重み付き残差法による柔軟多体系の漸化形動力学モデル*

土 屋 和 雄^{*1}, 島 岳 也^{*2}Recursive Dynamics of a Flexible Multibody System
by the Method of Weighted Residual

Kazuo TSUCHIYA and Takeya SHIMA

In this paper, two kinds of mathematical models of flexible bodies connected by rotary joints are derived in a recursive form based on the method of weighted residual. The first one uses the translational and angular velocities and the modal amplitudes of the elastic deformation of the bodies as the state variables. The mathematical model derived is an extension of the model of a rigid multibody system based on the Newton-Euler method. The second one uses the translational velocity of the base body and the angular velocities and the modal amplitudes of the elastic deformation of the bodies as the state variables. The mathematical model derived is the same as the model based on the Lagrangian formulation with quasi coordinates. The algorithms of the inverse dynamics of a flexible manipulator are derived using the models obtained.

Key Words: Modelling, Mechatronics and Robotics, Flexible Manipulator, Inverse Dynamics, Method of Weighted Residual

1. ま え が き

柔軟構造物の運動制御は大きく二つに分類できる。一つは大形宇宙構造物の姿勢、振動制御に代表されるもので、柔軟構造物の基準姿勢からの微小回転運動と付随する構造振動を制御するものである。他方は柔軟マニピュレータの軌道制御に代表されるもので、全系あるいは部分系の有限回転運動と付随する構造振動を制御するものである。前者の制御は線形フィードバック制御を用いて行われ、そのための動力学モデルとしては姿勢運動と構造振動に対し線形化され、かつ数多く存在する振動モードを縮約した線形低次元モデルが用いられる⁽¹⁾。後者の制御の基本的な方法は、モデルベースのフィードフォワード制御である。モデルベースのフィードフォワード制御は、計算トルク法と呼ばれる⁽²⁾。計算トルク法は二つのステップから構成される。第1のステップは、マニピュレータの望ましい運動(エンドエフェクタ先端の慣性空間における軌道等)から各関節の対応する運動を計算する逆運動学計算過程であり、第2のステップは、各関節の運動から

その運動を実現するのに必要となる各関節トルクを計算する逆動力学計算過程である。計算トルク法に用いる柔軟マニピュレータのモデルは、逆動力学計算のため、動力学方程式がマニピュレータの運動から、その運動を実現するトルクが漸化的に計算できる構造になっていることが望ましい。剛体マニピュレータの漸化形の運動方程式はすでに数多く提案されている⁽³⁾⁽⁴⁾。一方、柔軟マニピュレータの漸化形の運動方程式は現在多くの研究者によって検討されている^{(5)~(9)}。本論文ではダランベール原理の一般化と考えられる重み付き残差法⁽¹⁰⁾をもとに柔軟マニピュレータの漸化形の運動方程式を導出する：マニピュレータの各リンクの回転運動を擬座標である角速度を用いて表現し、各リンクの弾性変位を適当な展開関数を用いて展開する。また、動力学方程式の導出は重み付き残差法を用いる。重み関数を適当に選択することにより Newton-Euler 法に対応した運動方程式、および Lagrange 形式に対応した運動方程式が導出される。このようにして求められた動力学方程式は漸化形の構造をもち、逆動力学計算が簡単となる。

2. 運 動 方 程 式

図1に示すように、3回転自由度をもつ関節で結合

* 原稿受付 平成6年4月25日。

^{*1} 正員, 大阪大学工学部 (〒565 吹田市山田丘2-1)。^{*2} 准員, 大阪大学大学院。

図1 回転関節で結合されたリンクシステム

された N 本のリンクにより構成されたマニピュレータを考える。便宜上、一端の物体をベースと呼び、他端の物体をエンドエフェクタと呼ぶ。ベース側からエンドエフェクタ側に向かって、各リンクに $1, 2, \dots, N$ と番号を付ける。慣性空間をリンク 0 とする。関節も同様に、ベース側からエンドエフェクタ側に向かって、 $1, 2, \dots, N$ と番号を付ける。慣性空間の原点を関節 0 、エンドエフェクタ先端を関節 $N+1$ とする。リンク i に固定した座標系として関節 i に原点 C_i をもつ単位ベクトル系 $\mathbf{a}_{i1}, \mathbf{a}_{i2}, \mathbf{a}_{i3}$ を定義する。これらの単

位ベクトルを用いて次の列マトリクス $[\mathbf{a}_i]$ を定義する。

$$[\mathbf{a}_i]^T = [\mathbf{a}_{i1} \quad \mathbf{a}_{i2} \quad \mathbf{a}_{i3}] \quad \dots \quad (1)$$

各リンクに対して次のような記号を定義する。

A_{ij} : 座標系 $[\mathbf{a}_j]$ から座標系 $[\mathbf{a}_i]$ への座標変換行列

$\omega_{ij} = [\mathbf{a}_i]^T \omega_{ij}$: 座標系 $[\mathbf{a}_i]$ の座標系 $[\mathbf{a}_j]$ に対する相対角速度

$\rho_i = [\mathbf{a}_i]^T \rho_i$: 無わい状態における C_i からリンク i の任意点への距離ベクトル

$\mathbf{r}_i = [\mathbf{a}_i]^T \mathbf{r}_i$: 無わい状態における C_i から C_{i+1} への距離ベクトル

$\mathbf{w}_i(t, \rho_i) = [\mathbf{a}_i]^T \mathbf{w}_i(t, \rho_i)$: ρ_i における弾性変位ベクトル

ベクトル $\mathbf{b}_i = [\mathbf{a}_i]^T \mathbf{b}_i = [\mathbf{a}_i]^T [b_{i1} \quad b_{i2} \quad b_{i3}]^T$ のベクトル積演算 $\mathbf{b}_i \times$ を座標系 $[\mathbf{a}_i]$ で $\tilde{\mathbf{b}}_i^T$ と表す。すなわち

$$\tilde{\mathbf{b}}_i = \begin{bmatrix} 0 & b_{i3} & -b_{i2} \\ -b_{i3} & 0 & b_{i1} \\ b_{i2} & -b_{i1} & 0 \end{bmatrix} \quad \dots \quad (2)$$

弾性変形状態における C_0 からリンク i の任意点への距離ベクトル $\mathbf{x}_i$ および速度 $\mathbf{v}_i$ は次式で与えられる。

$$\mathbf{x}_i = [\mathbf{a}_0]^T \mathbf{r}_0 + \sum_{j=1}^{i-1} [\mathbf{a}_j]^T \mathbf{r}_{fj} + [\mathbf{a}_i]^T \rho_{fi} \quad \dots \quad (3)$$

$$\mathbf{v}_i = [\mathbf{a}_0]^T \dot{\mathbf{r}}_0 + \sum_{j=1}^{i-1} [\mathbf{a}_j]^T \left\{ \tilde{\mathbf{r}}_{fj} \omega_{j0} + \frac{\partial \mathbf{w}_j(t, \mathbf{r}_{fj})}{\partial t} \right\} + [\mathbf{a}_i]^T \left\{ \tilde{\rho}_{fi} \omega_{i0} + \frac{\partial \mathbf{w}_i(t, \rho_{fi})}{\partial t} \right\} \quad \dots \quad (4)$$

