有限要素法を用いた歯付きベルトの歯剛性解析*

清水 一樹^{*1}, 藤井 透^{*2}
高明輝^{*3}, 城戸 隆一^{*4}

Analysis of Tooth Stiffness of Toothed Belts Using nonlinear F. E. M.

Kazuki SHIMIZU, Toru FUJII,
Meiki KOH and Ryuichi KIDO

Tooth stiffness of toothed belts having trapezoidal teeth was numerically analyzed using the nonlinear finite element method. Here, friction between the belt tooth and the pulley, and large deformation of the tooth were considered. Numerical results reveal that the observed tooth stiffness is strongly affected by the belt tension and number of teeth of the pulley, although the relationship between a tooth load and tooth deformation can be considered linear for a given condition. It is also found that the observed tooth stiffness increases with an increase of average belt tension and reaches a certain value. The friction acting on a side surface of the belt tooth has little effect on the observed tooth stiffness.

Key Words: Tooth Stiffness, Finite Element Method, Friction, Belt Tension, Trapezoidal Teeth

1. 緒言

歯付きベルトの荷重分担に関して、これまで多くの理論式が提案されている^{(1)~(4)}。これらの理論では、ベルト歯底とプーリ歯先部の間に働く摩擦係数およびその方向変化が考慮され、系として非線形的取り扱いがなされている。しかし、ベルト歯の変形特性は線形バネで置換されてきた。その妥当性についても一部実験で示されている。しかし、歯にかかる荷重の大小に関わらずベルト歯を同一の剛性を有する線形バネで一様に置き換えることができるかについて、従来の実験ではベルト歯をプーリに押しつける力を考慮していないなど実験的検証は不十分である。実際、プーリ歯と噛み合ったベルト歯の変形が非線形特性を示す報告例もある⁽¹⁾。^{*}

そこで本研究では、ZA 台形歯形⁽⁵⁾を有する歯付きベルトを対象に、ベルト歯/プーリ間の摩擦とベルト歯の大変形を考慮できる非線形有限要素法を用いてベルト歯に作用する力と変形の関係を解析する。その結果より、従来の理論で幅広く用いられているベルト歯に対する線形バネの問題点と妥当性について検証する。

2. 解析

2. 1 解析モデル ベルト歯の変形解析には ABAQUS を用いた。ベルト 1 ピッチ分を解析対象とする。ここで、有限要素分割されたベルト歯を図 1 に示す。歯付きベルトは幅方向の変形も可能であるので二次元平面応力問題として解析した。心線上部のカバーゴム層はベルト歯の変形にほとんど影響しないと考えられるので省略した。心線を 2 節点棒要素、ベルト歯底のゴム

① Bar Element (Cord)	④ Interface Element
(Contact & Friction)
② Quadrilateral Planar Element
(Rubber / Fabric
Combined Layer)	⑤ Rigid Surface
(Top of the Pulley)
③ Quadrilateral Planar Element
(Tooth)	⑥ Rigid Surface
(Side of the Pulley
Groove)

図 1 解析モデル

* 原稿受付 平成 6 年 5 月 30 日。

^{*1} 学生員, 同志社大学大学院 (〒610-03 京都府綴喜郡田辺町多々羅都谷)。^{*2} 正員, 同志社大学工学部。^{*3} 同志社大学工学部 [現: 東京エレクトロン(株)]。^{*4} バンドー化学(株)中央研究所 (〒652 神戸市兵庫区芦原通 3-1-6)。

が含浸した帆布層およびベルト歯部を四角形4節点平面要素で近似した。ベルト歯部で表面の帆布層はベルト歯部のゴム層と一体として取り扱った（特にその部分だけを特別に要素分割はしていない）。プーリはベルトに対してほとんど変形しないので、剛体面でモデル化した。ベルトのプーリとの接触・摩擦・剥離を取り扱うため、ベルト歯表面にインターフェース要素を設けた。この要素は、摩擦力の方向や固着・滑りといった二つの接触状態が判別できる。別途行った著者らの実験によれば、ベルトとプーリ間の（最大静止）摩擦係数 μ は概ね0.2～0.3であった。そこで、本解析では摩擦係数を一定とするとともに、その値として $\mu=0.2$ を用いた。ベルト構成素材はいずれも等方性材料と仮定した。主な材料物性を表1に示す。ベルト幅は19 mmである。

