半径方向の高次モードを考慮した垂直励振を受ける 円筒容器内液面の非線形振動解析*

木村 康 治^{*1}, 高 原 弘 樹^{*1}, 坂 田 勝^{*2}

Effects of Higher Order Radial Modes upon Nonlinear Sloshing in a Circular Cylindrical Tank Subjected to Vertical Excitation

Koji KIMURA, Hiroki TAKAHARA and Masaru SAKATA

Parametric vibration of the liquid surface in a partially filled circular cylindrical tank is investigated. The tank is subjected to horizontal, vertical and pitching excitations. Nonlinearity of the liquid surface oscillation is considered in the response analysis of the sloshing motion. The nonlinear and parametric ordinary differential equations, governing the axisymmetric liquid surface oscillation and including the higher order radial modes, are derived by applying Galerkin's method. It is confirmed that the vertical excitation causes the parametric excitation. In addition, it is noted that the pitching excitation also causes the parametric excitation when the pitching axis does not intersect the symmetrical axis of the circular cylindrical tank. The time histories of the liquid surface displacement to the harmonic vertical excitations are calculated in cases where the dominant mode is axisymmetric and where it has nodal radii. An experiment was conducted using a model tank. Good agreement was found between the theoretical and experimental results.

Key Words: Vibration of Continuous System, Liquid Sloshing, Circular Cylindrical Tank, Nonlinear Vibration, Vertical Excitation, Parametric Vibration, Higher Order Radial Modes

1. 結 言

容器内液体が外部の励振力と共振し、液面の振動が非常に大きくなる現象はスロッシングと呼ばれる。スロッシング応答は液面の振幅が大きくなると顕著な非線形性を示すことが知られており、その動的挙動を明らかにするためには、液面揺動の非線形性を考慮することが不可欠である^{(1)~(4)}。

液体貨物運搬船やロケット等では、垂直方向の励振のため、内部の液体容器でスロッシングが発生すると、容器内の動圧に大きな変動が起き、挙動に悪影響を及ぼすと考えられるので、垂直方向に励振を受ける容器内液面のスロッシングの特性を明らかにすることは工学上重要な課題である。すでに、垂直方向励振を受ける容器内液面の振動が、パラメトリック振動となることはよく知られており⁽⁵⁾、さらに、最低次モード近傍の振動モードに着目した非線形パラメトリック振動の研究も行われている^{(6)~(8)}。しかしながら、垂直方向の励振によって、常に最低次モードがパラメトリック励

振を引き起こすとは限らないので、最低次モード近傍の振動特性だけでは必ずしも十分ではなく、高次のモードがパラメトリック共振を起こす場合の振動特性を明らかにする必要があると考えられる。

著者らはすでに、スロッシング応答の非線形性を考慮し、ピッチング励振と水平・鉛直方向励振を受ける場合について液面の非線形応答解析の定式化⁽⁹⁾を行い、節直径を有する任意の振動モードが卓越する場合について、半径方向の高次モードの連成を考慮して、液面揺動を支配する非線形振動方程式を導出するとともに、調和ピッチング励振を受ける場合に着目して報告を行っている⁽¹⁰⁾⁽¹¹⁾。

本研究では、同様の励振を受ける円筒容器内の液面揺動を対象にして、円周方向モードの非線形連成特性の違い⁽⁶⁾⁽⁷⁾⁽¹⁰⁾により前報⁽¹⁰⁾⁽¹¹⁾では取扱わなかった任意の軸対称モードが卓越する場合について、半径方向の高次モードの連成を考慮して、液面揺動を支配する振動方程式を導出した。調和垂直励振を受ける場合に着目し、パラメトリック共振によって、軸対称モードまたは節直径を有するモードが卓越する両方の場合の数値計算結果と、モデルタンクを用いた実験結果との比較・検討を行った結果について報告する。さらに、ピッチング励振のみによってパラメトリック共振が生じ

* 原稿受付 平成6年4月21日。

^{*1} 正員, 東京工業大学工学部 (〒152 東京都目黒区大岡山2-12-1)。

^{*2} 正員, 拓殖大学工学部 (〒193 八王子市館町815-1)。

図1 解析モデル

軸対称モードが卓越する場合があることを指摘し、あわせて報告を行う。

2. 解析モデル

図1に剛体円筒容器の解析モデルを示す。O-XYZは静止座標系、o-xyz、o-rθz(x軸方向がθ=0°)は容器に固定された移動座標系である。容器はX, Z方向にそれぞれ強制変位f_X(t), f_Z(t)を受けると同時に、座標系o-xyz上の一点C(x_c, 0, z_c)(以後、回転中心と呼ぶ)を通りy軸に平行な直線まわりにピッチングによる角度励振ξ(t)を受けるものとする。ここで、剛体円筒容器の半径をa、高さをl、静止時の液深をh、液体の密度をρ_fで表し、重力は-Z方向(下向き)に働くものとする。また、解析では液体は渦なしの非圧縮性完全流体と仮定する。

3. 理論解析

卓越するモードが軸対称モードの場合と節直径を有するモードの場合では、円周方向モードの非線形連成が異なる⁽⁶⁾⁽¹⁰⁾ことから、3・2節以降では、両者を分けて考察する。なお、節直径を有するモードが卓越する場合については、前報⁽¹⁰⁾ですでに報告しているので、本報では必要に応じて記述することにする。

3・1 基礎方程式 液位をη(r, θ, t)、液体の速度ポテンシャルをφ(r, θ, z, t)とすると、本系の基礎方程式は変分原理により以下のように導かれる⁽⁹⁾。

$$\nabla^2 \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{\partial \phi}{r \partial r} + \frac{\partial^2 \phi}{r^2 \partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \quad \cdots (1)$$