ここで

$$\mathbf{r}_{fj} = \mathbf{r}_j + \mathbf{w}_j(t, \mathbf{r}_j), \quad \rho_{fi} = \rho_i + \mathbf{w}_i(t, \rho_i)$$

弾性変位を次のように関数展開して表現する。

$$\mathbf{w}_i(t, \rho_i) = \sum_{n=1}^{n_0} q_{in}(t) \mathbf{u}_{in}(\rho_i) \quad \dots \quad (5)$$

ここで $q_{in}(t)$, $\mathbf{u}_{in}(\rho_i)$ がそれぞれ、リンク i の第 n 番めのモード振幅、およびモード関数を表している。式(5)を用いると式(3), (4)は次のように表される。

$$\mathbf{x}_i = [\mathbf{a}_0]^T \mathbf{r}_0 + \sum_{j=1}^{i-1} [\mathbf{a}_j]^T \left\{ \mathbf{r}_j + \sum_{n=1}^{n_0} q_{jn}(t) \mathbf{u}_{jn}(\mathbf{r}_j) \right\} + [\mathbf{a}_i]^T \left\{ \rho_i + \sum_{n=1}^{n_0} q_{in}(t) \mathbf{u}_{in}(\rho_i) \right\} \quad \dots \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_i = & [\mathbf{a}_0]^T \dot{\mathbf{r}}_0 + \sum_{j=1}^{i-1} [\mathbf{a}_j]^T \left\{ \tilde{\mathbf{r}}_j + \sum_{n=1}^{n_0} q_{jn}(t) \tilde{\mathbf{u}}_{jn}(\mathbf{r}_j) \right\} \omega_{j0} + \sum_{n=1}^{n_0} \dot{q}_{jn}(t) \mathbf{u}_{jn}(\mathbf{r}_j) \\ & + [\mathbf{a}_i]^T \left\{ \tilde{\rho}_i + \sum_{n=1}^{n_0} q_{in}(t) \tilde{\mathbf{u}}_{in}(\rho_i) \right\} \omega_{i0} + \sum_{n=1}^{n_0} \dot{q}_{in}(t) \mathbf{u}_{in}(\rho_i) \end{aligned} \quad \dots \quad (7)$$

また、エンドエフェクタ先端の並進、回転速度はそれぞれ次のように表される。

$$\mathbf{v}_E = [\mathbf{a}_0]^T \dot{\mathbf{r}}_0 + \sum_{j=1}^N [\mathbf{a}_j]^T \left\{ \tilde{\mathbf{r}}_j + \sum_{n=1}^{n_0} q_{jn}(t) \tilde{\mathbf{u}}_{jn}(\mathbf{r}_j) \right\} \omega_{j0} + \sum_{n=1}^{n_0} \dot{q}_{jn}(t) \mathbf{u}_{jn}(\mathbf{r}_j) \quad \dots \quad (8)$$

$$\omega_E = [\mathbf{a}_N]^T \left\{ \omega_{N0} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{n_0} \dot{q}_{Nn}(t) \text{rot} \mathbf{u}_{Nn}(\mathbf{r}_N) \right\} \quad \dots \quad (9)$$

Newton の運動方程式はリンク i の微小質量要素 dm_i に対して次の形で与えられる。

$$\dot{\mathbf{v}}_i dm_i = \mathbf{f}_i dm_i \quad \dots \quad (10)$$

ここでベクトルに対する $\dot{}$ は慣性系における時間微分を表す。また、 $f_i dm_i$ は微小量要素 dm_i に働くすべての力を表しており、次のように表される。

$$f_i dm_i = f_i^{(e)} dm_i + f_i^{(i)} dm_i \quad \dots\dots\dots (11)$$

ここで $f_i^{(e)} dm_i$ はリンク i の外部から作用する力であり、 $f_i^{(i)} dm_i$ はリンク i の他の微小質量要素から加えられる力である。

本論文では Newton の運動方程式(10)を基礎方程式として、重み付き残差法を用いて漸化形の構造をした動力学モデルを二つ導出する。一つは剛体多体系の Newton-Euler 方程式を柔軟多体系に拡張したものであり、他方は擬座標による Lagrange 方程式に対応するものである。

重み付き残差法では式(10)の左辺に式(7)を微分して代入し、適当な重み関数 W_i を掛けリンク全体に渡って積分することによって、未知パラメータ $r_0(t)$, $\omega_{i0}(t)$, $q_{in}(t)$ に対する方程式を導く。

$$\sum_{i=1}^N \int_i W_i^T (\dot{v}_i - f_i) dm_i = 0 \quad \dots\dots\dots (12)$$

重み関数の選択によって得られる方程式の構造が決定されることになるが、ここでは以下に示す二組の重み関数を用いて動力学モデルを求める。

2・1 モデル1 次に示す重み関数を考える：

$$W_{ij}^{(1)} = \begin{cases} [a_j]^T I_{3 \times 3} : \text{リンク } j \\ 0 : \text{リンク } i \quad (i \neq j) \end{cases} \quad (j=1, 2, \dots, N) \quad \dots\dots\dots (13)$$

$$W_{ij}^{(2)} = \begin{cases} [a_j]^T \tilde{\rho}_j^{(2)} : \text{リンク } j \\ 0 : \text{リンク } i \quad (i \neq j) \end{cases} \quad (j=1, 2, \dots, N) \quad \dots\dots\dots (14)$$

$$W_{ijn}^{(3)} = \begin{cases} [a_j]^T u_{jn}^{(2)} : \text{リンク } j \\ 0 : \text{リンク } i \quad (i \neq j) \end{cases} \quad (j=1, 2, \dots, N) (n=1, 2, \dots, n_0) \quad \dots\dots\dots (15)$$

ここで

$$\begin{aligned} \rho_i^{(1)} &= \frac{1}{m_i} \langle \rho_i \rangle_i, \quad \rho_i^{(2)} = \rho_i - \rho_i^{(1)} \\ u_{in}^{(1)} &= \frac{1}{m_i} \langle u_{in} \rangle_i, \quad u_{in}^{(2)} = u_{in} - u_{in}^{(1)} \\ \rho_{ji}^{(1)} &= \rho_i^{(1)} + \sum_{n=1}^{n_0} q_{in} u_{in}^{(1)}, \\ \rho_{ji}^{(2)} &= \rho_i^{(2)} + \sum_{n=1}^{n_0} q_{in} u_{in}^{(2)} \end{aligned}$$

