跡が実軸の正の部分から出発し上向きに出ているので、静的不安定に関する境界はないが、動的不安定に関する境界に傾き -1 の漸近線が現れている。また、軌跡が虚軸の正の部分と2回交わるので、式(24)の第1式と第2式で与えられる点が二つ存在するが、原点に近いほうの交点に対応する安定境界上の点は図の範囲の外部にある。もう一方の点は図の範囲内にあり、その点に+印が付けられている。それらの点を通る傾き 1 の直線は接近しており、図ではほとんど重なっている。さらに、軌跡が原点より右で実軸と交わるので、横軸に平行な漸近線が存在する。図3(b)の実線の境界で狭まれた領域で動的不安定であり、その外部で安定である。

図2(c)、図3(c)には最低交差速度よりわずかに高い速度の場合が示してある。回転円板のリセプタン

図2 回転円板のリセプタンスのベクトル軌跡($\beta=0.5$, $\nu=0.3$, $r_0=0.9$, $\xi_{mn}=10^{-4}$)

図3 拘束系が1自由度の質量・ダンパ・ばね系のときの、その質量、剛性に関する安定境界($\beta=0.5$, $\nu=0.3$, $r_0=0.9$, $\xi_{mn}=10^{-4}$, $Z=10^{-3}$)

スのベクトル軌跡が実軸より上に現れており、実軸の負の部分、正の部分で一回ずつ交わるので、動的不安定に関する境界とその縦軸、横軸に平行な漸近線が一本ずつ存在する。また、軌跡が虚軸の正の部分と交わるため、その交点に対応する安定境界の+印を付けた点が存在し、その点を通る傾き1の直線が描かれている。その後、図ではわかりにくいですが、軌跡は虚軸の正の部分と二回交わる。しかし、その交点が原点に近い場合、対応する安定境界の点は図の範囲外にあり、それらの点を通る傾き1の直線だけが図に見られる。ただし、そのうちの一本は、その前の交点に対応する直線とほとんど重なる。動的不安定に関する境界は、傾き1の一点鎖線の付近でループを描いている。実線の境界で区切られた左下の領域で安定であり、それ以外の領域ではループの内部を含めて動的不安定となる。

図2(d)、図3(d)には最低交差速度よりある程度高い速度の場合が示してある。回転円板のリセプタンスのベクトル軌跡が図2(c)とほぼ同様の動きをしているので、安定境界も図3(c)と同じような形状である。ただし、軌跡と虚軸の正の部分との交点が一つであるから、その交点に対応する安定境界の+印を付けた点の一つで、その点を通る傾き1の直線も一本である。図3(c)と同様、安定境界の実線で区切られた左下の領域で安定であり、それ以外の領域ではループの内部を含めて動的不安定となる。

図2の軌跡上の○印の多くは虚軸からあまり離れておらず、それらの固有モード間の干渉がほとんどないことがわかる。そのとき、実軸に近い軌跡の部分は原点に近接している。それに対して、交差速度の付近では、その交差振動数にかかわる二つの固有モードに対応する軌跡上の○印が虚軸から大きく離れており、それらの固有モード間の干渉が大きいことがわかる。それらの○印に挟まれた実軸の交点を含む部分は、この干渉のために原点から大きく離れている。

5.3 静的臨界剛性 静的不安定に関する臨界値である、式(12)で与えられる静的臨界剛性 K_{CS} は、回転円板のリセプタンスのベクトル軌跡の実軸の負の部分にある出発点の原点からの距離の逆数に相当する。回転円板のパラメータの変化によって、その出発点が原点に近づくとき静的臨界剛性は増大し、原点に達すると無限大に発散する。その距離は有限であるから、その値は下限をもつ。したがって、拘束系の剛性をその下限より小さくすれば、静的不安定にならない。