表1 計算に用いたベルト構成素材の機械的性質

心線のバネ定数	40 [kN/mm]
ゴム含浸帆布層の ヤング率	294 [MPa]
同ポアソン比	0.45
ベルト歯（ゴム層）のヤング率	15 [MPa]
同ポアソン比	0.499

2. 2 解析手順 本研究では、ベルト歯の大きな変形、回転など幾何学的非線形および接触の摩擦の有無などの非線形性を考慮した。解析は図2に示すように二つのステップに分けて行った。

Step 1. Extending and bending the belt

Step 2. Loading the belt

図2 解析手順 (Case I)

Step 1

無負荷状態で、ベルトをプーリ溝上に一直線上に配置する。このベルトの両端の張力 T_L （ベルト歯左側）および T_R （ベルト歯右側）が所定の値 T_i になるまで徐々に

に負荷する。このとき、図示するようにベルト両端の張力の方向を変化させ、プーリ面にベルトを押し付ける。なお、本論文では T_i を便宜上初張力と呼ぶ。

Step 2

ベルト歯に荷重を作用させるため、ベルトの一端に作用する張力（ T_R または T_L ）を T_i から ΔT だけ変化させ、張力差を徐々に与える。この場合、 $T_R \rightarrow (T_R + \Delta T)$ のようにベルト歯右側張力を ΔT 増加させる場合（Case I）と $T_L \rightarrow (T_L - \Delta T)$ のようにベルト歯左側張力を ΔT 減少させる場合（Case II）の二通りがある。

図3にベルトに歯荷重を作用させたときのベルトの変形の様子を示す。この場合、ベルト歯右側のベルト張力 T_R を ΔT 増加させた（Case I）。ベルト歯の両端に作用する張力の差 ΔT を見かけの歯荷重 Q_0 とした（図3参照）。また、ベルト歯のたわみ量 λ は図に示すように歯元の変位の x 方向成分から求めた。本研究ではベルト歯の剛性 k を次の式から求めた。

$$k = Q_0 / \lambda$$

図3 ベルト歯のたわみ量 (Case I)

3. 解析結果および考察

3. 1 歯剛性に及ぼす摩擦の影響 従来、歯付きベルトの荷重分担理論を展開するに当たって、ベルト歯の剛性は実験により決めるものとされてきた。実際には、次のような方法によりベルト歯剛性を求めている。

- (1) 台形歯を有するラック上にベルトを置き、その中のベルト一歯に引張りおよび押しつけ荷重を加える⁽¹⁾（図4(a)）
- (2) 一歯のみ残したベルトをプーリに巻き付ける⁽²⁾（図4(b)）
- (3) ベルトの背面を平板に固定し、一歯残したプーリと噛み合わせ、このプーリを回転させる⁽³⁾（図4(c)）

(a)

(b)

(c)

(d)

図4 従来のベルト歯剛性の測定方法

Case 1.

Case 2.

Interface Element
(Contact & Friction)

Case 3.

図5 摩擦の影響

(4) (3)と似ているが、ベルトを平板に固定するのではなく、2本のベルトの背面を互いに合わせ、一歯残したプーリ(2個)と噛み合わせ、このプーリが回転しないように固定させた後、ベルトを引張る⁽⁴⁾(図4(d))。以上のような実験によりベルト歯剛性を測定する場合にはベルト/プーリ間に摩擦^{注1)}が作用する。そこで本研究ではベルト/プーリ間の摩擦がベルト歯の歯剛性に及ぼす影響について調べた。ベルト歯の変形に及ぼす摩擦の影響を図5に示す三つの場合に分けて考えた。Case 1ではベルト/プーリ間に摩擦がない。Case 2ではベルト歯部側面とプーリ歯側面との間のみ摩擦が働く。Case 3では、全ての接触面で摩擦が働くものとした。台形歯型を有する歯付きベルトではベルト歯先はプーリ歯底と接触しないため、その間に摩擦は働かない。