ただし

$$\langle * \rangle_i = \int_i * dm_i : \text{リンク } i \text{ に渡る質量積分}$$

式(12)において重み関数(13)～(15)を用いて次式を

得る。

$$\begin{bmatrix} \dot{P}_1 \\ \dot{P}_2 \\ \vdots \\ \dot{P}_N \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{\omega}_{10}^T & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \tilde{\omega}_{20}^T & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \tilde{\omega}_{N0}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ \vdots \\ P_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_N \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (16)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{L}_{CM1} \\ \dot{L}_{CM2} \\ \vdots \\ \dot{L}_{CMN} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{\omega}_{10}^T & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \tilde{\omega}_{20}^T & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \tilde{\omega}_{N0}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_{CM1} \\ L_{CM2} \\ \vdots \\ L_{CMN} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{CM1} \\ T_{CM2} \\ \vdots \\ T_{CMN} \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (17)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{P}_{1n} \\ \dot{P}_{2n} \\ \vdots \\ \dot{P}_{Nn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \omega_{10}^T & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \omega_{20}^T & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \omega_{N0}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_{1n} \\ L_{2n} \\ \vdots \\ L_{Nn} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} Q_{1n} \\ Q_{2n} \\ \vdots \\ Q_{Nn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F_{1n} \\ F_{2n} \\ \vdots \\ F_{Nn} \end{bmatrix} \quad (n=1, 2, \dots, n_0) \quad \dots\dots\dots (18)$$

ここで

- $P_i = [a_i]^T P_i$: リンク i の並進運動量
- $L_{CMi} = [a_i]^T L_{CMi}$: リンク i の質量中心回りの角運動量
- $F_i = [a_i]^T F_i$: リンク i に働く外力
- $T_{CMi} = [a_i]^T T_{CMi}$: リンク i の質量中心回りに働く外トルク
- P_{in} : モード振幅 q_{in} に対するリンク i の一般化運動量
- Q_{in} : モード振幅 q_{in} に対する弾性復元力
- F_{in} : モード振幅 q_{in} に対するリンク i の一般化力

各諸量は具体的に次のように与えられる。

$$\begin{bmatrix} \omega_{10} \\ \omega_{20} \\ \omega_{30} \\ \vdots \\ \omega_{N0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_{10} \\ \omega_{21} + A_{21} \omega_{10} \\ \omega_{32} + A_{32} \omega_{20} \\ \vdots \\ \omega_{NN-1} + A_{NN-1} \omega_{N-10} \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (19)$$

$$\begin{bmatrix} V_{c1} \\ V_{c2} \\ V_{c3} \\ \vdots \\ V_{cN} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{10} \dot{r}_0 \\ A_{21} \left\{ V_{c1} + \tilde{r}_{f1} \omega_{10} + \sum_{n=1}^{n_0} \dot{q}_{1n} u_{1n}(r_1) \right\} \\ A_{32} \left\{ V_{c2} + \tilde{r}_{f2} \omega_{20} + \sum_{n=1}^{n_0} \dot{q}_{2n} u_{2n}(r_2) \right\} \\ \vdots \\ A_{NN-1} \left\{ V_{cN-1} + \tilde{r}_{fN-1} \omega_{N-10} + \sum_{n=1}^{n_0} \dot{q}_{N-1n} u_{N-1n}(r_{N-1}) \right\} \end{bmatrix} \dots\dots\dots (20)$$

$$\begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ \vdots \\ P_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_1 \left(V_{c1} + \tilde{\rho}_{f1}^{(1)} \omega_{10} + \sum_{n=1}^{n_0} \dot{q}_{1n} u_{1n}^{(1)} \right) \\ m_2 \left(V_{c2} + \tilde{\rho}_{f2}^{(1)} \omega_{20} + \sum_{n=1}^{n_0} \dot{q}_{2n} u_{2n}^{(1)} \right) \\ \vdots \\ m_N \left(V_{cN} + \tilde{\rho}_{fN}^{(1)} \omega_{N0} + \sum_{n=1}^{n_0} \dot{q}_{Nn} u_{Nn}^{(1)} \right) \end{bmatrix} \dots\dots\dots (21)$$

$$\begin{bmatrix} L_{CM1} \\ L_{CM2} \\ \vdots \\ L_{CMN} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle \tilde{\rho}_{f1}^{(2)T} \tilde{\rho}_{f1}^{(2)} \rangle_1 \omega_{10} + \sum_{n=1}^{n_0} \dot{q}_{1n} \langle \tilde{\rho}_{f1}^{(2)T} u_{1n}^{(2)} \rangle_1 \\ \langle \tilde{\rho}_{f2}^{(2)T} \tilde{\rho}_{f2}^{(2)} \rangle_2 \omega_{20} + \sum_{n=1}^{n_0} \dot{q}_{2n} \langle \tilde{\rho}_{f2}^{(2)T} u_{2n}^{(2)} \rangle_2 \\ \vdots \\ \langle \tilde{\rho}_{fN}^{(2)T} \tilde{\rho}_{fN}^{(2)} \rangle_N \omega_{N0} + \sum_{n=1}^{n_0} \dot{q}_{Nn} \langle \tilde{\rho}_{fN}^{(2)T} u_{Nn}^{(2)} \rangle_N \end{bmatrix} \dots\dots\dots (22)$$

$$\begin{bmatrix} P_{1n} \\ P_{2n} \\ \vdots \\ P_{Nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle u_{1n}^{(2)T} \tilde{\rho}_{f1}^{(2)} \rangle_1 \omega_{10} + \sum_{m=1}^{n_0} \dot{q}_{1m} \langle u_{1n}^{(2)T} u_{1m}^{(2)} \rangle_1 \\ \langle u_{2n}^{(2)T} \tilde{\rho}_{f2}^{(2)} \rangle_2 \omega_{20} + \sum_{m=1}^{n_0} \dot{q}_{2m} \langle u_{2n}^{(2)T} u_{2m}^{(2)} \rangle_2 \\ \vdots \\ \langle u_{Nn}^{(2)T} \tilde{\rho}_{fN}^{(2)} \rangle_N \omega_{N0} + \sum_{m=1}^{n_0} \dot{q}_{Nm} \langle u_{Nn}^{(2)T} u_{Nm}^{(2)} \rangle_N \end{bmatrix} \dots\dots\dots (23)$$

$$\begin{bmatrix} L_{1n} \\ L_{2n} \\ \vdots \\ L_{Nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle \tilde{u}_{1n}^{(2)} \tilde{\rho}_{f1}^{(2)} \rangle_1 \omega_{10} + \sum_{m=1}^{n_0} \dot{q}_{1m} \langle \tilde{u}_{1n}^{(2)} u_{1m}^{(2)} \rangle_1 \\ \langle \tilde{u}_{2n}^{(2)} \tilde{\rho}_{f2}^{(2)} \rangle_2 \omega_{20} + \sum_{m=1}^{n_0} \dot{q}_{2m} \langle \tilde{u}_{2n}^{(2)} u_{2m}^{(2)} \rangle_2 \\ \vdots \\ \langle \tilde{u}_{Nn}^{(2)} \tilde{\rho}_{fN}^{(2)} \rangle_N \omega_{N0} + \sum_{m=1}^{n_0} \dot{q}_{Nm} \langle \tilde{u}_{Nn}^{(2)} u_{Nm}^{(2)} \rangle_N \end{bmatrix} \dots\dots\dots (24)$$

$$\begin{bmatrix} Q_{i1} \\ Q_{i2} \\ \vdots \\ Q_{in_0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_{i11} & \lambda_{i12} & \cdots & \lambda_{i1n_0} \\ \lambda_{i21} & \lambda_{i22} & \cdots & \lambda_{i2n_0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_{in_01} & \lambda_{in_02} & \cdots & \lambda_{in_0n_0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_{i1} \\ q_{i2} \\ \vdots \\ q_{in_0} \end{bmatrix} \quad (i=1, 2, \dots, N) \dots\dots\dots (25)$$