図4に静的臨界剛性を回転速度の関数として、最低臨界速度および第2、第3の臨界速度に関連して静的不安定になる領域を含む範囲について示す。減衰を無

視した場合を点線で、考慮した場合を実線、破線、一点鎖線で示す。

減衰を無視した場合には、回転速度を各臨界速度に高いほうから限りなく近づけると、その臨界速度にかかわる固有モードの等価剛性が零に収束するため、静的臨界剛性も零に収束する⁽²⁾。しかし、減衰を考慮した場合には、等価剛性の絶対値が臨界速度よりわずかに異なる速度で極小値を取り、臨界速度に限りなく近づくと無限大に発散するので、静的臨界剛性は一般にその臨界速度をわずかに超えた速度から生じ、それが極小となる速度はさらにいくらか高い。モード減衰比が増大すると、等価剛性の絶対値の極小値が増加するので、静的臨界剛性の極小値も増加する。

このグラフに拘束系の剛性のところで横軸と平行な直線を引けば、その直線の下に凸の曲線との二交点に挟まれた区間が静的不安定となる速度領域である。静的不安定となる速度領域は、拘束系の剛性が大きいほど拡大し、小さいほど縮小する。特に、拘束系の剛性が静的臨界剛性の極小値よりも小さくなると、その静的不安定となる速度領域が消滅する。最低臨界速度付近を見ると、回転円板のモード減衰比が 10^{-3} (実線), 2×10^{-3} (破線) の場合、拘束系の剛性がそれぞれ 3.1, 8.4 程度より小さければ、減衰を無視した場合に必ず存在する最初の静的不安定領域が消滅する。回転円板のモード減衰比が 5×10^{-3} (一点鎖線) の場合、ここでは静的臨界剛性そのものが存在せず、拘束系の剛性にかかわらず静的不安定領域が存在しない。図示した速度領域の全体について見れば、回転円板のモード減衰比が 10^{-3} , 2×10^{-3} , 5×10^{-3} の場合、拘束系の剛性をそれぞれ 1.6, 3.3, 10.3 程度以下にすれば、その速度領域の全体にわたって静的不安定にはならないといえる。

図4 静的臨界剛性 ($\beta=0.5$, $\nu=0.3$, $r_0=0.9$; ----- : $\zeta_{mn}=0$, ———— : $\zeta_{mn}=10^{-3}$, - · - · - : $\zeta_{mn}=2 \times 10^{-3}$, ... : $\zeta_{mn}=5 \times 10^{-3}$)

なお、臨界速度の間には、減衰が非常に小さい場合には、静的臨界剛性が存在しない、つまり静的不安定にはなりえない速度領域が見られる。しかし、回転円板のモード減衰比が 5×10^{-3} の場合、第2と第3の臨界速度の間で静的臨界剛性は有限で連続な値をとる。このことは、回転円板の減衰の増加によって静的不安定領域が広がりかねないことを示すものである。ただし、この速度領域は、それらの臨界速度にかかわる二つの固有モードに関する交差速度を含む領域で、むしろ動的不安定になりやすい領域である。したがって、上記のことだけで回転円板の減衰が安定性に及ぼす影響を議論するのは早計であり、動的不安定についても考慮を払わなければならない。

5.4 最小臨界剛性と最小臨界質量 動的不安定に関する臨界値である、式(16)で与えられる動的臨界剛性 K_{cd} 、式(17)で与えられる臨界質量 M_c は、回転円板のリセプタンスのベクトル軌跡の図の上では、それぞれ実軸の負の部分、正の部分との交点の原点からの距離の逆数に対応する。回転円板のパラメータの変化によって、その交点が原点から離れると、これらの臨界値は減少する。特に、交差速度の前後では、その交差振動数にかかわる二つの固有モードの干渉が大きいから、それに対応するベクトル軌跡の部分の実軸との交点が原点から大きく離れる。そのため、交差速度の直前では臨界質量が、直後では動的臨界剛性が、それぞれ顕著に小さくなる。ただし、その距離は有限であるから、臨界値は下限をもつ。したがって、境界剛性、境界質量が大きいほうからそれらの臨界値に向かうのならば、拘束系の質量、剛性をそれらの下限より小さくすれば動的不安定にならない。