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial r} \right|_{r=a} = v_r, \quad \left. \frac{\partial \phi}{\partial z} \right|_{z=0} = v_z \quad \cdots (2)$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^a \eta r dr d\theta = 0 \quad \cdots (3)$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^a P \Big|_{z=h+\eta} \delta \eta r dr d\theta = 0 \quad \cdots (4)$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^a \left\{ -\frac{\partial \eta}{\partial t} + (\nabla \phi - v_c) \Big|_{z=h+\eta} \cdot \nabla (z-h-\eta) \right\} \times \delta \phi \Big|_{z=h+\eta} r dr d\theta = 0 \quad \cdots (5)$$

ここで、Pは静止座標系における圧力であり、移動座標系o-rθzの成分を用いて表せば次式ようになる。

$$\begin{aligned} P(r, \theta, z, t) = & -\rho_f \left[\frac{\partial \phi}{\partial t} - v_r \frac{\partial \phi}{\partial r} - v_\theta \frac{\partial \phi}{r \partial \theta} - v_z \frac{\partial \phi}{\partial z} \right. \\ & + g \{ -(r \cos \theta - x_c) \sin \xi \\ & + (z - z_c) \cos \xi + f_z + z_c \} \\ & \left. + \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial \phi}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{r \partial \theta} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 \right\} + \dot{G}(t) \right] \end{aligned} \quad \cdots (6)$$

速度ポテンシャルφは、移動座標系o-rθzの成分を用いて表されている。gは重力加速度、Ġ(t)はEulerの運動方程式を積分することで生じる任意の時間の関数である。また、v_r, v_θ, v_zは、容器が静止座標系に対して有する速度v_cのr, θ, z方向成分である⁽⁹⁾。

式(1)は連続条件、式(2)は側壁および底面における境界条件、式(3)は非圧縮性の条件、式(4), (5)は液面における力学的および運動学的非線形境界条件である。式(4), (5)はガレルキン法による計算の便宜上積分形で記した。

3・2 許容関数 スロッシング挙動に着目し、基礎方程式の近似解をガレルキン法を用いて求める⁽¹²⁾。軸対称モードが卓越する場合(円周方向0次・半径方向j次モードが卓越モード; j ≥ 1)と節直径を有するモードが卓越する場合(円周方向i次・半径方向j次モードが卓越モード; i, j ≥ 1)で、円周方向の非線形連成特性が異なる⁽⁶⁾⁽¹⁰⁾ことから、以下では、それぞれ別々に解析する。

速度ポテンシャルφと液位ηの許容関数を、線形自由振動解析から得られた固有振動モードによって以下のように表す。円周方向m次・半径方向n次の振動モードを単に(m, n)モードと表記する。

・軸対称モード [(0, j)モード] が卓越する場合

$$\begin{aligned} \phi(r, \theta, z, t) = & A_{0,j} J_0(\lambda_{0,j} r) \frac{\cosh(\lambda_{0,j} z)}{\cosh(\lambda_{0,j} h)} \\ & + \sum_{k=1, k \neq j}^{\infty} A_{0,k} J_0(\lambda_{0,k} r) \frac{\cosh(\lambda_{0,k} z)}{\cosh(\lambda_{0,k} h)} \\ & + r v_r + (z-h) v_z + \xi \{ r(z-h) \cos \theta \\ & + \Pi(r, \theta, z) \} \quad \cdots (7) \end{aligned}$$

$$\eta(r, \theta, t) = C_{0,j} J_0(\lambda_{0,j} r) + \sum_{k'=1, k' \neq j}^{\infty} C_{0,k'} J_0(\lambda_{0,k'} r) + r \cos \theta \tan \xi \dots \dots \dots (8)$$

・節直径を有するモード [(i, j) モード] が卓越する場合⁽¹⁰⁾

$$\begin{aligned} \phi(r, \theta, z, t) = & (A_{i,j} \cos i\theta + B_{i,j} \sin i\theta) \\ & \times J_i(\lambda_{i,j} r) \frac{\cosh(\lambda_{i,j} z)}{\cosh(\lambda_{i,j} h)} \\ & + \sum_{k=1}^{\infty} A_{0,k} J_0(\lambda_{0,k} r) \frac{\cosh(\lambda_{0,k} z)}{\cosh(\lambda_{0,k} h)} \\ & + \sum_{k=1}^{\infty} (A_{2i,k} \cos 2i\theta + B_{2i,k} \sin 2i\theta) \\ & \times J_{2i}(\lambda_{2i,k} r) \frac{\cosh(\lambda_{2i,k} z)}{\cosh(\lambda_{2i,k} h)} \\ & + \sum_{k'=1, k' \neq j}^{\infty} (A_{i,k'} \cos i\theta + B_{i,k'} \sin i\theta) \\ & \times J_i(\lambda_{i,k'} r) \frac{\cosh(\lambda_{i,k'} z)}{\cosh(\lambda_{i,k'} h)} \\ & + \sum_{k=1}^{\infty} (A_{3i,k} \cos 3i\theta + B_{3i,k} \sin 3i\theta) \\ & \times J_{3i}(\lambda_{3i,k} r) \frac{\cosh(\lambda_{3i,k} z)}{\cosh(\lambda_{3i,k} h)} + rv_r + (z-h)v_z \\ & + \xi \{ r(z-h) \cos \theta + \Pi(r, \theta, z) \} \dots \dots \dots (9) \\ \eta(r, \theta, t) = & (C_{i,j} \cos i\theta + D_{i,j} \sin i\theta) J_i(\lambda_{i,j} r) \\ & + \sum_{k=1}^{\infty} C_{0,k} J_0(\lambda_{0,k} r) \\ & + \sum_{k=1}^{\infty} (C_{2i,k} \cos 2i\theta + D_{2i,k} \sin 2i\theta) J_{2i}(\lambda_{2i,k} r) \\ & + \sum_{k'=1, k' \neq j}^{\infty} (C_{i,k'} \cos i\theta + D_{i,k'} \sin i\theta) J_i(\lambda_{i,k'} r) \\ & + \sum_{k=1}^{\infty} (C_{3i,k} \cos 3i\theta + D_{3i,k} \sin 3i\theta) J_{3i}(\lambda_{3i,k} r) \\ & + r \cos \theta \tan \xi \dots \dots \dots (10) \end{aligned}$$