一般化力 F_i , T_{Cmi} , F_{in} は関節 $i-1$ から関節 i に働く力 f_{ci} およびトルク τ_{ci} により次のように与えられる。

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_{N-1} \\ F_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{c1} - A_{12} f_{c2} \\ f_{c2} - A_{23} f_{c3} \\ \vdots \\ f_{cN-1} - A_{N-1N} f_{cN} \\ f_{cN} - f_{cN+1} \end{bmatrix} \dots\dots\dots (26)$$

$$\begin{bmatrix} T_{CM1} \\ T_{CM2} \\ \vdots \\ T_{CMN-1} \\ T_{CMN} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau_{c1} - A_{12} \tau_{c2} - \tilde{\rho}_{f1}^{(1)T} f_{c1} - (\tilde{r}_{f1}^T - \tilde{\rho}_{f1}^{(1)T}) A_{12} f_{c2} \\ \tau_{c2} - A_{23} \tau_{c3} - \tilde{\rho}_{f2}^{(1)T} f_{c2} - (\tilde{r}_{f2}^T - \tilde{\rho}_{f2}^{(1)T}) A_{23} f_{c3} \\ \vdots \\ \tau_{cN-1} - A_{N-1N} \tau_{cN} - \tilde{\rho}_{fN-1}^{(1)T} f_{cN-1} - (\tilde{r}_{fN-1}^T - \tilde{\rho}_{fN-1}^{(1)T}) A_{N-1N} f_{cN} \\ \tau_{cN} - \tau_{cN+1} - \tilde{\rho}_{fN}^{(1)T} f_{cN} - (\tilde{r}_{fN}^T - \tilde{\rho}_{fN}^{(1)T}) f_{cN+1} \end{bmatrix} \dots\dots\dots (27)$$

$$\begin{bmatrix} F_{1n} \\ F_{2n} \\ \vdots \\ F_{Nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{1n}^{(2)T}(0)f_{c1} - u_{1n}^{(2)T}(r_1)A_{12}f_{c2} + \frac{1}{2}\{(\text{rot } u_{1n}^{(2)}(0))^T \tau_{c1} - (\text{rot } u_{1n}^{(2)}(r_1))^T A_{12} \tau_{c2}\} \\ u_{2n}^{(2)T}(0)f_{c2} - u_{2n}^{(2)T}(r_2)A_{23}f_{c3} + \frac{1}{2}\{(\text{rot } u_{2n}^{(2)}(0))^T \tau_{c2} - (\text{rot } u_{2n}^{(2)}(r_2))^T A_{23} \tau_{c3}\} \\ \vdots \\ u_{Nn}^{(2)T}(0)f_{cN} - u_{Nn}^{(2)T}(r_N)f_{cN+1} + \frac{1}{2}\{(\text{rot } u_{Nn}^{(2)}(0))^T \tau_{cN} - (\text{rot } u_{Nn}^{(2)}(r_N))^T \tau_{cN}\} \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (28)$$

ここで用いた重み関数 $W_{ij}^{(1)}$, $W_{ij}^{(2)}$, $W_{jn}^{(3)}$ はそれぞれ, リンク j の慣性空間における並進変位, 質量中心回りの回転変位, および弾性変形を表している. よってそれぞれの重み関数から得られる方程式は, リンク j の慣性空間における並進運動量, 質量中心回りの角運動量の時間変化, および弾性変形の時間変化を与える. また, これらの重み関数はジョイント部におけるリンク間の並進, 回転変位の連続性を保証しない. よって導出された方程式系には, リンク間に働くせん断力, および曲げモーメントが陽に入ってくる. こうして得られた動力学モデルは, 剛体多体系の Newton-Euler 法に基づくモデルの柔軟多体系への拡張となっている⁽³⁾.

2・2 モデル2 次の重み関数を考える:

$$W_i^{(1)} = [a_i]^T I_{3 \times 3} : \text{リンク } i \quad (i=1, 2, \dots, N) \quad \dots\dots\dots (29)$$

$$W_{ij}^{(2)} = \begin{cases} 0 & : \text{リンク } i \quad (i < j) \\ [a_i]^T \tilde{x}_i(\rho_i) - [a_j]^T \tilde{x}_j(0) & : \text{リンク } i \quad (i \geq j) \end{cases} \quad \dots\dots\dots (30)$$

($j=1, 2, \dots, N$)

$$W_{jn}^{(3)} = \begin{cases} 0 & : \text{リンク } i \quad (i < j) \\ [a_j]^T u_{jn}(\rho_j) & : \text{リンク } j \\ [a_j]^T u_{jn}(r_j) & : \text{リンク } i \quad (i > j) \end{cases} \quad \dots\dots\dots (31)$$

($j=1, 2, \dots, N$) ($n=1, 2, \dots, n_0$)

式(12)において重み関数(29)~(31)を用いて次式を得る.

$$\dot{\hat{P}}_0 = \hat{F}_0 \quad \dots\dots\dots (32)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{L}}_{c1} \\ \dot{\hat{L}}_{c2} \\ \vdots \\ \dot{\hat{L}}_{cN} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{\omega}_{10}^T & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \tilde{\omega}_{20}^T & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \tilde{\omega}_{N0}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{L}_{c1} \\ \hat{L}_{c2} \\ \vdots \\ \hat{L}_{cN} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{V}_{c1}^T & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \tilde{V}_{c2}^T & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \tilde{V}_{cN}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{P}_1 \\ \hat{P}_2 \\ \vdots \\ \hat{P}_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{T}_{c1} \\ \hat{T}_{c2} \\ \vdots \\ \hat{T}_{cN} \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (33)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{P}}_{1n} \\ \dot{\hat{P}}_{2n} \\ \vdots \\ \dot{\hat{P}}_{Nn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \omega_{10}^T & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \omega_{20}^T & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \omega_{N0}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{L}_{1n} \\ \hat{L}_{2n} \\ \vdots \\ \hat{L}_{Nn} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} Q_{1n} \\ Q_{2n} \\ \vdots \\ Q_{Nn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{F}_{1n} \\ \hat{F}_{2n} \\ \vdots \\ \hat{F}_{Nn} \end{bmatrix} \quad (n=1, 2, \dots, n_0) \quad \dots\dots\dots (34)$$

ここで

$\hat{P}_0 = [a_0]^T \hat{P}_0$: 全系の並進運動量

$\hat{L}_{ci} = [a_i]^T \hat{L}_{ci}$: 部分リンク系 i (リンク i からリンク N までの部分系) の C_i 回りの角運動量

$V_{ci} = [a_i]^T V_{ci}$: C_i の慣性空間に対する並進速度

$\hat{P}_i = [a_i]^T \hat{P}_i$: 部分リンク系 i の並進運動量

$\hat{F}_0 = [a_0]^T \hat{F}_0$: 全系に働く外力

$\hat{T}_{ci} = [a_i]^T \hat{T}_{ci}$: 部分リンク系 i の C_i 回りに働く外トルク

$\hat{P}_{in}$: モード振幅 q_{in} に対する部分リンク系 i の一般化運動量

Q_{in} : モード振幅 q_{in} に対する弾性復元力

$\hat{F}_{in}$: モード振幅 q_{in} に対する部分リンク系 i の一般化力

各諸量は具体的に次のように与えられる.