図6に、荷重増分条件がCase Iの場合のベルト歯荷重 ΔT とたわみ λ の関係を示す。ベルト両端の初張力は $T_i = 500 \text{ N}$ である。プーリ歯数は24歯である。図より、Case 3では歯荷重20 N前後まで歯のたわみはほとんど増加しないことがわかる。特に歯荷重10 Nまでベルト

^{注1)}特にベルト歯側面とプーリ歯側面の間に働く摩擦。後述するようにベルト歯底とプーリ歯先の間には摩擦が働かないように工夫した実験が多い。

図6 歯荷重-たわみ曲線（摩擦の影響）

歯のたわみ量は 0 mm であり，ベルト歯はプーリ歯側面と接触しない．これはベルト両端に作用する張力の差 ($T_R - T_L \approx \Delta T$) が小さく，ベルト歯底とプーリ歯先の摩擦によりベルトが拘束されているため，ベルト歯が初期位置から十分に変位しないからである．一旦ベルトの変形が生じると歯荷重 ΔT とたわみ λ の関係は概ね線形である．一方，歯荷重 20 N 以上で同じ歯荷重に対して Case 2 のベルト歯のたわみは Case 3 の時よりも大きい．これは，Case 3 では摩擦力に打ち勝ってベルト歯底とプーリ歯先が一旦滑っても，ベルト歯底とプーリ歯先の間の摩擦力によりベルト歯の側面に直接作用する歯荷重が小さくなるためである．歯付きベルトの荷重分担を求めるこれまでの理論式では，ベルト歯底とプーリ歯先との間に作用する摩擦は考慮されている．また，実験に当たっても両者が互いに強く接触することがないように工夫されているため，Case 3 の条件で得られた歯荷重-たわみ関係から歯剛性を求めることは必ずしも適切ではないと言える．

Case 1 と Case 2 では両者はほぼ同じ変形特性を示すことがわかる．ベルト歯部側面とプーリ歯側面の間に働く摩擦は歯剛性にほとんど影響しない．いずれの場合も，歯荷重-たわみ曲線はわずかに下に凸の様相を示すが，両者の関係はほぼ線形と見なすこともできる．歯付きベルトの荷重分担を考えると，実際には両者の間に摩擦力が働くため，以下では Case 2 により解析を行なった．

3. 2 ベルト張力の歯剛性に及ぼす影響 ベルト歯の両端に作用するベルト（平均）張力が大きくなればベルト歯はプーリ歯溝に強く押される．その結果，同じベルト歯荷重に対してベルト歯の変形もベルト張力が小さい場合と比べ異なることが予想される．そこで，ベルト張力の歯剛性に及ぼす影響を調べるため，初張力 T_i を変化させ，歯荷重とベルト歯の変形との関係を求めた．プーリ歯数は 24 歯とした．

初張力が $T_i = 500\text{N}$ ， 600N ， 700N の場合の解析結果を図 7 に示す．図より，初張力によらず歯荷重-たわみ関

係は一本の非常に緩やかな S 字曲線となることがわかる．歯荷重 20 N から 60 N の間では曲線の傾きがわずかに増加している．計算ではベルト構成素材の材料非線形性は考えていない．このことより歯荷重-たわみ関係における非線形性はベルト歯の大変形の影響と考えられる．一方，Childs らも丸形歯型ベルトの歯剛性について有限要素法解析を行い，初張力，すなわち半径方向力の増加に伴いベルト歯剛性がわずかに増加し，荷重の広い範囲では歯荷重-たわみ関係が線形性を示さないことを明らかにしている⁽⁴⁾．彼らはこの非線形性発現の理由として，丸形歯型ベルトの場合，ベルトとプーリが噛み