また、回転円板のリセプタンスのベクトル軌跡の全体の大きさはそのモード減衰比にほぼ反比例する。したがって、そのモード減衰比が増加すると一般に安定領域が拡大する。一方、拘束系の減衰は、式(13)、(14)に見られるように、動的不安定に関する境界に複雑な影響を及ぼす。ただし、境界質量の極限值である臨界質量や、境界剛性の極限值である動的臨界剛性は、拘束系の減衰の影響を受けない。それに対して、図3で示した+印を付けた点の境界質量と境界剛性は拘束系の減衰比に反比例する。そのため、安定境界が図3(d)のようになる場合、拘束系の減衰比を増加させると、+印がついた付近の境界が左下に移動するので、一般に安定領域が減少する。

拘束系がばねだけの場合、静的臨界剛性 K_{cs} と動的臨界剛性 K_{cd} の最小値(最小臨界剛性)よりもその剛性が小さいとき安定である。また、拘束系が質量だけ

の場合、臨界質量 M_c の最小値(最小臨界質量)よりもその質量が小さいとき安定である。図5に最小臨界質量、図6に最小臨界剛性をそれぞれ回転速度の関数として示す。それぞれの図には、回転円板のすべてのモード減衰比を一定として、四とおりの値で計算した結果を実線、破線、一点鎖線、二点鎖線で示す。また、減衰を無視した場合を点線で示す。減衰を無視した場合には、臨界質量は交差速度の低いほうからの極限が零に収束し、臨界剛性は臨界速度と交差速度の高いほうからの極限が零に収束する⁽²⁾。それぞれの図にはそのような回転速度を縦の細い一点鎖線で示す。

図5に示した最小臨界質量は、モード減衰比が増加するのに伴って、単調に増加する。特に、縦の細い一点鎖線で示した交差速度の直前の速度で極小となる付近での増加が著しい。モード減衰比が 10^{-2} (二点鎖線)まで増加すると、図示した範囲でのその最小値は1.48

図5 最小臨界質量 ($\beta=0.5$, $\nu=0.3$, $r_0=0.9$,
 ..... : $\zeta_{mn}=0$, — : $\zeta_{mn}=10^{-3}$,
 --- : $\zeta_{mn}=2 \times 10^{-3}$, - · - : $\zeta_{mn}=5 \times 10^{-3}$, · · · : $\zeta_{mn}=10^{-2}$)

図6 最小臨界剛性 ($\beta=0.5$, $\nu=0.3$, $r_0=0.9$
 ..... : $\zeta_{mn}=0$, — : $\zeta_{mn}=10^{-3}$,
 --- : $\zeta_{mn}=2 \times 10^{-3}$, - · - : $\zeta_{mn}=5 \times 10^{-3}$, · · · : $\zeta_{mn}=10^{-2}$)

となる。したがって、拘束系が質量だけの場合には、その質量を 1.48 より小さくして、回転円板のモード減衰比を 10^{-2} にすれば、図示した速度領域の全体にわたって安定となる。なお、減衰を無視した場合(点線)の最小臨界質量は、全体としては減衰を考慮した場合と同様の傾向を示している。しかし、定量的には減衰が十分に小さいときの近似値とはみなせない。

図 6 に示した最小臨界剛性も、モード減衰比の増加に伴って、単調に増加する。特に、縦の細い一点鎖線で示した臨界速度(▼)や交差速度(×)の直後の速度で極小となる付近での増加が著しい。モード減衰比が 10^{-2} (二点鎖線)まで増加すると、図示した範囲でのその最小値は 18.7 となる。したがって、拘束系がばねだけの場合には、その剛性を 18.7 より小さくして、回転円板のモード減衰比を 10^{-2} にすれば、図示した速度領域の全体にわたって安定となる。なお、減衰を無視した場合(点線)の最小臨界剛性は、零に収束する付近の極端に値が小さくなる速度では減衰を考慮した場合の値とかけ離れているが、それ以外の速度では、モード減衰比が十分に小さいときの近似値とみなせる。

