クラックロータの振動*

(3/2次超分数調波振動と1/2次分数調波振動)

石田 幸男^{*1}, 廣川 一晴^{*2}, 広瀬 充男^{*3}

Vibrations of a Cracked Rotor

(3/2-Order Super-Subharmonic and 1/2-Order Subharmonic Oscillations)

Yukio ISHIDA, Kazuharu HIROKAWA and Mitsuo HIROSE

Most of the studies on the vibrations of cracked shafts investigated the major critical speed and the secondary critical speed. However, it is known that other kinds of vibrations appear in cracked shafts. In this paper, resonance phenomena of the 3/2-order super-subharmonic and 1/2-order subharmonic oscillations are investigated. They occur when the natural frequency is equal to 3/2 or 1/2 times the rotating speed. In the theoretical analysis, a two-degree-of-freedom model whose spring characteristic is represented approximately by a power series is adopted. The following are clarified. (a) These two kinds of oscillations have similar characteristics. (b) They occur only in horizontal shafts. (c) Only the steady-state oscillations appear. (d) The amplitude of the steady-state oscillation decreases as the unbalance increases. (e) These theoretical results are verified by experiments.

Key Words: Vibration of Rotating Body, Parametric Excitation, Fatigue, Crack, Diagnosis, Unbalance, Resonance Curve, Super-Subharmonic Oscillation, Subharmonic Oscillation

1. ま え が き

回転軸系にクラックが生じたときの振動についてはすでに多くの研究がなされているが、それらの多くは主危険速度付近の調和振動と二次の危険速度付近の2次の超調波振動を扱っている⁽¹⁾。クラック軸に関する初期の研究に、Gaschのシミュレーションによる研究⁽²⁾⁽³⁾がある。彼は水平に支持されたクラック軸の復元力を断片線形様式の非線形ばね特性で表し、発生する振動を広い回転速度の範囲にわたって調べた。その結果、上記の二つの振動に加え、3次以上の超調波振動が発生するとともに、系の固有振動数が軸回転速度の3/2倍と1/2倍となる回転速度付近において、それぞれ3/2次超分数調波振動と1/2次分数調波振動の定常振動が発生することを示した。本論文で解析するこれら二つの振動の発生は、実験的にも確認されており、岩田ら⁽⁴⁾は3/2次超分数調波振動を、またGrabowski⁽⁵⁾は1/2次分数調波振動を観測している。

Gaschあるいは岩田らの結果では、これらの共振曲線の形は、いわゆる裾野をもつ他の共振現象のそれとは異なり、いずれも共振点付近で突然振幅が増加するという特徴をもっている。

3/2次超分数調波振動と1/2次分数調波振動の理論的な研究は、Gaschら⁽⁶⁾と岩田ら⁽⁷⁾によって行われているが、いずれもばね特性を線形化して導いた係数励振系の運動方程式を調べている。GaschらはFloquetの理論によって解析し、また、岩田らは回転速度の関数として求まる固有振動数が複素数となる範囲を調べる方法を用いた。いずれも線形近似されたモデルを用いたため、共振する範囲が不安定領域として求まっている。また、岩田らはクラック軸の強制振動応答も調べているが、これら二つの振動については不釣合いに対する共振現象が現れていない。

上記の理論解析では、定常振動が発生するというGaschのシミュレーション結果を十分に説明できていない。非線形系であるクラック軸の振動特性を大振幅の範囲の定常振動まで含めて説明するためには、ばね特性を線形化せずに解析する必要がある。この考えに基づいて、著者らは、クラック軸の復元力をべき級数で表現した非線形運動方程式を導き、これまでに主危険速度^{(8)~(10)}および二次の危険速度⁽¹¹⁾付近の現象

