膨らみをもつ鼓形ウォームギヤに関する研究*

(膨らみの付ける方法と歯当たりおよびかみあい誤差の解析)

譚 建 平^{*1}, 田 中 成 忠^{*2}

Point-Contact Hourglass Worm Gears (Crowning Method, the Analysis of Tooth Contact and Kinematic Precision of the Gearing)

Jianping TAN and Shigetada TANAKA

In this paper, a method of crowning is proposed for hourglass worm gears to obtain the manner of point-contact with the aim of controlling the sensitivity to various errors. In the studied worm gears, the worm is generated from a basic member with a plane or a spherical surface. The basic surface of the hob is also generated from a basic member with a spherical surface, but the radius of curvature is lesser than the former to some degree. Errors of center distance and shaft angle were introduced in the tooth contact analysis (TCA). The contact pattern and kinematic error curves were presented. The results showed that the method of crowning proposed can be employed for practical use.

Key Words: Worm Gears, Point Contact, Crowning, Spherical Surface, Plane Surface, Tooth Contact Analysis

1. 緒 言

歯車の歯面にかすかに膨らみを付けておけば、まぬがれがたい製作誤差とか組立誤差があっても、あるいは使用中に少し変位しても、片当たりになる恐れが少なく、実用上好都合であるという立場から、和栗・安東は、円筒ウォームギヤの歯面に膨らみを付ける歯切法を考案し、膨らみを付けたウォームギヤに好ましい運転性能を期待できると報告している⁽¹⁾。一方、牧らは、歯形論から点接触鼓形ウォームギヤを考察し、ウォームを平面で創成しホイールを一本の直線で歯切りする方法を提案した⁽²⁾⁽³⁾。また、大泉・酒井は、媒介歯車を仲介にした点接触歯車対の構成法を発表し、可展歯面鼓形ウォームギヤを対象にしてそのウォームと同形のホブでホイール歯面を点接触化する歯切法を考察した⁽⁴⁾⁽⁵⁾。

これまでには、円筒ウォームギヤに膨らみを付ける歯切法は確立されているが、鼓形ウォームギヤについては、よりよい方法がまだ見つかっていないのが現状である。鼓形ウォームギヤ歯面間に点接触させるために、いくつかの歯切法が提案されているが、それらの方法は線接触鼓形ウォームギヤのもつ長所をあまり生かされていないように思われる。つまり、ホイールの第2接触歯面が現れず、なじみの進行に頼ってもその本来の好性能をより引き出すことがあまり期待できないと考えられる。したがって、線接触鼓形ウォームギヤ

本来の好ましいかみあい性質を生かしたまま、誤差に対する鈍感性を加味する膨らみの付け方を求める必要があると思われる。そこで、著者らは、線接触の球面2度包絡式鼓形ウォームギヤ⁽⁶⁾および可展歯面鼓形ウォームギヤ⁽⁷⁾をもとにして、それらのウォームとホブ研削用砥石に異なる曲率半径を与えることによりホイール歯面に膨らみを付ける方法⁽⁸⁾を考案した。本研究では、この方法を提案すると共に、ウォームおよびホブ研削用砥石の曲率半径差とホイール歯面に与える膨らみ量との関係、軸間距離および軸角誤差に対する歯当たりとかみあい誤差の変化等についての解析を行った。

2. 膨らみを付ける方法

この方法の基本原理は、ウォームの歯面を創成するときに球面または平面を用いる場合、それよりある程度小さい球径の球面でホブの基礎曲面を創成し、このホブを用いてそのウォームとかみあうホイールの歯面を切削する所にある。図1(b)に示すように、ウォームの歯面とホブの基礎曲面を創成する際にはそれぞれ用いられる平面と球面または大球面と小球面はある基準点で接するようにする。得られたホブの基礎曲面でウォームとホイールのかみあい運動と全く同じ関係運動でホイールの歯面を創成する。ホブによるホイールの歯面を C_{hg} としておく。一方、創成されたウォームの歯面は相手ホイールに対して、理論的にある曲面を包絡するがこれを仮想ホイール歯面と呼ぶことにする。この仮想ホイール歯面を C_{wg} とする。図2に示すように、それらの二つの曲面 C_{hg} と C_{wg} の間には、ホブとウォームの研削用砥石に異なる曲率半径を与える