$$\begin{bmatrix} \omega_{10} \\ \omega_{20} \\ \omega_{30} \\ \vdots \\ \omega_{N0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_{10} \\ \omega_{21} + A_{21}\omega_{10} \\ \omega_{32} + A_{32}\omega_{20} \\ \vdots \\ \omega_{NN-1} + A_{NN-1}\omega_{N-10} \end{bmatrix} \dots\dots\dots (35)$$

$$\begin{bmatrix} V_{c1} \\ V_{c2} \\ V_{c3} \\ \vdots \\ V_{cN} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{10} \dot{r}_0 \\ A_{21} \left\{ V_{c1} + \tilde{r}_{f1}\omega_{10} + \sum_{n=1}^{n_0} \dot{q}_{1n}u_{1n}(r_1) \right\} \\ A_{32} \left\{ V_{c2} + \tilde{r}_{f2}\omega_{20} + \sum_{n=1}^{n_0} \dot{q}_{2n}u_{2n}(r_2) \right\} \\ \vdots \\ A_{NN-1} \left\{ V_{cN-1} + \tilde{r}_{fN-1}\omega_{N-10} + \sum_{n=1}^{n_0} \dot{q}_{N-1n}u_{N-1n}(r_{N-1}) \right\} \end{bmatrix} \dots\dots\dots (36)$$

$$\begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ \vdots \\ P_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_1 V_{c1} + \langle \tilde{\rho}_{f1} \rangle_1 \omega_{10} + \sum_{n=1}^{n_0} \dot{q}_{1n} \langle u_{1n} \rangle_1 \\ m_2 V_{c2} + \langle \tilde{\rho}_{f2} \rangle_2 \omega_{20} + \sum_{n=1}^{n_0} \dot{q}_{2n} \langle u_{2n} \rangle_2 \\ \vdots \\ m_N V_{cN} + \langle \tilde{\rho}_{fN} \rangle_N \omega_{N0} + \sum_{n=1}^{n_0} \dot{q}_{Nn} \langle u_{Nn} \rangle_N \end{bmatrix} \dots\dots\dots (37)$$

$$\begin{bmatrix} \hat{P}_0 \\ \hat{P}_1 \\ \hat{P}_2 \\ \vdots \\ \hat{P}_{N-1} \\ \hat{P}_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{01} \hat{P}_1 \\ P_1 + A_{12} \hat{P}_2 \\ P_2 + A_{23} \hat{P}_3 \\ \vdots \\ P_{N-1} + A_{N-1N} \hat{P}_N \\ P_N \end{bmatrix} \dots\dots\dots (38)$$

$$\begin{bmatrix} L_{c1} \\ L_{c2} \\ \vdots \\ L_{cN} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle \tilde{\rho}_{f1}^T \tilde{\rho}_{f1} \rangle_1 \omega_{10} + \sum_{n=1}^{n_0} \dot{q}_{1n} \langle \tilde{\rho}_{f1}^T u_{1n} \rangle_1 \\ \langle \tilde{\rho}_{f2}^T \tilde{\rho}_{f2} \rangle_2 \omega_{20} + \sum_{n=1}^{n_0} \dot{q}_{2n} \langle \tilde{\rho}_{f2}^T u_{2n} \rangle_2 \\ \vdots \\ \langle \tilde{\rho}_{fN}^T \tilde{\rho}_{fN} \rangle_N \omega_{N0} + \sum_{n=1}^{n_0} \dot{q}_{Nn} \langle \tilde{\rho}_{fN}^T u_{Nn} \rangle_N \end{bmatrix} \dots\dots\dots (39)$$

$$\begin{bmatrix} \hat{L}_{c1} \\ \hat{L}_{c2} \\ \vdots \\ \hat{L}_{cN-1} \\ \hat{L}_{cN} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{12} \hat{L}_{c2} + L_{c1} + \langle \tilde{\rho}_{f1}^T \rangle_1 V_{c1} + \tilde{r}_{f1}^T A_{12} \hat{P}_2 \\ A_{23} \hat{L}_{c3} + L_{c2} + \langle \tilde{\rho}_{f2}^T \rangle_2 V_{c2} + \tilde{r}_{f2}^T A_{23} \hat{P}_3 \\ \vdots \\ A_{N-1N} \hat{L}_{cN} + L_{cN-1} + \langle \tilde{\rho}_{fN-1}^T \rangle_{N-1} V_{cN-1} + \tilde{r}_{fN-1}^T A_{N-1N} \hat{P}_N \\ L_{cN} + \langle \tilde{\rho}_{fN}^T \rangle_N V_{cN} \end{bmatrix} \dots\dots\dots (40)$$

$$\begin{bmatrix} \hat{P}_{1n} \\ \hat{P}_{2n} \\ \vdots \\ \hat{P}_{N-1n} \\ \hat{P}_{Nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle u_{1n}^T \rangle_1 V_{c1} + u_{1n}^T(r_1) A_{12} \hat{P}_2 + \langle u_{1n}^T \tilde{\rho}_{f1} \rangle_1 \omega_{10} + \sum_{m=1}^{n_0} \dot{q}_{1m} \langle u_{1n}^T u_{1m} \rangle_1 \\ \langle u_{2n}^T \rangle_2 V_{c2} + u_{2n}^T(r_2) A_{23} \hat{P}_3 + \langle u_{2n}^T \tilde{\rho}_{f2} \rangle_2 \omega_{20} + \sum_{m=1}^{n_0} \dot{q}_{2m} \langle u_{2n}^T u_{2m} \rangle_2 \\ \vdots \\ \langle u_{N-1n}^T \rangle_{N-1} V_{cN-1} + u_{N-1n}^T(r_{N-1}) A_{N-1N} \hat{P}_N + \langle u_{N-1n}^T \tilde{\rho}_{fN-1} \rangle_{N-1} \omega_{N-10} + \sum_{m=1}^{n_0} \dot{q}_{N-1m} \langle u_{N-1n}^T u_{N-1m} \rangle_{N-1} \\ \langle u_{Nn}^T \rangle_N V_{cN} + \langle u_{Nn}^T \tilde{\rho}_{fN} \rangle_N \omega_{N0} + \sum_{m=1}^{n_0} \dot{q}_{Nm} \langle u_{Nn}^T u_{Nm} \rangle_N \end{bmatrix} \dots\dots\dots (41)$$