* 平成6年3月30日 第71期通常総会講演会において講演、原稿受付 平成6年5月13日。

^{*1} 正員, 名古屋大学大学院工学研究科 (〒464-01 名古屋市千種区不老町)。

^{*2} 正員, 名古屋大学大学院。

^{*3} 学生員, 名古屋大学大学院。

を調べ、報告してきた。本論文では、同様な方法で、クラック軸に発生する 3/2 次超分数調波振動と 1/2 次分数調波振動について理論解析する。このとき特に、不安定領域の有無に注目し、不釣り合いや重力の影響なども調べた。さらに、弾性軸に 1 個の対称な円板を取付けた装置で実験を行い、理論解析の結果と比較した。

2. ばね特性と運動方程式

図 1 のように弾性軸の中央に 1 個の回転体を取付けた系の二自由度傾き振動を考える。 z 軸を軸受中心線に一致させた静止直交座標系 $O-xyz$ と、その x' 軸をクラックの境界と一致させた回転座標系 $O-x'y'z$ を定義する。次に、円板取付け位置での軸の傾き θ の xz, yz 平面への投影を θ_x, θ_y とし、これらを改めて直交座標軸にとった静止座標系 $O-\theta_x\theta_y$ と、その θ'_x 軸をクラックの境界と一致させた回転座標系 $O-\theta'_x\theta'_y$ を考える⁽⁹⁾。この座標上で、 $\theta'_y > 0$ のときクラックが開いて軸剛性は小さくなるため、 θ'_y 方向に関するばね特性は次式のような断片線形様式となる。なお、 θ'_x 方向ではクラックの影響はなく、線形のばね特性となる。

$$\left. \begin{aligned} -M'_x &= k'_x \theta'_x \\ -M'_y &= (k'_y - \Delta k'_y) \theta'_y \quad (\theta'_y > 0) \\ -M'_y &= (k'_y + \Delta k'_y) \theta'_y \quad (\theta'_y < 0) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1)$$

ここに M'_x, M'_y は回転座標 θ'_x, θ'_y 方向の復元モーメントである。既報⁽¹¹⁾で述べたように、解析の都合上、このばね特性を次のようにべき級数近似して表現する。なお、5 次以上の項は小さいと考えて無視する。

$$\left. \begin{aligned} -M'_x &= k'_x \theta'_x \\ -M'_y &= k'_y \theta'_y + \varepsilon_2 \theta'^2_y + \beta_3 \theta'^3_y + \varepsilon_4 \theta'^4_y \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2)$$

以下では、上式で表されるばね特性を用いるモデルをべき級数モデル [Power Series (PS) Model]、また式

図 1 クラックロータの 2 自由度モデルと座標系

(1) の表現を用いるものを断片線形モデル [Piecewise Linear (PWL) Model] とよぶ。

べき級数モデルの運動方程式は、既報⁽¹¹⁾で示したように、適当な無次元量を用いて次式で与えられる。ただし以下では記号 $C_n = \cos n\omega t$, $S_n = \sin n\omega t$ ($n=1 \sim 3, 5$) を便宜的に用いる。

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\theta}_x + i_p \omega \dot{\theta}_y + c \dot{\theta}_x + \theta_x + \Delta(\theta_x C_2 + \theta_y S_2) + N_{\theta x} \\ = M \cos(\omega t + \alpha) \\ \ddot{\theta}_y - i_p \omega \dot{\theta}_x + c \dot{\theta}_y + \theta_y + \Delta(\theta_x S_2 - \theta_y C_2) + N_{\theta y} \\ = M \sin(\omega t + \alpha) + M_0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3)$$

ここで、 i_p は回転体の極慣性モーメントと直径に関する慣性モーメントの比、 ω は軸回転速度、 c は減衰係数であり、動不釣り合い τ の θ'_x 軸から測った角位置を α とした。また、 $\Delta = (k'_x - k'_y)/(k'_x + k'_y)$ はクラックによって生じるばね剛性の方向差を表す線形部の係数、 $M = (1 - i_p)\tau\omega^2$ は不釣り合いによるモーメント、 M_0 は水平軸で働く重力に対応して加えた一定モーメントである。非線形項 $N_{\theta x}, N_{\theta y}$ は、式(2)を静止座標に変換して得られ、例えば θ_x 方向に関しては、べき級数の次数ごとに $N_{\theta x} = n_{\theta x2} + n_{\theta x3} + n_{\theta x4}$ のような和の形に書くことができる。ここで、式(2)の β_3 の値は $\varepsilon_2, \varepsilon_4$ に比べて非常に小さいことが既報⁽⁸⁾で実験的に確かめられているため、この 3 乗項を無視し、次式で与えられる 2 乗項と 4 乗項のみを考慮する。