* 原稿受付 平成6年6月9日。

*¹ 正員、佐賀大学大学院 (〒840 佐賀市本庄町1)。*² 正員、佐賀大学理工学部。

図1 ウォームギヤの座標系と砥石の取付

図2 ホイール歯面 C_{hg} と仮想ホイール歯面 C_{wg}

ことによる形状差が現れ、その形状差を適当な値にすれば、そのウォームギヤの歯面には膨らみが自然にできてくる。その形状差が膨らみ量として考えられる。

3. 座標系と歯面方程式

まず、本研究で使用するおもな記号、座標系を以下に示す。

記号

ν, μ : 球面を表すパラメータ⁽⁶⁾

R : 球面の半径

R_w : ウォームの歯面を創成する時の砥石の球半径

R_h : ホブの基礎曲面を創成する時の砥石の球半径

a, b, c : 球心の座標 ($O_0-X_0Y_0Z_0$ 系において)

ν, τ : 平面を表すパラメータ⁽¹¹⁾

R_x : 平面と球面または大球面と小球面の接する基準点を表すパラメータ

β, r_b : 砥石の取付けに関するパラメータ

ψ_1, ψ_0 : ウォーム(またはホブ)の加工時のウォーム(またはホブ)とテーブルの回転角

θ_1, θ_2 : ホイールの加工時のホブ(またはウォーム)とホイールの回転角

ψ_w, ψ_g : 歯当たりの解析に導入したウォームとホイールの回転角, $\psi_w = i\psi_g$

A, i : ウォーム(ホブ)とホイール(テーブル)の軸間距離と歯数比(回転比)

座標系(図2参照)

$O_0-X_0Y_0Z_0$ 系: Z_0 軸が回転テーブル軸に一致し、回転テーブルに固定の座標系

$O_1-X_1Y_1Z_1$ 系: Z_1 軸がウォーム軸に一致し、ウォームまたはホブに固定の座標系

$O_2-X_2Y_2Z_2$ 系: Z_2 軸がホイール軸に一致し、ホイールに固定の座標系

$O_w-X_wY_wZ_w$ 系: Z_w 軸がウォーム軸に一致した空間固定の座標系

$O_g-X_gY_gZ_g$ 系: Z_g 軸がホイール軸に一致した空間固定の座標系

図1に示す工具球面を $O_0-X_0Y_0Z_0$ 系のベクトル r_0 で表せば

$$\begin{aligned} r_0(\nu, \mu, R) &= \begin{bmatrix} X_0(\nu, \mu, R) \\ Y_0(\nu, \mu, R) \\ Z_0(\nu, \mu, R) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} + R \begin{bmatrix} \sin \nu \cos \mu \\ \sin \nu \sin \mu \\ \cos \nu \end{bmatrix} \dots\dots\dots (1) \end{aligned}$$

ただし,

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{R_x^2 - r_b^2} \\ R \cos \beta - r_b \\ -R \sin \beta \end{bmatrix}$$

工具球面の球半径がいくら変わっても、その球心座標を上式の式に満足させれば、 R_x, r_b と β によってそれぞれの工具球面に共通の接点(基準点)を与えることができる。

一方、球半径 R を ∞ にすると、球面が平面になり、その平面を $O_0-X_0Y_0Z_0$ 系のベクトル r_0 で表すと

$$r_0(\nu, \tau) = \begin{bmatrix} X_0(\nu, \tau) \\ Y_0(\nu, \tau) \\ Z_0(\nu, \tau) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \nu \\ \tau \sin \beta - r_b \\ \tau \cos \beta \end{bmatrix} \dots\dots\dots (2)$$