$$\begin{bmatrix} \hat{L}_{1n} \\ \hat{L}_{2n} \\ \vdots \\ \hat{L}_{N-1n} \\ \hat{L}_{Nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle \tilde{u}_{1n} \rangle_1 V_{c1} + \tilde{u}_{1n}(r_1) A_{12} \tilde{P}_2 + \langle \tilde{u}_{1n} \tilde{\rho}_{f1} \rangle_1 \omega_{10} + \sum_{m=1}^{n_0} \dot{q}_{1m} \langle \tilde{u}_{1n} u_{1m} \rangle_1 \\ \langle \tilde{u}_{2n} \rangle_2 V_{c2} + \tilde{u}_{2n}(r_2) A_{23} \tilde{P}_3 + \langle \tilde{u}_{2n} \tilde{\rho}_{f2} \rangle_2 \omega_{20} + \sum_{m=1}^{n_0} \dot{q}_{2m} \langle \tilde{u}_{1n} u_{2m} \rangle_2 \\ \vdots \\ \langle \tilde{u}_{N-1n} \rangle_{N-1} V_{cN-1} + \tilde{u}_{N-1n}(r_{N-1}) A_{N-1N} \tilde{P}_N + \langle \tilde{u}_{N-1n} \tilde{\rho}_{fN-1} \rangle_{N-1} \omega_{N-10} + \sum_{m=1}^{n_0} \dot{q}_{N-1m} \langle \tilde{u}_{N-1n} u_{N-1m} \rangle_{N-1} \\ \langle \tilde{u}_{Nn} \rangle_N V_{cN} + \langle \tilde{u}_{Nn} \tilde{\rho}_{fN} \rangle_N \omega_{N0} + \sum_{m=1}^{n_0} \dot{q}_{Nm} \langle \tilde{u}_{Nn} u_{Nm} \rangle_N \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (42)$$

$$\begin{bmatrix} Q_{i1} \\ Q_{i2} \\ \vdots \\ Q_{ino} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_{i11} & \lambda_{i12} & \cdots & \lambda_{i1n_0} \\ \lambda_{i21} & \lambda_{i22} & \cdots & \lambda_{i2n_0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_{ino1} & \lambda_{ino2} & \cdots & \lambda_{ino n_0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_{i1} \\ q_{i2} \\ \vdots \\ q_{ino} \end{bmatrix} \quad (i=1, 2, \dots, N) \quad \dots\dots\dots (43)$$

一般化力 $\hat{F}_0, \hat{T}_{ci}, \hat{F}_{in}$ は次のように与えられる。

$$\hat{F}_0 = A_{01}(f_{c1} - A_{N1}^T f_{cN+1}) \quad \dots\dots\dots (44)$$

$$\begin{bmatrix} \hat{T}_{c1} \\ \hat{T}_{c2} \\ \vdots \\ \hat{T}_{cN} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau_{c1} - A_{1N} \left[\sum_{k=1}^N A_{Nk} \tilde{r}_{fk}^T A_{kN} f_{cN+1} + \tau_{cN+1} \right] \\ \tau_{c2} - A_{2N} \left[\sum_{k=2}^N A_{Nk} \tilde{r}_{fk}^T A_{kN} f_{cN+1} + \tau_{cN+1} \right] \\ \vdots \\ \tau_{cN} - \tilde{r}_{fN}^T f_{cN+1} - \tau_{cN+1} \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (45)$$

$$\begin{bmatrix} \hat{F}_{1n} \\ \hat{F}_{2n} \\ \vdots \\ \hat{F}_{N-1n} \\ \hat{F}_{Nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -u_{1n}^T(r_1) A_{1N} f_{cN+1} + \frac{1}{2} \{ (\text{rot } u_{1n}(0))^T \tau_{c1} - (\text{rot } u_{1n}(r_1))^T A_{12} \tau_{c2} \} \\ -u_{2n}^T(r_2) A_{2N} f_{cN+1} + \frac{1}{2} \{ (\text{rot } u_{2n}(0))^T \tau_{c2} - (\text{rot } u_{2n}(r_2))^T A_{23} \tau_{c3} \} \\ \vdots \\ -u_{N-1n}^T(r_{N-1}) A_{N-1N} f_{cN+1} + \frac{1}{2} \{ (\text{rot } u_{N-1n}(0))^T \tau_{cN-1} - (\text{rot } u_{N-1n}(r_{N-1}))^T A_{N-1} \tau_{cN} \} \\ -u_{Nn}^T(r_N) f_{cN+1} + \frac{1}{2} \{ (\text{rot } u_{Nn}(0))^T \tau_{cN} - (\text{rot } u_{Nn}(r_N))^T \tau_{cN+1} \} \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (46)$$

ここで用いた重み関数 $W_i^{(1)}, W_i^{(2)}, W_{in}^{(3)}$ はそれぞれ、マニピュレータ全体の慣性空間における並進変位、部分リンク系 j の C_j 回りの回転変位、およびリンク j の弾性変形に伴う部分リンク系 j の変位を表している。よってそれぞれの重み関数から得られる方程式は、マニピュレータ全体の慣性空間における並進運動量、部分リンク系 j の C_j 回りの角運動量の時間変化、およびリンク j の弾性変形の時間変化を与える。また、これらの重み関数はモデル 1 とは違い、ジョイント部におけるリンク間の並進変位の連続性を保証しているので、導出された方程式系はリンク間に働くせん断力を陽に含まない。こうして得られたモデルは柔軟多体系の擬座標を用いた Lagrange 形式と同一のものとなる⁽⁹⁾。

3. 漸化形逆動力学計算アルゴリズム

逆動力学計算とは、系の運動を規定するすべての状

態変数が時間関数として与えられたとき、その運動を実現する関節トルクを求めることである。逆動力学計算は前述したように運動制御の中で用いられるため、効率的に計算できることが必要である。2章で求めた動力学モデルを用いることにより漸化形の効率的な逆動力学計算アルゴリズムを構成することができる。状態変数 $r_0, \omega_{ii-1}, q_{in}$ が時間関数として与えられたとき、関節トルク τ_{ci} を求めるアルゴリズムをモデル 1, 2 を用いて構成する。

3・1 モデル 1 に基づく逆動力学計算アルゴリズム

動力学モデル (16)～(18) に含まれる諸量は次のように漸化形に求められる。

$$\begin{aligned} \omega_{i0} &= \omega_{ii-1} + A_{ii-1} \omega_{i-10} \\ (i &= 2, 3, \dots, N) \quad \dots\dots\dots (47) \end{aligned}$$

$$V_{ci} = \begin{cases} A_{i0} \dot{r}_0 & (i=1) \\ A_{ii-1} \left\{ V_{ci-1} + \tilde{r}_{fi-1} \omega_{i-10} \right. \\ \quad \left. + \sum_{n=1}^{n_0} \dot{q}_{i-1n} u_{i-1n}(r_{i-1}) \right\} & \dots\dots\dots (48) \\ (i=2, 3, \dots, N) \end{cases}$$

$$P_i = m_i \left[V_{ci} + \tilde{\rho}_{fi}^{(1)} \omega_{i0} + \sum_{n=1}^{n_0} \dot{q}_{in} u_{in}^{(1)} \right] \quad (i=1, 2, \dots, N) \quad \dots\dots\dots (49)$$

$$L_{CMi} = \langle \tilde{\rho}_{fi}^{(2)T} \tilde{\rho}_{fi}^{(2)} \rangle_i \omega_{i0} + \sum_{n=1}^{n_0} \dot{q}_{in} \langle \tilde{\rho}_{fi}^{(2)T} u_{in}^{(2)} \rangle_i \quad (i=1, 2, \dots, N) \quad \dots (50)$$

$$P_{in} = \langle u_{in}^{(2)T} \tilde{\rho}_{fi}^{(2)} \rangle_i \omega_{i0} + \sum_{m=1}^{n_0} \dot{q}_{im} \langle u_{in}^{(2)T} u_{im}^{(2)} \rangle_i \quad (i=1, 2, \dots, N) \quad \dots (51)$$

$$L_{in} = \langle \tilde{u}_{in}^{(2)} \tilde{\rho}_{fi}^{(2)} \rangle_i \omega_{i0} + \sum_{m=1}^{n_0} \dot{q}_{im} \langle \tilde{u}_{in}^{(2)} u_{im}^{(2)} \rangle_i \quad (i=1, 2, \dots, N) \quad \dots (52)$$

$$Q_{in} = \sum_{j=1}^{n_0} \lambda_{inj} q_{ij} \quad (i=1, 2, \dots, N)(n=1, 2, \dots, n_0) \quad \dots\dots\dots (53)$$