ここで、 $A_{m,n}(t)$, $B_{m,n}(t)$, $C_{m,n}(t)$, $D_{m,n}(t)$ は一般化座標、 J_m は m 次の第1種ベッセル関数である。 $\lambda_{m,n}$ は円周方向 m 次・半径方向 n 次に対応する固有値であり、側壁における境界条件式(2)より定められる n 番目の正根である。固有値 $\lambda_{m,n}$ と固有振動数 $\omega_{m,n}$ との間には以下の関係がある。

$$\omega_{m,n}^2 = \frac{g \lambda_{m,n}}{a} \tanh \left(\frac{\lambda_{m,n} h}{a} \right) \dots \dots \dots (11)$$

また、 Π は境界条件を満たすために必要な項である⁽⁹⁾。

液面での非線形連成の性質⁽²⁾と卓越するモードの形状を考慮して、節直径を有する (i, j) モード (i 本の節直径をもつ) が卓越する場合には、許容関数を軸対称な $(0, k)$ モード (節直径なし)、節直径を $2i$ 本もつ $(2i, k)$ モード、 i 本もつ (i, k) モードおよび $3i$ 本もつ $(3i, k)$ モードで構成 [式(9), (10)] し、一方、軸対称な $(0, j)$ モードが卓越する場合には、許容関数を軸対称な $(0, k)$ モードだけで構成 [式(7), (8)] した。具

体的には、以下のような理由による。液面での非線形連成の性質⁽²⁾により、卓越するモードの二乗が見かけ上の励振力となって連成するモードがある。そのため、節直径を有する (i, j) モードが卓越する場合には、連成するモードは、見かけ上、円周方向に $\cos^2 i\theta$ または $\sin^2 i\theta$ 状に分布する励振力を受けることになり、円周方向に変化しない振動モード (軸対称モード) と $\cos 2i\theta$ または $\sin 2i\theta$ 状に変化する振動モード (節直径を $2i$ 本有するモード) が励起される⁽¹⁰⁾。一方、軸対称な $(0, j)$ モードが卓越する場合には、そのモード形状に三角関数を含まない [式(7), (8)] ので、卓越するモードの二乗と連成するモードにも、軸対称な励振力だけが作用することになり、節直径を有するモードは励振されず、円周方向のモード間に連成は生じないと考えたからである。

3.3 振動方程式系 諸量を容器半径 a と卓越するモードの固有振動数 $\omega_{0,j}$ または $\omega_{i,j}$ (卓越するモードが軸対称か節直径を有するかによる) により無次元化した後⁽⁹⁾、卓越するモードに対応した許容関数式(7), (8)または式(9), (10)を液面における非線形境界条件式(4), (5)に代入して、ガレルキン法を適用し、液位に関する非線形振動方程式を導く。このとき、一般化座標と励振のオーダの仮定を行い高次の微小量を消去する。ここでは、軸対称モードが卓越する場合に用いたオーダの仮定を示す (節直径を有するモードが卓越する場合の仮定は省略する⁽¹⁰⁾)。

$$\left. \begin{aligned} A_{0,j}, \dot{A}_{0,j}, \ddot{A}_{0,j}, C_{0,j}, \dot{C}_{0,j}, \ddot{C}_{0,j} & \sim O(\varepsilon^{1/3}) \\ A_{0,k}, \dot{A}_{0,k}, \ddot{A}_{0,k}, C_{0,k}, \dot{C}_{0,k}, \ddot{C}_{0,k} \quad (k \neq j) & \sim O(\varepsilon^{2/3}) \\ f_x, \dot{f}_x, \ddot{f}_x, f_z, \dot{f}_z, \ddot{f}_z, \xi, \dot{\xi}, \ddot{\xi} & \sim O(\varepsilon^{3/3}) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (12)$$