工具球面によって創成されるウォームの歯面またはホブの基礎曲面を $O_1-X_1Y_1Z_1$ 系のベクトル r_1 で表せると、得られるその方程式を式(3)に示す。

$$\left. \begin{aligned} r_1(\phi_0, \mu, R) &= \begin{bmatrix} X_1(\phi_0, \mu, R) \\ Y_1(\phi_0, \mu, R) \\ Z_1(\phi_0, \mu, R) \end{bmatrix} \\ &= \Omega_{01} r_0(\nu, \mu, R) + A \Phi_{01} \\ \nu &= \tan^{-1} \frac{i(A - a \cos \phi_0 + b \sin \phi_0)}{ic \cos(\phi_0 + \mu) - a \sin \mu + b \cos \mu} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3)$$

ただし、

$$\Omega_{01} = \begin{bmatrix} -\cos \phi_0 \cos \phi_1 & \sin \phi_0 \cos \phi_1 & -\sin \phi_1 \\ \cos \phi_0 \sin \phi_1 & -\sin \phi_0 \sin \phi_1 & -\cos \phi_1 \\ -\sin \phi_0 & -\cos \phi_0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Phi_{01} = \begin{bmatrix} \cos \phi_1 \\ -\sin \phi_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$R=R_w$ のとき、式(3)はウォームの歯面方程式になるが、 $R=R_h$ を代入すると、ホブの基礎曲面の方程式になる。

平面によって創成されるウォームの歯面方程式は式(4)に示される。

$$\left. \begin{aligned} r_1(\phi_0, \nu) &= \begin{bmatrix} X_1(\phi_0, \nu) \\ Y_1(\phi_0, \nu) \\ Z_1(\phi_0, \nu) \end{bmatrix} = \Omega_{01} r_0(\nu, \tau) + A \Phi_{01} \\ \tau &= \frac{\nu(\sin \beta \cos \phi_0 + \cos \beta/i) - \sin \beta(A - r_0 \sin \phi_0)}{\sin \phi_0} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (4)$$

ホブによるホイール歯面 C_{hg} を $O_2-X_2Y_2Z_2$ 系のベクトル r_2 で表すと、導出されたその方程式は式(5)に示される。

$$\left. \begin{aligned} r_2(\theta_2, \phi_0, R) &= \begin{bmatrix} X_2(\theta_2, \phi_0, R) \\ Y_2(\theta_2, \phi_0, R) \\ Z_2(\theta_2, \phi_0, R) \end{bmatrix} = \Omega_{12} r_1(\phi_0, \mu, R) + A \Phi_{12} \\ \mu &= \tan^{-1} \frac{iM(A \sin \phi_0 + b) \tan \xi - bN - ic(A \sin \phi_0 + b)}{iM(a - A \cos \phi_0) \tan \xi - aN - ic(a - A \cos \phi_0)} \\ M &= A - a \cos \phi_0 + b \sin \phi_0, N = a \sin \phi_0 + b \cos \phi_0, \xi = i(\phi_0 - \theta_2)/2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (5)$$

ここで、

$$\Omega_{12} = \begin{bmatrix} -\cos \theta_1 \cos \theta_2 & \sin \theta_1 \cos \theta_2 & -\sin \theta_2 \\ \cos \theta_1 \sin \theta_2 & -\sin \theta_1 \sin \theta_2 & -\cos \theta_2 \\ -\sin \theta_1 & -\cos \theta_1 & 0 \end{bmatrix}, \Phi_{12} = \begin{bmatrix} \cos \theta_2 \\ -\sin \theta_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ウォームによる仮想ホイール歯面の方程式は、球面を用いた場合に式(5)と同じ(ただし、 $R=R_w$)であるが、平面を用いた場合には式(6)のように示される。