P_i, L_{CMi}, P_{in} の時間微分はそれぞれ式(49)～(51)を微分することにより求められる。よって一般化力 F_i, T_{CMi}, F_{in} は逆力学方程式(16)～(18)より次のように与えられる。

$$F_i = \dot{P}_i + \tilde{\omega}_{i0}^T P_i \quad (i=N, N-1, \dots, 1) \quad \dots\dots (54)$$

$$T_{CMi} = \dot{L}_{CMi} + \tilde{\omega}_{i0}^T L_{CMi} \quad (i=N, N-1, \dots, 1) \quad \dots\dots\dots (55)$$

$$F_{in} = \dot{P}_{in} + \tilde{\omega}_{i0}^T L_{in} + Q_{in} \quad (i=N, N-1, \dots, 1) \quad \dots\dots\dots (56)$$

これより関節 i に働く力 f_{ci} 、およびトルク τ_{ci} は次のように求められる。

$$f_{ci} = \begin{cases} F_N + f_{cN+1} & (i=N) \\ F_i + A_{ii+1} f_{ci+1} & (i=N-1, N-2, \dots, 1) \end{cases} \quad \dots\dots\dots (57)$$

$$\tau_{ci} = \begin{cases} T_{CMN} + \tilde{\rho}_{fN}^{(1)T} F_N + \tilde{r}_{fN}^T f_{cN+1} + \tau_{cN+1} & (i=N) \\ T_{CMi} + \tilde{\rho}_{fi}^{(1)T} F_i + \tilde{r}_{fi}^T A_{ii+1} f_{ci+1} + A_{ii+1} \tau_{ci+1} & (i=N-1, N-2, \dots, 1) \end{cases} \quad \dots\dots\dots (58)$$

モデル 1 に基づく逆力学計算アルゴリズムを図 2 に示す。

3・2 モデル 2 に基づく逆力学計算アルゴリズム

逆力学モデル(32)～(34)に含まれる諸量は次のように漸化形に求められる。

$$\omega_{i0} = \omega_{i-1} + A_{ii-1} \omega_{i-10} \quad (i=2, 3, \dots, N) \quad \dots (59)$$

$$V_{ci} = \begin{cases} A_{i0} \dot{r}_0 & (i=1) \\ A_{ii-1} \left\{ V_{ci-1} + \tilde{r}_{fi-1} \omega_{i-10} \right. \\ \quad \left. + \sum_{n=1}^{n_0} \dot{q}_{i-1n} u_{i-1n}(r_{i-1}) \right\} & \dots\dots\dots (60) \\ (i=2, 3, \dots, N) \end{cases}$$

$$P_i = m_i V_{ci} + \langle \tilde{\rho}_{fi} \rangle_i \omega_{i0} + \sum_{n=1}^{n_0} \dot{q}_{in} \langle u_{in} \rangle_i \quad (i=1, 2, \dots, N) \quad \dots\dots\dots (61)$$

$$L_{ci} = \langle \tilde{\rho}_{fi}^T \tilde{\rho}_{fi} \rangle_i \omega_{i0} + \sum_{n=1}^{n_0} \dot{q}_{in} \langle \tilde{\rho}_{fi}^T u_{in} \rangle_i \quad (i=1, 2, \dots, N) \quad \dots\dots\dots (62)$$

$$\tilde{P}_i = \begin{cases} P_N & (i=N) \\ P_i + A_{ii+1} \tilde{P}_{i+1} & (i=N-1, N-2, \dots, 1) \\ A_{01} \tilde{P}_1 & (i=0) \end{cases} \quad \dots\dots\dots (63)$$

図 2 モデル 1 に基づく逆力学計算

図 3 モデル 2 に基づく逆力学計算

表 1 逆動力学の計算回数

(a) ケース 1: エンドエフェクタ先端に外力と外トルクが働かない場合
($f_{cN+1} = \tau_{cN+1} = 0$)

	Method	Multiplications	Additions
Rigid	(1) Model 1	$124N - 50$	$102N - 46$
Manipulator	(2) Model 2	$156N - 56$	$134N - 58$
Flexible	(1) Model 1	$(15n_0 + 138)N - 50$	$(16n_0 + 113)N - 46$
Manipulator	(2) Model 2	$(14n_0 + 169)N - 56$	$(15n_0 + 144)N - 58$

(b) ケース 2: エンドエフェクタ先端に外力と外トルクが働く場合
($f_{cN+1} \neq 0, \tau_{cN+1} \neq 0$)

	Method	Multiplications	Additions
Rigid	(1) Model 1	$124N - 44$	$102N - 34$
Manipulator	(2) Model 2	$186N - 80$	$161N - 76$
Flexible	(1) Model 1	$(15n_0 + 138)N - 44$	$(16n_0 + 113)N - 34$
Manipulator	(2) Model 2	$(14n_0 + 199)N - 80$	$(15n_0 + 171)N - 76$

$$\tilde{L}_{ci} = \begin{cases} L_{cN} + \langle \tilde{\rho}_{fN} \rangle_N V_{cN} & (i=N) \\ A_{ii+1} \tilde{L}_{ci+1} + L_{ci} + \langle \tilde{\rho}_{fi} \rangle_i V_{ci} \\ \quad + \tilde{r}_{fi}^T A_{ii+1} \tilde{P}_{i+1} & (i=N-1, N-2, \dots, 1) \end{cases} \quad \dots\dots\dots (64)$$

$$\tilde{P}_{in} = \begin{cases} \langle u_{Nn}^T \tilde{\rho}_{fN} \rangle_N \omega_{N0} \\ \quad + \sum_{m=1}^{n_0} \dot{q}_{Nm} \langle u_{Nn}^T u_{Nm} \rangle_N + \langle u_{Nn}^T \rangle_N V_{cN} \\ \quad (i=N) \\ \langle u_{in}^T \tilde{\rho}_{fi} \rangle_i \omega_{i0} + \sum_{m=1}^{n_0} \dot{q}_{im} \langle u_{in}^T u_{im} \rangle_i \\ \quad + \langle u_{in}^T \rangle_i V_{ci} + u_{in}^T(r_i) A_{ii+1} \tilde{P}_{i+1} \\ \quad (i=N-1, N-2, \dots, 1) \end{cases} \quad \dots\dots\dots (65)$$