$$\left. \begin{aligned} n_{\theta x2} &= (\varepsilon_2/4) \{ (-3S_1 + S_3) \theta'^2_x \\ &\quad + 2(C_1 - C_3) \theta_x \theta_y - (S_1 + S_3) \theta'^2_y \} \\ n_{\theta y2} &= (\varepsilon_2/4) \{ (C_1 - C_3) \theta'^2_x \\ &\quad - 2(S_1 + S_3) \theta_x \theta_y + (3C_1 + C_3) \theta'^2_y \} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (4)$$

$$\left. \begin{aligned} n_{\theta x4} &= (\varepsilon_4/16) \{ -(10S_1 - 5S_3 + S_5) \theta'^4_x \\ &\quad + 4(2C_1 - 3C_3 + C_5) \theta'^3_x \theta_y \\ &\quad - 6(2S_1 + S_3 - S_5) \theta'^2_x \theta'^2_y \\ &\quad + 4(2C_1 - C_3 - C_5) \theta_x \theta'^3_y \\ &\quad - (2S_1 + 3S_3 + S_5) \theta'^4_y \} \\ n_{\theta y4} &= (\varepsilon_4/16) \{ (2C_1 - 3C_3 + C_5) \theta'^4_x \\ &\quad - 4(2S_1 + S_3 - S_5) \theta'^3_x \theta_y \\ &\quad + 6(2C_1 - C_3 - C_5) \theta'^2_x \theta'^2_y \\ &\quad - 4(2S_1 + 3S_3 + S_5) \theta_x \theta'^3_y \\ &\quad + (10C_1 + 5C_3 + C_5) \theta'^4_y \} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (5)$$

著者らの主危険速度と二次的危険速度に関する解析では、2 乗までのべき級数近似で現象を十分説明できた^{(8)~(11)}。そこで、はじめは最も大きい係数をもつ 2 乗項のみを考慮して、 $N_{\theta x} = n_{\theta x2}$, $N_{\theta y} = n_{\theta y2}$ において解析する。このような近似を、ばね特性の 2 乗近似とよぶ。次に、べき級数近似の精度を上げ、2 乗項に加えて 4 乗項を考慮して解析を行う。このときの近似をばね

(a) $i_p=0.7$ (b) $i_p=0.1$ 図 2 p - ω 線図

特性の 4 乗近似とよぶ。

以下で、微小量 ε と同程度の大きさであることを記号 $O(\varepsilon)$ で表すことにする。式(3)より $O(\varepsilon^0)$ 精度では次の振動数方程式を得る。

$$G(p)=1+i_p\omega p-p^2=0 \quad \cdots \cdots (6)$$

この根 $p=p_f(>0)$, $p_b(<0)$ は、それぞれ前向きと後向きふれまわり運動の固有振動数を表す。その回転速度に対する変化を図 2 に示した。

3. 3/2 次超分数調波振動

3.1 断片線形モデルの数値シミュレーション

断片線形モデルのばね特性(1)を用いて運動方程式を導き⁽⁹⁾、数値シミュレーションを行った。図 2 (a)において、前向きふれまわり運動の固有振動数 p_f と回転速度 ω との間に $p_f=(3/2)\omega$ の関係が成り立つ回転速度 ω_{c1} 付近では、常に存在する調和振動成分に加え、3/2 次超分数調波振動が共振して大きく発生した。その時刻歴には複数の振動数成分が含まれているので、複素 FFT 処理⁽¹²⁾によって 3/2 次超分数調波振動のふれまわり成分のみを取出して振幅を求めた。その振幅変化を図 3 に○印で示す。図 3 から、共振点付近では定常振動が得られており、振幅が無限に発散する不安定領域は生じていないことがわかる。なお、○印以外の記号や曲線については後述する。