液位に関する一般化座標について整理すると以下のような振動方程式系が得られる。

・軸対称モード [(0, j) モード] が卓越する場合

$$\begin{aligned} \ddot{C}_{0,j} + 2\zeta_{0,j} \dot{C}_{0,j} + (1 + \phi_{0,j} \ddot{f}_z + \phi_{0,j} x_c \ddot{\xi}) C_{0,j} \\ = \tilde{P}_{j,j}^{(1)} C_{0,j}^2 + \tilde{P}_{j,j}^{(2)} \dot{C}_{0,j}^2 + \tilde{P}_{j,j}^{(3)} C_{0,j}^3 + \tilde{P}_{j,j}^{(4)} C_{0,j} \dot{C}_{0,j}^2 \\ + \sum_{k'=1, k' \neq j}^{\infty} \tilde{P}_{j,j,k'}^{(5)} C_{0,j} C_{0,k'} \\ + \sum_{k'=1, k' \neq j}^{\infty} \tilde{P}_{j,j,k'}^{(6)} \dot{C}_{0,j} \dot{C}_{0,k'} \dots \dots \dots (13) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \ddot{C}_{0,k} + 2\zeta_{0,k} \omega_{0,k} \dot{C}_{0,k} + \omega_{0,k}^2 C_{0,k} \\ = \tilde{P}_{j,k}^{(1)} C_{0,j}^2 + \tilde{P}_{j,k}^{(2)} \dot{C}_{0,j}^2 \\ + \tilde{P}_{j,k}^{(3)} C_{0,j}^3 + \tilde{P}_{j,k}^{(4)} C_{0,j} \dot{C}_{0,j}^2 \\ + \sum_{k'=1, k' \neq j}^{\infty} \tilde{P}_{j,k,k'}^{(5)} C_{0,j} C_{0,k'} \\ + \sum_{k'=1, k' \neq j}^{\infty} \tilde{P}_{j,k,k'}^{(6)} \dot{C}_{0,j} \dot{C}_{0,k'} \dots \dots \dots (14) \end{aligned}$$

($k=1, 2, \dots, k \neq j$)

・節直径を有するモード $[(i, j) \text{ モード}]$ が卓越する場合(一部)

$$\begin{aligned} & \ddot{C}_{i,j} + 2\zeta_{i,j}\dot{C}_{i,j} + [1 + \phi_{i,j}\ddot{f}_z(t) + x_c\phi_{i,j}\ddot{\xi}(t)]C_{i,j} \\ & + P_{i,j}^{(1)}C_{i,j}^3 + P_{i,j}^{(2)}C_{i,j}\dot{C}_{i,j}^2 + P_{i,j}^{(3)}C_{i,j}D_{i,j}^2 \\ & + P_{i,j}^{(4)}C_{i,j}\dot{D}_{i,j}^2 + P_{i,j}^{(5)}\dot{C}_{i,j}D_{i,j}\dot{D}_{i,j} \\ & + \sum_{k=1}^{\infty} P_{i,j,0,k}^{(11)}C_{i,j}C_{0,k} + \sum_{k=1}^{\infty} P_{i,j,0,k}^{(12)}\dot{C}_{i,j}\dot{C}_{0,k} \\ & + \sum_{k=1}^{\infty} P_{i,j,2i,k}^{(11)}(C_{i,j}C_{2i,k} + D_{i,j}D_{2i,k}) \\ & + \sum_{k=1}^{\infty} P_{i,j,2i,k}^{(12)}(\dot{C}_{i,j}\dot{C}_{2i,k} + \dot{D}_{i,j}\dot{D}_{2i,k}) \\ & = [\sigma_{i,j}^{(P)}\ddot{\xi}(t) + \sigma_{i,j}^{(H)}\ddot{f}_x(t)]\delta_{1,i} \dots\dots\dots (15) \\ & \ddot{D}_{i,j} + 2\zeta_{i,j}\dot{D}_{i,j} + [1 + \phi_{i,j}\ddot{f}_z(t) + x_c\phi_{i,j}\ddot{\xi}(t)]D_{i,j} \\ & + P_{i,j}^{(1)}D_{i,j}^3 + P_{i,j}^{(2)}D_{i,j}\dot{D}_{i,j}^2 + P_{i,j}^{(3)}D_{i,j}C_{i,j}^2 \\ & + P_{i,j}^{(4)}D_{i,j}\dot{C}_{i,j}^2 + P_{i,j}^{(5)}\dot{D}_{i,j}C_{i,j}\dot{C}_{i,j} \\ & + \sum_{k=1}^{\infty} P_{i,j,0,k}^{(11)}D_{i,j}C_{0,k} + \sum_{k=1}^{\infty} P_{i,j,0,k}^{(12)}\dot{D}_{i,j}\dot{C}_{0,k} \\ & + \sum_{k=1}^{\infty} P_{i,j,2i,k}^{(11)}(C_{i,j}D_{2i,k} - D_{i,j}C_{2i,k}) \\ & + \sum_{k=1}^{\infty} P_{i,j,2i,k}^{(12)}(\dot{C}_{i,j}\dot{D}_{2i,k} - \dot{D}_{i,j}\dot{C}_{2i,k}) = 0 \\ & \dots\dots\dots (16) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \ddot{C}_{0,l} + 2\zeta_{0,l}\omega_{0,l}\dot{C}_{0,l} + \omega_{0,l}^2C_{0,l} \\ & = P_{i,j,0,l}^{(21)}(C_{i,j}^2 + D_{i,j}^2) + P_{i,j,0,l}^{(22)}(\dot{C}_{i,j}^2 + \dot{D}_{i,j}^2) \\ & (l=1, 2, \dots) \dots\dots\dots (17) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \ddot{C}_{2i,l} + 2\zeta_{2i,l}\omega_{2i,l}\dot{C}_{2i,l} + \omega_{2i,l}^2C_{2i,l} \\ & = P_{i,j,2i,l}^{(21)}(C_{i,j}^2 - D_{i,j}^2) + P_{i,j,2i,l}^{(22)}(\dot{C}_{i,j}^2 - \dot{D}_{i,j}^2) \\ & (l=1, 2, \dots) \dots\dots\dots (18) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \ddot{D}_{2i,l} + 2\zeta_{2i,l}\omega_{2i,l}\dot{D}_{2i,l} + \omega_{2i,l}^2D_{2i,l} \\ & = 2\{P_{i,j,2i,l}^{(21)}C_{i,j}D_{i,j} + P_{i,j,2i,l}^{(22)}\dot{C}_{i,j}\dot{D}_{i,j}\} \\ & (l=1, 2, \dots) \dots\dots\dots (19) \end{aligned}$$