$$\left. \begin{aligned} r_2(\theta_2, \phi_0) &= \begin{bmatrix} X_2(\theta_2, \phi_0) \\ Y_2(\theta_2, \phi_0) \\ Z_2(\theta_2, \phi_0) \end{bmatrix} = \Omega_{12} r_1(\phi_0, \nu) + A \Phi_{12} \\ \nu &= \frac{A \cos \phi_0 [(\sin \beta \sin \delta - (1 - \cos \delta) \cos \beta \sin \phi_0)]}{\cos \beta \sin \phi_0 (1 - \cos \delta) + (\sin \beta + \cos \beta \cos \phi_0/i) \sin \delta} \\ \delta &= i(\phi_0 - \theta_2) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (6)$$

また、ウォームとホイールの歯当たりおよびかみあい誤差の解析には、ウォームとホイールの歯面座標を空間固定座標系に変換する必要がある。ウォームの方程式は $O_w-X_wY_wZ_w$ 系のベクトル r_w で、ホイールの方程式は $O_g-X_gY_gZ_g$ 系のベクトル r_g で表すと、次のとおりである。

ウォーム

$$\left. \begin{aligned} r_w(\phi_0, \mu, R_w, \phi_w) &= \begin{bmatrix} X_w(\phi_0, \mu, R_w, \phi_w) \\ Y_w(\phi_0, \mu, R_w, \phi_w) \\ Z_w(\phi_0, \mu, R_w, \phi_w) \end{bmatrix} = \Omega_w r_1(\phi_0, \mu, R_w) \\ \Omega_w &= \begin{bmatrix} \cos \phi_w & -\sin \phi_w & 0 \\ \sin \phi_w & \cos \phi_w & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (7)$$

または

$$\mathbf{r}_w(\phi_0, \nu, \phi_w) = \begin{bmatrix} X_w(\phi_0, \nu, \phi_w) \\ Y_w(\phi_0, \nu, \phi_w) \\ Z_w(\phi_0, \nu, \phi_w) \end{bmatrix} = \mathbf{\Omega}_w \mathbf{r}_1(\phi_0, \nu) \quad \dots\dots\dots (7 \cdot a)$$

ホイール

$$\mathbf{r}_g(\theta_2, \phi_0, R_h, \phi_g) = \begin{bmatrix} X_g(\theta_2, \phi_0, R_h, \phi_g) \\ Y_g(\theta_2, \phi_0, R_h, \phi_g) \\ Z_g(\theta_2, \phi_0, R_h, \phi_g) \end{bmatrix} = \mathbf{\Omega}_g \mathbf{r}_2(\phi_0, \mu, R_w) \quad \dots\dots\dots (8)$$

$$\mathbf{\Omega}_g = \begin{bmatrix} \cos \phi_g & -\sin \phi_g & 0 \\ \sin \phi_g & \cos \phi_g & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

組立誤差を与えたとき、空間固定座標系 $O_w-X_wY_wZ_w$ と $O_g-X_gY_gZ_g$ との変換関係は次のとおりである。

$$\begin{bmatrix} X_g \\ Y_g \\ Z_g \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & A + \Delta A \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \Delta Z_g \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 \cos \Delta \Sigma & -\sin \Delta \Sigma & -\Delta Z_w \sin \Delta \Sigma \\ 0 \sin \Delta \Sigma & \cos \Delta \Sigma & \Delta Z_w \cos \Delta \Sigma \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_w \\ Y_w \\ Z_w \\ 1 \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (9)$$

ここで、

- ΔA : ウォームとホイールの軸間距離誤差
- $\Delta \Sigma$: ホイールの軸に対するウォーム軸の傾き誤差
- ΔZ_g : ホイール軸方向の変位量
- ΔZ_w : ウォーム軸方向の変位量