3.2 べき級数モデル(2 乗近似)による理論解析

危険速度 ω_{c1} 付近の近似解を次のように仮定する。

$$\left. \begin{aligned} x &= R \cos(\omega_f t + \delta) + P \cos(\omega t + \beta) + A_x \\ &\quad + \varepsilon \{a \cos(\omega_f t + \delta_f) + b \sin(\omega_f t + \delta_f)\} \\ y &= R \sin(\omega_f t + \delta) + P \sin(\omega t + \beta) + A_y \\ &\quad + \varepsilon \{a' \sin(\omega_f t + \delta_f) + b' \cos(\omega_f t + \delta_f)\} \end{aligned} \right\} \quad \cdots \cdots (7)$$

ここに $\omega_f=(3/2)\omega$ であり、また微小パラメータ ε が

図 3 3/2 次超分数調波振動の振幅変化

掛かった項は非線形性による軌道のわずかなずれを表している。この式において、3/2 次超分数調波振動の振幅 R と位相 δ は未知量であるが、調和振動の振幅 P と位相 β 、定数成分 A_x, A_y は近似的に求めた値を用いる。調和振動の解は、主危険速度から十分離れているので、次式で与えられる。

$$P=M/G(\omega), \beta=\alpha \quad \cdots \cdots (8)$$

また、一定モーメント M_0 によるふれまわり運動の中心のずれを示している定数成分は $O(\varepsilon^0)$ 精度の値 $(A_x, A_y)=(0, M_0)$ を用いる。

式(7)を運動方程式(3)に代入し、振動数 $(3/2)\omega$ の成分について調和バランスをとる。非線形項は式(4)を用いる。計算の結果、3/2 次超分数調波振動の定常解 R_0, δ_0 に関する次式を得る。

$$\left. \begin{aligned} 0 &= R_0(2c\omega_f + \varepsilon_2 M_0 \sin 2\delta_0) \\ 0 &= R_0\{2G_f + \varepsilon_2(2P_s - M_0 \cos 2\delta_0)\} \end{aligned} \right\} \quad \cdots \cdots (9)$$

ただし、 $P_s=P \sin \alpha$, $G_f=G(\omega_f)=1+i_p\omega\omega_f-\omega_f^2$ とおいた。上式より直ちに $R_0=0$ が得られる。この解の安定判別は、定常解からの微小ずれを考えることによって行うことができる⁽¹¹⁾。解 $R_0=0$ は、条件式

$$(c\omega_f)^2 + (G_f + \varepsilon_2 P_s)^2 - (1/4)\varepsilon_2^2 M_0^2 < 0 \quad \cdots \cdots (10)$$

を満たす回転速度範囲において不安定となり不安定振動が発生するが、それ以外では安定となる。上式から次のことがわかる。(i)鉛直軸では重力が作用しない($M_0=0$)のため、条件式を満たす回転速度域はない。したがって不安定振動は発生しない。(ii)クラックがなければ $\varepsilon_2=0$ であるから、(i)と同様の理由で不安定振動は発生しない。(iii)左辺=0 とおくと不安定領域の境界の回転速度が求まるが、 P_s は不釣合いの大きさと方向のパラメータを含むので、不安定領域の位置と幅はこれらの値によって変化する。例えば不釣合いが大きく、その方向が $\alpha=90^\circ$ の場合には、第 2 項が第 3 項より大きくなり、不安定領域はなくなる。

(iii)に示したように、不釣合いが不安定領域に影響するというこの結果は、Gasch⁽⁶⁾や岩田ら⁽⁷⁾の理論解析結果とは異なっている。これは、彼らが不釣合いのない系の振動を扱っているためである。

この解析からわかるように、2乗近似のべき級数モデルでは、定常振動が得られるという断片線形モデルのシミュレーション結果を説明できない。そこでべき級数近似の精度を上げ、4乗近似によって解析する。