ここで、 $\delta_{1,i}$ はクロネッカのデルタ、 $\phi_{i,j} = \lambda_{i,j} \tanh(\lambda_{i,j}h)$ である。軸対称モードが卓越する場合の振動方程式(13)、(14)中の係数 $\bar{P}_{j,k,k'}$ 等の詳細は付録に示す。節直径を有するモードが卓越する場合の振動方程式(15)右辺の外力の影響係数 $\sigma_{i,j}^{(P)}$ 、 $\sigma_{i,j}^{(H)}$ 、および式(15)～(19)中の係数 $P_{k,l}$ 等は省略する⁽¹⁰⁾。また、式中には、エネルギー散逸を等価的に表す線形減衰項を導入した。

4. 軸対称モードが卓越する場合の振動方程式の特徴

節直径を有するモードが卓越する場合の非線形振動方程式(15)～(19)の特性はすでに明らかにしている⁽¹⁰⁾⁽¹¹⁾ ので、ここでは、軸対称モードが卓越する場合の非線形振動方程式(13)、(14)に着目する。

卓越する軸対称モードに対して、垂直励振がパラメ

トリック振動を起こすことが確認できる⁽⁵⁾。さらに、ピッチング励振も式(13)より、垂直励振とともに $x_c\phi_{0,j}\ddot{\xi}$ の形でパラメトリック励振として卓越するモードに作用していることがわかる。一方、垂直励振($\ddot{f}_z$)、水平励振($\ddot{f}_x$)、ピッチング励振($\ddot{\xi}$)のいずれも、軸対称モードを直接励振できない。このため、液面が完全に静止した状態では、これらの励振を加えても液面揺動は生じないが、初期擾乱がある場合には、垂直励振または $x_c \neq 0$ の場合のピッチング励振を加えるとパラメトリック共振によって大きな液面揺動が生じると考えられる。

5. 実験

5.1 垂直励振 垂直励振用の実験装置のブロック線図を図2(a)に示す。低周波発信器で正弦波 $f_z(t) = f_{z0} \sin \omega t$ を発生させ、油圧加振器に入力し、円筒容器に鉛直方向励振を加えた。静止状態から励振を開始すると液面揺動が成長しにくいので、励振開始は、測定時の励振振幅より大きい振幅で加振し、液面揺動がパラメトリック共振で成長した後、励振振幅を測定

(a) 垂直励振

(b) ピッチング励振

図2 実験装置概略図

時の大きさに調整(振幅を小さく)し、液面揺動が定常に達したことを確認した後、超音波式変位計を用いて液位を測定した。模型円筒容器はアクリル製で内半径 140 mm, 高さ 300 mm である。

5・2 ピッチング励振 ピッチング励振用の実験装置のブロック線図を図 2(b) に示す。低周波発信器で正弦波 $\xi(t) = \xi_0 \sin \omega t$ を発生させ、油圧加振器に入力し、揺動台の先端に鉛直方向励振を加えることによって円筒容器にピッチング励振を与えた。ピッチング励振を加える場合には、垂直励振時に用いた励振振幅の調整は行っていない。円筒容器や変位計は垂直励振と同じものを用いた。

6. 結果および考察

6・1 垂直励振 図 3～9 に、調和垂直励振($f_z = f_{z0} \sin \omega t$)に対する腹の位置での液位の定常応答波形を示す。各図の横軸の時間は定常状態に達した後の経過時間である。液深は、いずれも円筒容器の半径で無次元化した値(以下も同様)で $h=1.0$ である。パラメトリック振動により軸対称モードが成長する場合(図 3, 4)と節直径を有するモードが成長する場合(図 5～9)について示す。いずれも上段は解析結果、下段は実験結果を表す。なお、計算では、適当な初期擾乱を与

え、さらに、振動方程式[軸対称モードが卓越する場合は式(13), (14), 節直径を有するモードが卓越する場合は式(15)～(19)]中の等価粘性減衰比は、すべてのモードに対して $\zeta_{m,n}=0.004$ [液面揺動の基本モード[(1,1)モード]の減衰自由振動波形から算定]を用いた。また、半径方向の高次モードを無限大までとることができないので、収束を確認し、考慮する次数を $\bar{n}$ 次までとした。

6・1・1 軸対称モードが卓越する場合 図 3 は、調和垂直励振の振動数が(0,1)モードの固有振動数($\omega_{0,1}^* = 2.61$ Hz, 上添字*は有次元量を表す, 以下同様)の2倍($\omega = 2\omega_{0,1}$), 励振振幅が $f_{z0} = 0.32$ mm, 半径方向5次モードまで考慮($\bar{n}=5$)した場合, 図 4 は、励振振動数が(0,2)モードの固有振動数($\omega_{0,2}^* = 3.53$ Hz)の2倍($\omega = 2\omega_{0,2}$), 励振振幅が $f_{z0} = 0.21$ mm, 半径方向13次モードまで考慮($\bar{n}=13$)した場合の容器中央部での液位応答である。両図とも計算結果と実験結果は一致しており、パラメトリック共振によりそれぞれ(0,1), (0,2)モードが成長し、液面揺動が大きくなるのがわかる。また、正側の振幅が負側の振幅より大きくなる非線形性の影響がよく現れている。