4. 解析の結果

4.1 ホイールの歯面形状差の解析 式(5)あるいは式(6)を使って、ウォームとホブの創成用砥石の曲率半径差とホイール歯面における C_{hg} と C_{wg} の形状差との関係についての解析を行った。その解析には、ホイールと同軸でホイール歯面を貫く円(半径 R_g 、軸方向位置 Z_g)を考え、ホイール歯面 C_{hg} と仮想ホイール歯面 C_{wg} とによって切り取られるこの円の微小円弧の長さ(ΔH)を求めることにした。この微小円弧の長さは近似的に両歯面間のすきまと見なせる。この近似的なすきまの量を歯面全体について求めることによって、ホブによる歯面が仮想歯面形状とどのように異なるかを把握することができる。表1の諸元を用い、計算した結果が図3に示される。図3(a)は、ウォー

ムの歯面に平面砥石を(すなわち可展歯面のウォームになる)、ホブの基礎曲面に球面砥石($R_h=2500$ mm)を用いた場合の結果を示す。一方、ウォームに大球面($R_w=1650$ mm)を、ホブに小球面($R_h=1000$ mm)を用いた場合の結果を図3(b)に示す。それらの結果の示すように、 C_{hg} と C_{wg} は歯面の中央部分においてほぼ接した状態から、歯すじ方向の両側または歯先および歯元側に離れるにつれて、その両面間のすきまが大きくなることが分かる。したがって、鼓形ウォームとホブ研削用砥石に曲率半径差を与えれば、そのウォームギヤ歯面に膨らみを付けることができると分かる。また、その膨らみ量は砥石の曲率半径差によって決められる。

4.2 歯当たりおよびかみあい誤差の解析 著者が提案する膨らみを付ける方法の有効性を確かめるために、図3に示すような膨らみを付けた場合($R_h=1650$ mm, $R_w=2500$ mm)と膨らみを付けなかった場合($R_h=R_w=1650$ mm)に関し、誤差のないときと誤差のあるときのそれらの歯当たりとホイールの角度伝達誤差の変化についての理論解析を行った。鼓形ウォームギヤの歯当たりと回転精度に強く影響するのは中心間距離誤差 ΔA と軸角誤差 $\Delta \Sigma$ (ホイール軸に対

表1 ウォームギヤの諸元

Center distance A	125 mm
Gear ratio i	1/41
Module	4.878 mm
r_b	38.75 mm
β	12.5°
Face width of wheel	30 mm

(a) $R_w = \infty$ (平面), $R_h = 2500$ mm の場合

(b) $R_w = 1650$ mm, $R_h = 2500$ mm の場合

図3 ホイール歯面における膨らみの解析結果

するウォーム軸の傾き)である⁽⁹⁾⁽¹⁰⁾ので、今回、 $\Delta A = \pm 0.025 \text{ mm}$, $\Delta \Sigma = \pm 0.05^\circ$ それぞれの単一誤差のある場合の理論解析を行った。

歯当たりの解析については、4・1節での歯面形状差を調べる方法と同様に、ホイール歯面を貫く多数の同軸円を考えて、今度はウォーム歯面とホイール歯面(ホブによる)で切り取られる微小円弧長を求め、歯当たりのようすを調べた。歯当たり面積の大きさは、ウォーム、ホイール両歯面間のすきまが $5 \mu\text{m}$ 以下である領域を求めて、ホイール歯面において等高線で表示することにした。誤差がない場合とそれぞれの単一誤差のある場合の歯当たりの解析結果が図4～8の順に示される。図中、No. 1～No. 4は同時かみあいの状態を示し、No. 1, 2, 3, 4の順番にかみあいは進んでいく。そして下端の歯面Mはかみあいによってできる歯当たりマークを示している。図中の(b)は、線接触(膨らみを付けてない)の歯当たりであるが、(a)は、膨らみを付けた点接触の場合である。誤差がなかった

とき、線接触の方は4枚歯の同時当たりに対して、点接触の方は3枚歯の同時当たりになり、歯当たり面積も小さく見えるが、同一歯面上では二度接触がはっきり現れ、線接触の本来のかみあい性質を十分に保ったことが分かる。一方、誤差があったとき、それぞれの単