拘束系に質量とばねの両者が存在するとき、減衰を無視した解析では、その質量、剛性がそれぞれ最小臨界質量、最小臨界剛性より小さければ十分に安定であるといえた⁽²⁾。減衰を考慮した解析でも、図 3 に示したような場合には同じことがいえる。しかし、拘束系の減衰比がある程度大きくなると、質量、剛性がともにそれぞれの最小の臨界値より小さくても不安定になる場合が出てくる。式(24)の第 1 式と第 2 式で与えられる境界上の点が最小臨界質量、最小臨界剛性よりも小さい領域に入るときには、そのようなことが起こる。その点の境界質量、境界剛性の値は拘束系の減衰比に反比例するが、同時に回転円板のリセプタンスのベクトル軌跡の虚軸の正の部分との交点の原点からの距離にも反比例する。そして、その距離は回転円板のモード減衰比にほぼ反比例する。したがって、その点の境界質量、境界剛性の値は回転円板のモード減衰比にほぼ比例するといえる。極端な場合、回転円板のモード減衰比を限りなく小さくすれば、その点の境界質量、境界剛性の値はともに零に収束し、安定領域が消滅する。Iwan ら⁽³⁾ が減衰を拘束系についてのみ考慮して、回転円板については無視した解析から、最低臨界速度よりも高い回転速度では常に不安定であることを導いているが、それはこのような極端な場合に相当

するものであり、妥当な結論とはいえない。上記の比例、反比例の関係から、拘束系の減衰が大きいために不安定になる場合についても、回転円板の減衰を増加させることによって安定化させることができるといえる。

したがって、拘束系の減衰に対応して回転円板にも適当な減衰を与えれば、拘束系の質量、剛性をそれぞれ最小臨界質量、最小臨界剛性より低くすることにより、最低臨界速度より高い回転速度でも安定とすることができる。例えば、これまで調べた速度の範囲で、回転円板のモード減衰比を 10^{-2} にすると、拘束系の質量が 1 以下、剛性が 10 以下のとき、拘束系の減衰が十分に小さければ安定であることが図 5, 6 からわかるが、たとえ拘束系の減衰が増大しても臨界減衰未満ならば安定であることが数値計算から確かめられる。

6. 結 言

減衰を考慮した場合の空間に固定した点で拘束された回転円板の安定性について検討した。まず、安定判別にナイキストの方法が利用できることを示した。さらに、拘束系を 1 自由度の質量・ダンパ・ばね系に特定して、その減衰比が一定であるとしたときのその質量と剛性に関する安定境界の厳密式を導いた。そして、回転円板の減衰が回転円板のリセプタンスのベクトル軌跡の形状に及ぼす影響を考察し、それが安定性に及ぼす影響を解析的に明らかにした。また、1 自由度の質量・ダンパ・ばね系の拘束系のパラメータに関する、安定となるための指標である最小臨界剛性、最小臨界質量を導き、それらと減衰や回転速度との関係を明らかにした。その結果、拘束系の減衰を増加させると一般に安定領域が縮小すること、回転円板の減衰の増加によって安定化が可能ながわかった。

なお、数値計算および作図にあたっては、京都大学大型計算機センターを利用した。

文 献

- (1) Honda, Y., Matsuhisa, H. and Sato, S., The Stability of a Rotating Disk Restrained at a Space-Fixed Point, *Proc. 1991 Asia-Pacific Vib. Conf.*, Vol. 1 (1991), 6.28.
- (2) 本田・松久・佐藤, 空間に固定した点で拘束された回転円板の安定性(減衰を無視した場合), *機論*, **60**-576, C (1994), 2714.
- (3) Iwan, W. D. and Moeller, T. L., Stability of a Spinning Elastic Disk With Transverse Load System, *Trans. ASME, J. Appl. Mech.*, **43**(1976), 485.