6・1・2 節直径を有するモードが卓越する場合 図 5, 6 は、励振振動数が(1,1)モードの固有振動数

図 3 中心部での液位の時刻歴応答 [(0,1)モード卓越]
($h=1.0$, $\zeta_{m,n}=0.004$, $\omega=2\omega_{0,1}$, $f_{z0}=0.32$ mm)

図 4 中心部での液位の時刻歴応答 [(0,2)モード卓越]
($h=1.0$, $\zeta_{m,n}=0.004$, $\omega=2\omega_{0,2}$, $f_{z0}=0.21$ mm)

($\omega_{1,1}^* = 1.76$ Hz) の 2 倍 ($\omega = 2\omega_{1,1}$), 励振振幅が $f_{z0} = 0.52$ mm, 半径方向 5 次モードまで考慮 ($\bar{n} = 5$) した場合の側壁近傍および容器中央部付近 ($r = 0.1$, 半径 r は容器半径で無次元化, 以下同様) での液位応答である。側壁近傍での液位応答 (図 5) は, 計算結果と実験結果はよく一致しており, パラメトリック共振により (1, 1) モードが成長し, 液面揺動が大きくなることがわかる。また, パラメトリック共振によって大きくなる (1, 1) モードの節近傍の容器中央部付近の液面揺動 (図 6) に, 図 5 に現れている (1, 1) モードの 2 倍の振動数の液面揺動が現れているのは, 前報⁽¹⁰⁾ で報告したようにこの液深 ($h = 1.0$) では, (1, 1) モードが大きく成長すると非線形連成によって, (1, 1) モードの 2 倍の振動数で振動する軸対称の (0, 2) モードも大きくなるからである。図 6 の計算結果, 実験結果は振幅には少し差があるが, ともにこの非線形連成の影響をよく示している。振幅に現れた差のおもな原因は, 数値計算においてすべてのモードに対して同じ減衰比を仮定したため, 計算結果と実験結果では液面揺動に対する高次モードからの影響に差が生じたことにあると考えられる。

図 7 は, 調和垂直励振の振動数が (1, 2) モードの固

有振動数 ($\omega_{1,2}^* = 3.08$ Hz) の 2 倍 ($\omega = 2\omega_{1,2}$), 励振振幅が $f_{z0} = 0.39$ mm, 半径方向 7 次モードまで考慮 ($\bar{n} = 7$) した場合の側壁と中心の中間部 ($r = 0.35$) での, 図 8 は, 励振振動数が (2, 1) モードの固有振動数 ($\omega_{2,1}^* = 2.32$ Hz) の 2 倍 ($\omega = 2\omega_{2,1}$), 励振振幅が $f_{z0} = 0.50$ mm, 半径方向 7 次モードまで考慮 ($\bar{n} = 7$) した場合の側壁と中心の中間部 ($r = 0.50$) での, 図 9 は, 励振振動数が (2, 2) モードの固有振動数 ($\omega_{2,2}^* = 3.45$ Hz) の 2 倍 ($\omega = 2\omega_{2,2}$), 励振振幅が $f_{z0} = 0.35$ mm, 半径方向 11 次モードまで考慮 ($\bar{n} = 11$) した場合の側壁と中心の中間部 ($r = 0.46$) での液位応答である。図 8 [(2, 1) モードが卓越する場合] には高次モードからの影響に若干差があるが, 各図とも計算結果と実験結果は一致している。また, パラメトリック共振によりそれぞれ (1, 2), (2, 1), (2, 2) モードが成長し, 液面揺動が大きくなることがわかる。図 7 [(1, 2) モードが卓越する場合], 図 9 [(2, 2) モードが卓越する場合] には, 正側の振幅が負側の振幅より大きくなる非線形性の影響がよく現れている。

6・2 ピッチング励振 4 章で述べたように, ピッチング励振のみを加えた場合にも, その回転中心位置が $x_c \neq 0$ の場合には, パラメトリック共振が生じる

図 5 側壁近傍での液位の時刻歴応答 [(1, 1) モード卓越]
($h = 1.0$, $\zeta_{m,n} = 0.004$, $\omega = 2\omega_{1,1}$, $f_{z0} = 0.52$ mm)

図 6 中心部付近 ($r = 0.1$) での液位の時刻歴応答 [(1, 1) モード卓越]
($h = 1.0$, $\zeta_{m,n} = 0.004$, $\omega = 2\omega_{1,1}$, $f_{z0} = 0.52$ mm)

図 7 側壁と中心の中間部 ($r=0.35$) での液位の時刻歴応答 [(1, 2) モード卓越]
($h=1.0$, $\zeta_{m,n}=0.004$, $\omega=2\omega_{1,2}$, $f_{z0}=0.39$ mm)

図 9 側壁と中心の中間部 ($r=0.46$) での液位の時刻歴応答 [(2, 2) モード卓越]
($h=1.0$, $\zeta_{m,n}=0.004$, $\omega=2\omega_{2,2}$, $f_{z0}=0.35$ mm)

図 8 側壁と中心の中間部 ($r=0.50$) での液位の時刻歴応答 [(2, 1) モード卓越]
($h=1.0$, $\zeta_{m,n}=0.004$, $\omega=2\omega_{2,1}$, $f_{z0}=0.50$ mm)

図 10 側壁近傍での液位の時刻歴応答 [(0, 1) モード卓越]
(ピッチング励振によるパラメトリック共振)
($h=1.0$, $(x_c, z_c)=(0.743, 0)$, $\zeta_{m,n}=0.004$,
 $\omega=2\omega_{0,1}$, $\xi_0=0.12^\circ$)