図6 歯当たりの解析結果($\Delta A = -0.025 \text{ mm}$)

図4 歯当たりの解析結果(誤差がなかった場合)

図7 歯当たりの解析結果($\Delta \Sigma = 0.05^\circ$)

図5 歯当たりの解析結果($\Delta A = 0.025 \text{ mm}$)

図8 歯当たりの解析結果($\Delta \Sigma = -0.05^\circ$)

図 9 かみあい誤差曲線(誤差がなかった場合)

図 12 かみあい誤差曲線($\Delta\Sigma=0.05^\circ$) 図 10 かみあい誤差曲線($\Delta A=0.025\text{ mm}$) 図 13 かみあい誤差曲線($\Delta\Sigma=-0.05^\circ$) 図 11 かみあい誤差曲線($\Delta A=-0.025\text{ mm}$)

一誤差に対して、線接触の歯当たりが大きく崩れ、最大 2 枚、通常 1 枚の歯でかみあいとなり、しかも片当たりになる。これに対して、膨らみを付けた点接触の歯当たりは大きな変化があまり見られず、最低 2 枚、通常 3 枚の歯でのかみあい状態を維持したままである。潤滑油巻込みの効果を考えるとホイールのかみこみ側にすきまがある方が好ましく、また同時かみあい歯数も多くなっているため、負荷が集中して歯面を損傷することなく、歯当たりの広さが十分に得られることが予想される。

また、ウォームの回転数が一定であると仮定した場合のかみあいの始めから終わりまでホイール回転の各瞬間ごとの相対角度伝達誤差⁽¹⁰⁾すなわちかみあい誤差を求めた。その解析結果が図 9~13 に示される。それらの図の横軸はかみあい始めから終わりまでホイールの回転角 φ_g (ウォームとの回転比を一定とした場合の回転角)を表すが、その縦軸は各回転角に応じるホイールの相対角度伝達誤差 $\Delta\theta$ を示す。解析結果の示すように、取り上げられた誤差に対して、線接触のかみあい誤差はいずれも大きくなり、かみあい誤差曲線

上のジャンプ値により、ある瞬間に歯面間には衝突が起ることが予想される。一方、点接触の場合は、中心間距離誤差がマイナスになるとそのかみあい誤差曲線上的の変動が見られるが、それ以外は誤差がなかったときとほぼ同じように滑らかなかみあい誤差曲線になり、その変化が極めて小さくて高い回転精度を維持できると考えられる。

5. 結 言

著者らは、線接触の球面二度包絡式鼓形ウォームギヤおよび可展歯面鼓形ウォームギヤをもとにして、それらのウォームとホブ研削用砥石に異なる曲率半径を与えることによりホイール歯面に膨らみを付ける方法を提案し、それらを点接触することについて考察した。歯当たりおよびかみあい誤差の解析をしてこの方法による点接触化の有効性を予測した。

文 献

- (1) 和栗・安東, 機論, 15-50 (1949), IV-24.
- (2) 牧, 機論, 45-400, C (1979), 1398.
- (3) 牧・郡原, 機論, 47-417, C (1981), 675.
- (4) 大泉・酒井, 機論, 49-444, C (1983), 1426.
- (5) 大泉・酒井, 機論, 50-449, C (1984), 187.
- (6) 譚・張, 重慶大学学报, (1988-1), 41.
- (7) 酒井・牧, 機論, 41-351 (1975), 3285.
- (8) 譚・ほか 2 名, 機講論, No. 930-63, E (1993-10), 169.
- (9) 秦・ほか 4 名, 機講論, No. 900-59, E (1991-3), 22.
- (10) 秦・ほか 3 名, 機講論, No. 910-17, C (1991-3), 242.
- (11) Zhang, G.H. and Qin, D.T., *Proc. Int. Conf. on Gearing*, Zhengzhou, China, Vol. I (1988), 79.