図7 歯荷重-たわみ曲線（初張力の影響）

合う時にベルト歯先がプーリ歯底と接触し，ベルト歯に圧縮硬化が生じるためであるとしている．彼らはゴムの構成関係に Mooney-Rivlin 式を用いており，材料非線形が上述の非線形性発現の理由の第一に挙げている．しかし，歯型が異なるものの我々の材料非線形を考慮しない解析結果でも Childs らと同様なたわみ-歯荷重関係における非線形性が認められたことから，上述の非線形性はベルト歯の大変形から由来すると考えるほうが妥当であると思われる．しかし，荷重分担解析の観点から，初張力が 500 N 以上の張力範囲でベルト歯部を線形バネで置き換えることに問題はない．

本節ではベルト張力が高い場合を検討した．しかし，ベルト張力がジャンピング限界付近の低い場合にはベルト張力の見かけの歯剛性に及ぼす影響が顕著に認められる．その詳細については後述する．

3. 3 歯剛性に及ぼすベルト張力の増減の影響 ベルト歯に荷重が作用する場合には，ベルト歯両端に作用するベルト張力が減少しながら，あるいは増加しながら荷重が作用する二つの場合がある．この二つの負荷形態の違いがベルト歯の剛性に及ぼす影響を調べるため，初張力 500 N のもとで Case I，Case II の解析をそれぞれ行力が大きい場合，ベルト歯のたわみ量とベルト歯荷重の関係は荷重増分条件 ($\Delta T > 0$ と $\Delta T < 0$) にほとんど

図8 歯荷重—たわみ曲線（ベルト張力の増減の影響）

ど影響されないことがわかる。しかし、張力が小さい場合は、次に述べるように荷重増分条件の違いにより、見かけの歯剛性が異なることがある。

Case I, Case IIの解析結果を図9に示す。 Q_0 は30 Nである。この場合、歯荷重—たわみ曲線は直線と見なすことは難しく、場合によっては上に凸、または下に凸となることがある。そこで、割線剛性をもって見かけの歯剛性とした。図より歯剛性が大きく変化する初張力が100 N～160 Nの範囲ではCase Iの方がCase IIに比べて明らかに高い値を示した。また、剛性がほとんど変化しなくなる範囲ではCase I, Case IIの剛性にはほとんど差がない。ここで、歯剛性が一定となる場合の半径方向力の大きさに注目するとCase Iでは40.4 N、Case IIの場合は43.0 Nであり、ほぼ同じ値である。従って、ベルトに十分な半径方向力が作用し、理想的な噛み合い状態にある場合にはベルト歯剛性は一定となり、ベルト歯荷重—たわみの関係は線形性を示すと考えられる。

図9 歯剛性—初張力曲線（Case I, Case II）

3. 4 プーリ歯数（径）のベルト歯剛性に及ぼす影響 プーリ径の大きさが変わるとベルト歯に作用する半径

方向力の大きさが変わり、ベルト歯の見かけの剛性が変化することが考えられる。そこで、プーリ径がベルト歯剛性に及ぼす影響を調べるため、36歯のプーリを用いて解析を行なった。 $Q_0=30$ N, 50 Nの場合について、初張力を100 Nから420 Nまで変化させて解析した。荷重の増分条件はCase Iである。 $Q_0=30$ N, 50 Nの条件ではともに初張力80 Nまでベルト歯がプーリ歯に乗り上げ、ジャンピングを起こし、ベルト歯のたわみ量を求めることはできなかった。解析できた範囲の結果を図10に示す。36歯プーリの場合、24歯プーリを用いた場合に比べてベルトに作用する半径方向力は小さくなる。従って、ベルト歯のジャンピング（ベルト歯がプーリに乗り上げる現象）が生じやすくなり、ベルト歯の見かけの歯剛性は低下すると予想された。しかし、図10では36歯プーリを用いたほうが24歯プーリの場合に比べて $Q_0=30$ Nでは約38%、 $Q_0=50$ Nでは約21%高い剛性を示している。そこで、歯側面の摩擦の影響を調べるため、Case 2により初張力 T_i を120 Nから280 Nまで変化さ

図10 歯剛性—初張力曲線

せ、 $Q_0=30$ N, 50 Nの場合について解析を行なった。解析結果を図11に示す。図よりCase IとCase IIの結果にはほとんど違いがなく、ベルト歯側面とプーリ歯側面の摩擦はベルト歯の剛性にほとんど影響しないことがわかる。本研究では、プーリ径を大きくしたときになぜこのような剛性の増加が生じるのかを明らかにすることはできなかった。