ことを確認するために、図 10 に、ピッチングの回転中心位置を $(x_c, z_c) = (0.743, 0)$ とした場合の調和ピッチング励振 $[\xi(t) = \xi_0 \sin \omega t]$ に対する側壁近傍での腹の位置での液位の定常応答を示す。横軸の時間は定常状態に達した後の経過時間である。液深は $h = 1.0$ 、励振振動数は $(0, 1)$ モードの固有振動数 ($\omega_{0,1}^* = 2.61$ Hz) の 2 倍 ($\omega = 2\omega_{0,1}$)、励振の角度振幅は $\xi_0 = 0.12^\circ$ 、半径方向 5 次モードまで考慮 ($\bar{n} = 5$) している。また、振動方程式 (13), (14) 中の等価粘性減衰比は、すべてのモードに対して $\zeta_{m,n} = 0.004$ とした。上段の計算結果と下段の実験結果は一致しており、 $x_c \neq 0$ の場合、ピッチング励振のみを加えるだけでも、パラメトリック共振を起こし、液面揺動が励起できることがわかる。

7. 結 言

剛体円筒容器がピッチング励振と水平・垂直方向励振を同時に受ける場合について、前報⁽⁹⁾で定式化した非線形応答解析の基礎方程式に基づいて、ガレルキン法を用いて任意の軸対称モードが卓越する場合について、液面揺動を支配する振動方程式を導出した。このとき、半径方向の高次モードの連成を考慮している。導出した振動方程式から、垂直励振がパラメトリック共振を起こすことを確認した。さらに、モデルタンクを用いて実験を行い、計算結果と実験結果を比較・検討することによって、以下の結論を得た。

(1) 垂直方向励振を受ける場合において、軸対称な $(0, 1)$ および $(0, 2)$ モードが卓越する場合について、計算結果と実験結果はよく一致することを示し、半径方向の高次モードを考慮する本解析法の有効性を明らかにした。

(2) 垂直方向励振を受ける場合において、節直径を有する $(1, 1)$, $(1, 2)$, $(2, 1)$ および $(2, 2)$ モードが卓越する場合について、計算結果と実験結果はよく一致することを示し、前報⁽¹⁰⁾で示した半径方向の高次モードを考慮する解析法が垂直励振を受ける場合においても有効であることを明らかにした。

(3) ピッチング励振のみが作用する場合でも、パラメトリック振動により軸対称モードが成長する場合があることを示し、実験によって確認した。

付 録

式 (13), (14) 中の係数 $\tilde{P}_{jkk'}$ 等は以下のとおりである。

$$\tilde{P}_{k,l}^{(1)} = \phi_{0,l} \tilde{K}_{k,k,l}^{(2)} - \frac{1}{\phi_{0,k}} \tilde{H}_{k,l}^{(6)}$$

$$\begin{aligned} \tilde{P}_{k,l}^{(2)} &= -\phi_{0,l} \tilde{H}_{k,l}^{(1)} + \frac{1}{\phi_{0,k}} \tilde{H}_{k,l}^{(6)} \\ \tilde{P}_{k,l}^{(3)} &= \phi_{0,l} \tilde{H}_{k,l}^{(2)} + \tilde{H}_{k,l}^{(6)} \tilde{K}_{k,k,l}^{(2)} \\ &\quad - \frac{1}{\phi_{0,k}} \tilde{H}_{k,l}^{(7)} + \sum_{i \neq k} \tilde{H}_{k,l}^{(9)} i \tilde{K}_{k,i}^{(2)}, \\ \tilde{P}_{k,l}^{(4)} &= \phi_{0,l} \tilde{H}_{k,l}^{(3)} - \tilde{H}_{k,l}^{(6)} \tilde{H}_{k,l}^{(1)} + \tilde{H}_{k,l}^{(6)} \tilde{H}_{k,l}^{(10)} \\ &\quad + \frac{2}{\phi_{0,k}} \tilde{H}_{k,l}^{(7)} + \sum_{i \neq k} \{H_{k,i}^{(10)} - H_{k,i}^{(1)}\} H_{k,l}^{(9)}, \\ \tilde{P}_{k,l,i}^{(5)} &= \phi_{0,l} \tilde{H}_{k,l,i}^{(4)} - \frac{1}{\phi_{0,k}} \{ \tilde{H}_{k,l,i}^{(8)} + \tilde{H}_{k,l,i}^{(9)} \} \\ \tilde{P}_{k,l,i}^{(6)} &= \phi_{0,l} \tilde{H}_{k,l,i}^{(5)} + \frac{1}{\phi_{0,k}} \tilde{H}_{k,l,i}^{(8)} + \frac{1}{\phi_{0,i}} \tilde{H}_{k,l,i}^{(9)} \\ &\quad (k, l, i = 1, 2, 3, \dots) \end{aligned}$$