3・3 べき級数モデル(4乗近似)による理論解析

非線形項として式(4)と(5)の両方を用いて解析する。3・2節と同様に近似解(7)を仮定し、調和バランス法を用いると次式を得る。

$$\left. \begin{aligned} 0 &= R_0[4c\omega_f + 2\varepsilon_2 M_0 \sin 2\delta_0 \\ &\quad + \varepsilon_4\{M_0(2R_0^2 + 6P^2 + 3M_0^2)\sin 2\delta_0 \\ &\quad - 6P_{c2}M_0 \sin 2\delta_0\}] \\ 0 &= R_0[4G_f + 2\varepsilon_2(2P_s - M_0 \cos 2\delta_0) \\ &\quad + \varepsilon_4\{-M_0(4R_0^2 + 6P^2 + 3M_0^2)\cos 2\delta_0 \\ &\quad + 6P_{c2}M_0 \cos 2\delta_0 - 2P_{s3} \\ &\quad + 6P_s(R_0^2 + P^2 + 2M_0^2)\}] \end{aligned} \right\} \cdots (11)$$

ただし、 $P_{c2} = P^2 \cos 2\alpha$ 、 $P_{s3} = P^3 \sin 3\alpha$ とおいた。不釣合いを零としたときの振幅変化を上式から求め、図3に示した。また安定判別も3・2節と同様に行い、安定解を実線、不安定解を破線で表した。記号a, bは $R_0 = 0$ の解が不安定となる境界である。また確認のため、4乗近似のべき級数モデルでも数値シミュレーションを行い、●印で示した。この共振現象の回転速度範囲は、主共振現象などと比べると著しく狭くなっている。

理論解析結果に関して、図3と式(11)から次のことがわかる。(i)共振点 ω_{c1} 付近で $R_0 = 0$ の解が不安定となると、 $R_0 \neq 0$ の安定解が存在するため、振幅は無限に発散することなく、不安定領域は存在しない。(ii) $R_0 = 0$ の解の安定性に関する条件式[式(10)に相当]には、4乗項から派生した項が含まれるが、4乗項の係数が小さく、また振幅が零であるため、その寄与は小さくなる。したがって、その条件式から求めた不安定解の範囲は式(10)による結果とほぼ一致する。

以上の結果は、多少のずれが生じているものの、断片線形モデルのシミュレーション結果と一致している。

2乗近似よりも4乗近似のほうがより正確にばね特性を表現していることを考えると、結局、3/2次超分数調波振動は不安定領域をもたず、発生する振動は有限振幅となって定常振動となることがわかる。この定常振動は、いわゆるリミットサイクルであり、クラッ

クによって生じる非線形性に起因する。クラックは、同時にばね剛性の方向差を生じさせるが、式(11)に Δ が含まれていないことからわかるように、その方向差はこの振動には影響しない。したがって、偏平軸のようにばね剛性の方向差だけをもつ線形系ではこの3/2次超分数調波振動は発生しない。

次に、不釣合いの影響について調べた結果を図4に示す。図4(a)は不釣合いの方向がクラックと同じ側、図4(b)は反対側にある場合の結果であり、 $R_0 \neq 0$ の解のみを示してある。通常非線形系では、強制振動の振幅は、不釣合いが大きくなるとともに大きくなる。しかし、係数励振作用と強制外力の二つの影響を受けるこの3/2次超分数調波振動の共振現象では、その最大振幅は不釣合いがないときに最も大きく、不釣合いの増加とともに小さくなっていく。このとき、最大振幅の減少割合は不釣合いの方向によって異なり、不釣合いが $\alpha = 90^\circ$ 、または 270° のときに著しい変化を示すが、 $\alpha = 0^\circ$ と 180° のときにはほとんど変化がない。一方、不釣合いはこの振動の発生回転速度や形状

(a) $\alpha = 90^\circ$

(b) $\alpha = 270^\circ$

図4 3/2次超分数調波振動の振幅変化に対する不釣合いの影響($R_0 \neq 0$)