ベルト張力の低い範囲ではベルト歯をプーリに押さえ付ける半径方向力が弱いため、ジャンピングを起こしやすジャンピングを起こす直前の状態ではベルト歯とプーリ歯は理想的な状態で噛み合うことができず、その結果ベルト歯の見かけの剛性が変化することが考えられる。図10の初張力が低い範囲でベルト歯の剛性が増加したのはこのためであると推測される。

図から、 $Q_0=30$ Nの場合、プーリ歯数が24では初張力が100 Nから140 Nにかけて歯剛性が増加し、それ以

図 11 歯剛性－初張力曲線（摩擦の影響）

降はほぼ一定になることがわかる。プーリ歯数が36では初張力が120 Nから200 Nにかけて歯剛性が増加し、それ以降はほぼ一定になる。同様に $Q_0 = 50$ N の場合でも、ある初張力範囲で歯剛性が急激に増加し、プーリ歯数が24では200 N、プーリ歯数が36では300 Nを過ぎたところではほぼ一定となる。歯荷重50 N、初張力100 Nのときのベルト歯の変形状態を図12に示す。図より、この条件では、ベルト歯底部がプーリ歯先部から完全に離れて浮き上がり、ベルト歯はジャンピングを起こす直前の状態にあることがわかる。張力の値が低い範囲で剛性が変化したのはこのベルト歯の乗り上げによると考えられる。すなわち、ベルト歯がプーリに乗り上げ、ベルト歯の先端に荷重が作用し、同じ歯荷重でも歯のたわみ量が大きくなり、見かけの歯剛性が減少したためである。

図 12 ベルト歯の変形状態

前述のように、初張力が500 N以上ではどの歯荷重に対してもベルト歯荷重－たわみの関係はほぼ線形である。従って、歯剛性はほぼ一定であるが、ベルト歯のジャンピングの恐れのある初張力100 N～300 Nの範囲では必ずしも歯剛性は一定ではないことが明かとなった。

4. 結言

歯付きベルトの見かけの歯剛性をベルト歯の大変形（幾何学的非線形）およびベルト／プーリ間の摩擦が考慮できる有限要素法により解析した結果、以下の結論を得た。

- （1）ベルト歯／プーリ歯側面の間に作用する摩擦は見かけのベルト歯剛性にほとんど影響しない。
- （2）プーリ歯先とベルト歯底の間に作用する摩擦は歯剛性に影響する。
- （3）大きなベルト張力が作用している場合、ベルト歯荷重－ベルト歯たわみ関係はほぼ直線である。
- （4）ベルト張力が小さい場合、ベルト歯荷重が増加する場合と減少する場合とで見かけの歯剛性が異なる。張力が大きい場合、歯剛性に違いはほとんどない。
- （5）ベルトに十分な張力が作用していない場合には、ベルト歯がプーリ歯に乗り上がる。その結果、ベルトのプーリピッチ円上で変位が増し、見かけの歯剛性は低下する。
- （6）プーリ径が大きくなるとベルト歯の剛性は高くなる。

参考文献

- （1）網島，藤井，タイミングベルトの荷重分担について，日本機械学会論文集，42-359（1976）2233
- （2）G.Grerbert, H.Jonsson, U.Persson, G .Stensson, Load Distribution in Timing Belts, ASME Journal of Mechanical Design, 100（2）（1978）208-13
- （3）小山，村上，仲井，籠谷，保城，歯付きベルトの強度に関する研究（第1報，ベルト歯の荷重分担について），日本機械学会論文集，44-377（1978）312
- （4）K.W.Dalgarno, A.J.Day, T.H.Childs, I.K.Parker & A.Coutsoucos, Automotive camshaft timing belt materials and belt life appraisal, Plastics,Rubber and Composites Processing and Applications, Vol.16, No.3, 1991
- （5）社団法人 自動車技術会，自動車用歯付きベルトの形状寸法，自動車規格，JASO E 105 - 87