ここで、

$$\begin{aligned} \tilde{H}_{k,l}^{(1)} &= \frac{1}{2\phi_{0,k}^2} (\tilde{K}_{k,k,l}^{(r)} + \phi_{0,k}^2 \tilde{K}_{k,k,l}^{(z)}) \\ \tilde{H}_{k,l}^{(2)} &= \frac{\lambda_{0,k}^2}{2\phi_{0,k}} \tilde{K}_{k,k,l}^{(z)} - \sum_{i=1}^{\infty} \phi_{0,i} \tilde{K}_{k,i,l}^{(z)} \tilde{K}_{k,k,l}^{(z)} \\ \tilde{H}_{k,l}^{(3)} &= -\frac{1}{\phi_{0,k}} (\tilde{K}_{k,k,k,l}^{(r)} + \lambda_{0,k}^2 \tilde{K}_{k,k,l}^{(z)}) \\ &\quad + \sum_{i=1}^{\infty} \left\{ \frac{\phi_{0,i}}{2\phi_{0,k}^2} \tilde{K}_{k,i,l}^{(z)} (\tilde{K}_{k,i,l}^{(r)} + \phi_{0,k}^2 \tilde{K}_{k,k,l}^{(z)}) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{\phi_{0,k}^2 \phi_{0,i}} (\tilde{K}_{k,i,l}^{(r)} + \phi_{0,k} \phi_{0,i} \tilde{K}_{k,i,l}^{(z)}) \right. \\ &\quad \left. \times (\tilde{K}_{k,k,i}^{(r)} - \lambda_{0,k}^2 \tilde{K}_{k,k,l}^{(z)}) \right\} \\ \tilde{H}_{k,l,i}^{(4)} &= \left(1 + \frac{\phi_{0,i}}{\phi_{0,k}} \right) \tilde{K}_{k,i,l}^{(z)} \\ \tilde{H}_{k,l,i}^{(5)} &= -\frac{1}{\phi_{0,k} \phi_{0,i}} (\tilde{K}_{k,i,l}^{(r)} + \phi_{0,k} \phi_{0,i} \tilde{K}_{k,i,l}^{(z)}) \\ \tilde{H}_{k,l}^{(6)} &= \lambda_{0,k}^2 \tilde{K}_{k,k,l}^{(z)} - \tilde{K}_{k,k,l}^{(r)} \\ \tilde{H}_{k,l}^{(7)} &= -(\phi_{0,k} + \phi_{0,l}) \tilde{K}_{k,k,l}^{(r)} \\ &\quad + \lambda_{0,k}^2 \left(\frac{1}{2} \phi_{0,k} + \phi_{0,l} \right) \tilde{K}_{k,k,l}^{(z)} \\ &\quad + \sum_{i=1}^{\infty} \phi_{0,i} (\tilde{K}_{k,k,i}^{(r)} - \lambda_{0,k}^2 \tilde{K}_{k,k,l}^{(z)}) \tilde{K}_{k,i,l}^{(z)} \\ \tilde{H}_{k,l,i}^{(8)} &= \lambda_{0,k}^2 \tilde{K}_{k,i,l}^{(z)} - \tilde{K}_{k,i,l}^{(r)} \\ \tilde{H}_{k,l,i}^{(9)} &= \lambda_{0,i}^2 \tilde{K}_{k,i,l}^{(z)} - \tilde{K}_{k,i,l}^{(r)} \\ \tilde{H}_{k,l}^{(10)} &= \frac{1}{\phi_{0,k} \phi_{0,l}} (\tilde{K}_{k,k,l}^{(r)} - \lambda_{0,k}^2 \tilde{K}_{k,k,l}^{(z)}) \\ &\quad (i, k = 1, 2, \dots) \end{aligned}$$

さらに、

$$\begin{aligned} \tilde{K}_{a,b,c,d}^{(r)} &= \int_0^1 r \frac{dJ_0(\lambda_{0,a} r)}{dr} \frac{dJ_0(\lambda_{0,b} r)}{dr} \\ &\quad \times J_0(\lambda_{0,c} r) J_0(\lambda_{0,d} r) dr / \tilde{I}_{0,d} \\ \tilde{K}_{a,b,c,d}^{(z)} &= \int_0^1 r J_0(\lambda_{0,a} r) J_0(\lambda_{0,b} r) J_0(\lambda_{0,c} r) \\ &\quad \times J_0(\lambda_{0,d} r) dr / \tilde{I}_{0,d} \\ \tilde{K}_{a,b,c}^{(r)} &= \int_0^1 r \frac{dJ_0(\lambda_{0,a} r)}{dr} \frac{dJ_0(\lambda_{0,b} r)}{dr} \\ &\quad \times J_0(\lambda_{0,c} r) dr / \tilde{I}_{0,c} \end{aligned}$$

$$\tilde{K}_{a,b,c}^{(z)} = \int_0^1 r J_0(\lambda_{0,a} r) J_0(\lambda_{0,b} r) J_0(\lambda_{0,c} r) dr / \tilde{I}_{0,c}$$

$$\tilde{I}_{0,a} = \int_0^1 r \{J_0(\lambda_{0,a} r)\}^2 dr$$

である。

文 献

- (1) Abramson, H. N., *NASA SP-106*, (1966).
- (2) Hutton, R. E., *NASA TND-1870*, (1963).
- (3) Miles, J. W., *J. Fluid Mech.*, **149**(1984), 1.
- (4) Funakoshi, M. and Inoue, S., *Fluid Dyna. Res.*, **5**(1990), 255.
- (5) Benjamin, T. B. and Ursell, F., *Proc. R. Soc., Ser. A*, **225**(1954), 505.
- (6) Dodge, F. T., Kana, D. D. and Abramson, H. N., *AIAA J.*, **3-4**(1965), 685.
- (7) 池田・秋山・中村・白井, 土木学会論文報告集, **290**(1979), 53.
- (8) Miles, J. W., *J. Fluid Mech.*, **146**(1984), 285.
- (9) 木村・高原・伊東・坂田, 機論, **58-556**, C(1992), 3564.
- (10) 高原・木村・坂田, 機論, **60-574**, C(1994), 1924.
- (11) 高原・木村・坂田, 機論, 掲載決定 **60-579**, C(1994).
- (12) 坂田・木村・内海, 機論, **49-442**, C(1983), 963.