にも影響を及ぼす。不釣合いがクラックと同じ側にある場合には、図4(a)のように振幅曲線はその位置を低速側に移しながら右に傾き、逆に不釣合いがクラックの反対側にある場合には、図4(b)のように振幅曲線はその位置を高速側に移しながら左に傾く。

3・4 振幅に対するクラックの開閉割合の影響

図3において、断片線形モデルのシミュレーションで求めた振幅曲線が特徴的な形状をしており、また図4において、不釣合いの方向によって振幅曲線が漸硬形、あるいは漸軟形に変化している理由を考察する。

図5、6に、断片線形モデルのシミュレーションによってクラックの開閉状態の変化を調べた結果を示す。図5、6中、回転速度に対する振幅変化とともに、その定常状態である継続時間中にクラックが開いている時間の割合(以下では開閉割合とよぶ)を円グラフで示した。円グラフの白い部分と黒い部分は、それぞれクラックが開いている時間と閉じている時間を表す。図5は不釣合いがない場合で、図3と同じ条件である。説明の便宜上、理論解と類似な形の曲線をシミュレーション結果と重なるように破線で示してある。

図5 3/2次超分数調波振動の定常振動時におけるクラックの開閉割合 ($\tau=0$)

図6 3/2次超分数調波振動の定常振動時におけるクラックの開閉割合 ($\tau=2.0$)

開閉割合が50%前後となる中央部分では、振幅が破線に比べて大きくなり、一方、開閉割合が約60~70%、あるいは30~40%となるその両側部分では振幅が破線より小さくなっている。開閉割合が50%のときにクラックの開閉の効果がもっとも大きいと考えられる(0%ならばクラックのない真円軸、100%ならば偏平軸に相当する)ので、このような開閉割合の違いが振幅に影響を及ぼし、特徴ある振幅変化を生むと理解できる。

図6は、不釣合いがある場合の結果であり、図6(a)は不釣合いがクラックと同じ側($\alpha=90^\circ$)、図6(b)は反対側($\alpha=270^\circ$)にある場合のものである。図6から、不釣合いの方向によってクラックの開閉割合に差が生じていることがわかる。クラックが開いている時間が長い図6(a)の場合では、軸が柔らかくなるため共振点が下がり、逆にクラックが閉じている時間が長い図6(b)では、相対的に軸が硬くなるため共振点が上がる。振幅に関しては、開閉割合が大きい $\alpha=90^\circ$ の場合には極めて小さくなっており、開閉割合が50%に近い $\alpha=270^\circ$ のときには、振幅が大きくなっている。また、開閉割合に依存して振幅曲線の一部で振幅が大きくなったり小さくなったりする結果、漸硬形あるいは漸軟形の曲線が得られている。

4. 1/2次分数調波振動

4・1 断片線形モデルの数値シミュレーション

図2(b)において $p_f=(1/2)\omega$ の関係が成り立つ回転速度 ω_{c2} 付近で、3・1節と同様の数値シミュレーションを行った結果を図7に示す。○印は1/2次分数調波振動の振幅変化を示す。図7より定常振動が得られており、不安定領域は存在しないことがわかる。

4・2 べき級数モデル(4乗近似)による理論解析

3章と同様な理由から、この場合も4乗近似で解析す

図7 1/2次分数調波振動の振幅変化

{ A1: $\tau = 0.4, \alpha = 90^\circ$, B1: $\tau = 0.4, \alpha = 270^\circ$
 A2: $\tau = 1.2, \alpha = 90^\circ$, B2: $\tau = 1.2, \alpha = 270^\circ$ }

図 8 1/2 次分数調波振動の振幅変化に対する不釣合いの影響 ($R_0 \neq 0$)

る。

図 2(b) に示した危険速度 ω_{c2} 付近において式(7)と同じ形に近似解を仮定し、3 章と同様に解析する。ただしこの場合は $\omega_f = (1/2)\omega$ であり、1/2 次分数調波振動の振幅と位相を R と δ とする。また、共振点が主危険速度の高速側にあるため、調和振動解として次式を用いる。

$$P = -M/G(\omega), \beta = \alpha + \pi \dots \dots \dots (12)$$

1/2 次分数調波振動の定常解 R_0, δ_0 に関する式は、計算の結果、式(11)と同じ形になる。したがって、定常解として $R_0 = 0$ の解と $R_0 \neq 0$ の解が得られる。