$$\tilde{L}_{in} = \begin{cases} \langle \tilde{u}_{Nn} \tilde{\rho}_{fN} \rangle_N \omega_{N0} \\ \quad + \sum_{m=1}^{n_0} \dot{q}_{Nm} \langle \tilde{u}_{Nn} u_{Nm} \rangle_N + \langle \tilde{u}_{Nn} \rangle_N V_{cN} \\ \quad (i=N) \\ \langle \tilde{u}_{in} \tilde{\rho}_{fi} \rangle_i \omega_{i0} + \sum_{m=1}^{n_0} \dot{q}_{im} \langle \tilde{u}_{in} u_{im} \rangle_i \\ \quad + \langle \tilde{u}_{in} \rangle_i V_{ci} + \tilde{u}_{in}(r_i) A_{ii+1} \tilde{P}_{i+1} \\ \quad (i=N-1, N-2, \dots, 1) \end{cases} \quad \dots\dots\dots (66)$$

$$Q_{in} = \sum_{j=1}^{n_0} \lambda_{inj} q_{ij} \quad (i=1, 2, \dots, N)(n=1, 2, \dots, n_0) \quad \dots\dots\dots (67)$$

$\tilde{P}_0, \tilde{L}_{ci}, \tilde{P}_{in}$ の時間微分はそれぞれ式(63)~(65)を微分することにより求められる。よって一般化力 $\tilde{F}_0, \tilde{T}_{ci}, \tilde{F}_{in}$ は動力学方程式(32)~(34)より次のように与えられる。

$$\begin{aligned} \tilde{F}_0 &= \dot{\tilde{P}}_0 \quad \dots\dots\dots (68) \\ \tilde{T}_{ci} &= \dot{\tilde{L}}_{ci} + \tilde{\omega}_{i0}^T \tilde{L}_{ci} + \tilde{V}_{ci}^T \tilde{P}_i \end{aligned}$$

$$(i=N, N-1, \dots, 1) \quad \dots\dots\dots (69)$$

$$\begin{aligned} \tilde{F}_{in} &= \dot{\tilde{P}}_{in} + \omega_{i0}^T \tilde{L}_{in} + Q_{in} \\ (i=N, N-1, \dots, 1) \quad \dots\dots\dots (70) \end{aligned}$$

これより関節 i に働くトルク τ_{ci} は次のように求められる。

$$\begin{aligned} \tau_{ci} &= \tilde{T}_{ci} + A_{iN} \left[\sum_{k=i}^N A_{Nk} \tilde{r}_{fk}^T A_{kN} f_{cN+1} + \tau_{cN+1} \right] \\ (i=N, N-1, \dots, 1) \quad \dots\dots\dots (71) \end{aligned}$$

モデル 2 に基づく逆動力学計算アルゴリズムを図 3 に示す。

3・3 計算回数 具体的なマニピュレータモデルに対して、逆動力学計算に必要な計算回数を求める。 N 本のリンクから構成されたマニピュレータを考える。各リンクは一樣なビームで構成され、互いに平行な回転軸をもつ 1 回転自由度の関節で結合されており、ベースは関節 1 を介して慣性空間に固定されているものとする。各リンクの弾性変位は根元の関節の回転軸に垂直な平面でビーム軸に直交方向に生じるものとする。エンドエフェクタ先端に外力 f_{cN+1} と外トルク τ_{cN+1} が働かない場合(ケース 1)および働く場合(ケース 2)に対して逆動力学計算回数を表 1 に示す。比較のためリンクが剛体から構成された剛体マニピュレータの場合の計算回数も合わせて示す。

逆動力学計算に要する計算回数は、モデル 1, 2 において大きな差異はない。しかしエンドエフェクタ先端に外力、外トルクが作用する場合、モデル 1 の方が効率的な計算アルゴリズムを与える。よって力制御等の環境との相互作用のある場合には、モデル 1 の方が適していると考えられる。

4. ま と め

柔軟マニピュレータの運動制御に適したモデルの導出を行った。まず状態変数として各リンクの角速度を用い、弾性変形は適当な展開関数を用いて表現した。次に重み付き残差法を用いて柔軟多体系の漸化形の動力学モデルを二つ導いた。一方は剛体多体系に対する Newton-Euler 方程式の拡張であり、他方はリンク間の相対角速度を用いた Lagrange 方程式と同一のものである。これらのモデルは漸化形式になっており、効率的な逆動力学計算アルゴリズムを与える。重み付き残差法は解析力学においてはダランベール原理の拡張と考えられる。力学はダランベール原理によってニュートンの運動法則に基づく“ベクトルの力学”から座標系に不変な表現をもつ解析力学へと発展した⁽¹⁾。多数の要素から構成された系の運動を考えると、ベクトルの力学ではおのおのの要素を個別に考える。しかし変分原理に基づく解析力学では、系を全体として捉えて解析を行う。それゆえ、柔軟多体系という複雑な系の動力学モデルの導出においては解析力学あるいは変分原理の考え方に基づいて導出することが有効である。ここで導出したモデル以外に重み関数をそのモデルの使用目的に合わせ適切に選択することにより、その使用目的に合った動力学モデルを構成することができるであろう。

文 献

- (1) Tsuchiya, K., Kashiwase, T. and Yamada, K., Re-

- duced-Order Models of a Large Flexible Spacecraft, *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, **12**-6 (1989), 845-850.
- (2) Whitney, D. E., Resolved motion rate control of manipulators and human prostheses, *IEEE Trans. Man-Mach. Syst.*, MMS-10 (1969), 47-53.
- (3) Luh, J. Y. S., Walker, M. W. and Paul R. P. C., On-line computational scheme for mechanical manipulators, *Trans. ASME, J. Dyn. Syst. Meas. Control*, **102**-2 (1980), 69-76.
- (4) 土屋・渡辺・山田, 剛体多体系の運動方程式のラグランジュ形式による定式化, *機論*, **58**-549, C (1992), 32-36.
- (5) Book, W. J., Recursive Lagrangian dynamics of flexible manipulator arms, *Int. J. Robot. Res.*, **3**-3 (1984), 87-101.
- (6) Changizi, K. and Shabana A. A., A Recursive Formulation for the Dynamic Analysis of Open Loop Deformable Multibody Systems, *J. Appl. Mech.*, **55** (1988), 687-693.
- (7) Kim, S. and Haug E. J., A Recursive Formulation for Flexible Multibody Dynamics, Part 1: Open-Loop Systems, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **71** (1988), 293-314, North-Holland.
- (8) Jain, A. and Rodriguez G., Recursive Flexible Multibody System Dynamics Using Spatial Operators, *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, **15**-6 (1992) 1453-1466.
- (9) Tsuchiya, K. and Watanabe, S., Lagrangian formulation of the mechanics of flexible bodies connected by rotary joints, *Finite Elements in Analysis and Design*, **14** (1993), 261-272, Elsevier.
- (10) フィレイソン, B. A. (鷲津・山本・川井共訳), 重み付き残差法と変分原理, (1974), 3-15, 培風館.
- (11) Lanczos, C. (高橋監訳・一柳訳), 解析力学と変分原理, (1992), 75-94, 日刊工業新聞社.