不釣合いがないときの振幅変化を図 7 に示した。図 7 中の各記号は図 3 と同じである。●印で示したべき級数モデルの数値シミュレーション結果は理論解析結果とよく一致している。図 7 より、4・7 節の断片線形モデルのシミュレーション結果と同様、理論解析によっても、1/2 次分数調波振動は不安定領域をもたず、定常振動であることを示している。

次に、不釣合いの影響について調べた結果を図 8 に示す。3/2 次超分数調波振動と同様、共振時の最大振幅は、不釣合いがないときに最も大きく、不釣合いの増加とともに小さくなる。なお、不釣合いの方向の影響については、3/2 次超分数調波振動(図 4)と逆の結果が得られているが、これは式(12)に示したように、調和振動成分の位相が 3/2 次超分数調波振動の場合と π だけずれているためである。

5. 実 験

5・1 実験装置 実験装置は既報⁽⁹⁾⁽¹⁰⁾ で用いたものと基本的に同じ構成である。円形断面の弾性軸に、1 個の対称な回転体が付付けられており、軸の両端は

図 9 3/2 次超分数調波振動の波形(実験結果)

図 10 3/2 次超分数調波振動の振幅変化(実験結果)

複列自動調心玉軸受(#1200)で単純支持されている。クラックは軸のほぼ中央にあり、軸に切欠きを作った後、これと同じ寸法の部材を切欠き部にはめ込んで作った。実験の便宜上、次の 2 組の装置を用いた。一つは直径 16 mm、長さ 840 mm の弾性軸を 2:1 に内分する位置に、直径 480 mm、厚さ 5.5 mm の回転体を取付けた装置で、3/2 次超分数調波振動の実験で用いた。クラック部の切欠きは深さ 9 mm、幅 10 mm である。もう一つは直径 12 mm、長さ 700 mm の弾性軸を 4:1 に内分する位置に、直径 300 mm、厚さ 14 mm の回転体を取付けた装置で、1/2 次分数調波振動の実験で用いた。クラック部の寸法は、深さ 6 mm、幅 20 mm である。

5・2 3/2 次超分数調波振動 実験では約 520 rpm 付近で 3/2 次超分数調波振動が発生した。ただし、この発生回転速度は不釣合いの大きさや方向によって変化した。測定した水平方向の振動波形の一例を図 9 に示す。この波形には 3/2 次超分数調波振動のほかに調和振動、2 次の超調波振動などの振動数成分も含まれているため、この波形データを複素 FFT 処理して 3/2 次超分数調波振動のふれまわり成分のみを取り出し、図 10 に示した。図 10(a) は不釣合いが比較的大きく、クラックと同じ側にある場合、図 10(b) は比較的小さく、クラックの反対側にある場合の結果である。なお、図 9 の波形は図 10(a) の記号 A で示した回転速度において測定したものである。これらの図において、3/2 次超分数調波振動は定常振動として得られている。

5・3 1/2 次分数調波振動 実験では、約 2130

図 11 1/2 次分数調波振動の振幅変化(実験結果)

図 12 ビートが現れた実験結果

図 13 ビート現象の波形(実験結果)

rpm 付近で 1/2 次分数調波振動が発生した。ただし、この発生回転速度は不釣合いの大きさや方向によって変化した。測定した波形を複素 FFT 処理して得られた振幅変化の例を図 11, 12 に示す。図 11 は不釣合いが比較的大きく、クラックと反対側にある場合 ($\alpha \approx 270^\circ$) の例であるが、定常振動のみが得られている。

図 12 は、定常振動だけでなく、その振幅が周期的に変動する振動も得られた例である。回転速度約 2120～2130 rpm の範囲では、振幅が大きくなったため測定できなかった。振幅が小さい部分については定常振動が得られているが、振幅が大きくなると、図 13(記号 B 付近の例)のような振幅が変動する波形が得られた。このような波形から求めた振幅の変動範囲を図 12 に矢印で記入してある。なお、この図の振幅は複素 FFT 処理を行わずに求めたものである。図 13 には水平方向で測定した波形のみを図示したが、鉛直方向の波形も

図 14 ビート現象の波形(シミュレーション)

図 15 構造減衰がある場合の振幅変化(シミュレーション)

同じような最大および最小振幅、周期、位相であった。

ここで、図 13 に現れた振幅の周期的変動について考察する。本実験装置では主危険速度の高速側で外乱を加えると自励振動がしばしば発生したことから、内部摩擦が作用していると考えられる。そこで、内部摩擦の一つである部材間の構造摩擦を考慮してこの現象を解析する。運動方程式(3)に構造摩擦による自励項⁽¹³⁾を加えて数値積分を行った結果、共振点付近で一定振幅の 1/2 次分数調波振動が発生するとともに、その両側で図 14 に示した波形が得られた。このシミュレーション結果を図 15 に示す。図 15 中、矢印はこの変動する振幅の範囲を示している。なお、図 14 は図 15 の記号 C で示した回転速度で得られた水平方向の波形である。図 15 において、共振点からある程度離れたところでは自励振動だけが顕著に現れ、破線の位置で振幅がほぼ一定となる。この自励振動は実験でも得られている。

図 15 を実験結果の図 12 と比較すると、全体に振幅が大きくなりビートが現れるという点できわめてよく似ている。本実験装置では、クラック部あるいは軸受け部の部材間の滑りによって自励振動が発生するので、クラックによって 1/2 次分数調波振動が発生すると、それが滑りを誘発して自励振動が同時に発生すると考えられる。

6. 結 論

クラック軸に発生する $3/2$ 次超分数調波振動と $1/2$ 次分数調波振動について、以下のことを明らかにした。

(1) クラック軸のばね特性を 4 乗までのべき級数で近似した理論モデルを用いて解析することにより、これらの振動を大振幅の部分まで含めて明らかにした。

(2) これら二つの振動の定常解を表す式は同じ形となり、また振幅変化曲線の形状もよく似ている。

(3) これらはともに水平軸に発生し、鉛直軸では発生しない。

(4) 発生する振動は定常振動であり、不安定領域は存在しない。

(5) これらの振動の振幅は、不釣合いがない場合に最も大きく、不釣合いがあると、その増加とともに振幅は減少していく。

(6) これらの振動は、クラックの開閉作用によっ

て生じる非線形性に起因する。この非線形項は、時間の関数として変化する係数をもつ。

(7) 以上の理論解析結果は、4 自由度系の装置を用いた実験結果と定性的に一致した。

最後に、本実験装置を製作していただいた名古屋大学工学部、中西幸弘技官に謝意を表す。

文 献

- (1) Wauer, J., *Appl. Mech. Rev.*, **43**-1(1990), 13.
- (2) Gasch, R., *Proc. Int. Mech. Eng. Conf.*, (1976), 123.
- (3) Gasch, R., *Proc. VDI-Berichte.*, 269(1976), 183.
- (4) 岩田・ほか 3 名, 機論, **54**-503, C(1988), 1433.
- (5) Grabowski, B., *CISM Courses and Lectures*, 273(1984), 423.
- (6) Gasch, R., ほか 2 名, *Proc. Int. Mech. Eng. Conf.*, (1988), 463.
- (7) 岩田・ほか 3 名, 機論, **54**-505, C(1988), 2003.
- (8) 石田・ほか 3 名, 機論, **53**-488, C(1987), 925.
- (9) 石田・ほか 2 名, 機論, **58**-551, C(1992), 2032.
- (10) 石田・ほか 2 名, 機論, **59**-566, C(1993), 3095.
- (11) 石田・山本, 機論, **57**-538, C(1991), 1971.
- (12) 石田・ほか 2 名, 機論, **57**-539, C(1991), 2178.
- (13) 石田・山本, 機論, **58**-549, C(1992), 1564.