モード減衰比の推定精度に関する研究*

渡 辺 誠^{*1}, 岡 野 道 治^{*1}

Errors in Estimating Modal Damping Ratio

Makoto WATANABE and Michiharu OKANO

The purpose of this paper is to investigate the effect of measurement errors on the modal damping ratio. Errors in estimating modal damping ratio are derived for various curve-fitting methods. For the iterative method, errors in estimating modal damping ratio are induced by bias errors in the frequency response function. Thus some analytical relations are derived between bias errors and the vibrating system's time constant. Moreover, we also discuss the effect of pre-trigger to capture time-sequence data. The relations between bias errors and errors in modal damping ratio are investigated by numerical experiments and vibrating tests. Next, for Prony's method, measurement errors are sensitive to the relation between sampling rate and modal frequency. Analytical relations are established between data capture conditions and measurement errors in modal damping ratio.

Key Words: Vibration, Damping Ratio, Modal Analysis, Curve Fitting, Vibration Test

1. 緒 言

著者らは、機械構造物のもつ減衰特性について検討を加えてきた⁽¹⁾。本研究は現在広く使用されているカーブフィッティング手法の中から、周波数領域多自由度法の代表として偏分反復法、時間領域多自由度法の代表としてプロニーの方法を選択し、モード減衰比の推定精度に検討を加えたものである。また、周波数領域法においては、時間波形採集の際のプリトリガが減衰比の推定精度に大きく影響することを示し、これを理論的、実験的に明らかにした。

2. 偏分反復法における推定誤差

偏分反復法においては、曲線適合を行う理論式の選択が適当で、実験によって得られた周波数応答関数に誤差が含まれていなければ、推定によって発生する誤差は非常に小さく十分無視できる程度であると考えられる⁽²⁾⁽³⁾。そこで、本研究では周波数応答関数に含まれる誤差を理論的に検討し、その誤差と偏分反復法によって推定されるモード減衰比の誤差の関係を実験によ

り明らかにする。

2・1 周波数応答関数に含まれる誤差 周波数応答関数に含まれる誤差は、実験時に混入するノイズ等の不規則誤差と、偏り誤差といわれる系統誤差に大別される⁽³⁾。不規則誤差はアベレーシング処理によって低減することが可能であるので、ここでは系統誤差である偏り誤差について検討を加える。

偏り誤差は時系列波形の打切りによって発生する誤差である。Evensen らの理論的研究によれば打切りによる偏り誤差は次の式で与えられるということが示されている⁽⁴⁾⁽⁵⁾。

$$\begin{aligned}\varepsilon(T, T_1, \sigma, \rho) &= - \int_{T-T_1}^T \frac{\exp(-\sigma t) \exp(-j\rho t)}{T_1} dt \\ &= \left[\frac{\exp(-\sigma t) \exp(-j\rho t)}{(\sigma + j\rho) T_1} \right]_{T-T_1}^T \\ &= \frac{\exp(-\sigma T)}{\sigma^2 T_1^2 + \rho^2 T_1^2} \{ \sigma T_1 (\cos \rho T \\ &\quad - \exp(\sigma T_1) \cos(\rho(T - T_1))) \\ &\quad + \rho T_1 (-\sin \rho T + \exp(\sigma T_1) \sin(\rho(T - T_1))) \\ &\quad + j[\sigma T_1 (-\sin \rho T + \exp(\sigma T_1) \sin(\rho(T - T_1))) \\ &\quad - \rho T_1 (\cos \rho T - \exp(\sigma T_1) \cos(\rho(T - T_1)))] \} \\ &\quad \dots\dots\dots (1)\end{aligned}$$

ただし、

* 原稿受付 平成6年2月21日。

*¹ 正員、日本大学理工学部 (〒101 東京都千代田区神田駿河台 1 8 14)。

T : 時系列波形採集時間

T_1 : 励振時間

σ : 減衰振動の時定数の逆数

ρ : 減衰固有角振動数と角振動数の差

したがって、偏り誤差を含む周波数応答関数は式(2)のように表される。

$$G(\omega) = \frac{b}{\sigma + j(\omega - \omega_d)} [1 + \varepsilon(T, T_1, \sigma, \rho)] \quad \dots\dots\dots (2)$$

ただし、

ω_d : 減衰固有角振動数

b : 振幅

ここで、式中の T は、励振が始まってからデータの取込みを止めるまでの時間長を表し、プリトリガをかけた場合、 T は時間窓長 T_w より短くなる。

式(1)より偏り誤差の大きさの ρT_1 に対する変化を時定数の逆数 σ をパラメータに計算したものを図1に示す。偏り誤差は図1のように、常に $\rho T_1 = 0$ 、すなわち系の減衰固有角振動数において最大になる。さらに、系の時定数が大きいほど誤差が大きくなるということもわかる。Evensen らは誤差5%以内の精度で周波数応答関数を測定するためには励振が終わった後の時系列波形の採集時間 $(T - T_1)$ を系の時定数の3倍以上、コヒーレンス関数を測定するためには時定数の7倍以上採らなければならないという指標を示している⁽⁴⁾。

図1 偏り誤差

図2 偏り誤差を含む周波数応答関数

次に、式(2)により偏り誤差を含む周波数応答関数の形状を計算した一例を図2に示す。励振時間 T_1 はインパクト加振を想定して $T/1000[s]$ とした。時定数に対してデータ取込み時間 T が短くなると、図2のように周波数応答関数にうねりを生じ、共振峰の形状がくずれてくる。

今度は離散的に周波数応答関数を求める場合について考える。周波数応答関数に生じるうねりは、式(2)の中の ε すなわち偏り誤差によるもので、周波数軸上のうねりの周期は式(1)から明らかなように、ほぼ $1/T$ になる。式(2)から計算した偏り誤差を含む周波数応答関数を再度、図3の実線に示す。さらに、図3中の一点鎖線は偏り誤差を含まない場合である。ここで、離散的に求められた偏り誤差を含む周波数応答関数を考えると、それは図3の実線上に等間隔に採られた点であるということになる。FFT 演算を行う時間窓長を T_w とすると間隔は $1/T_w$ になる。 $T_w = T$ すなわち、プリトリガをかけない場合は周波数応答関数のうねりの周期 $1/T$ と周波数間隔が等しくなるため離散的に求められた周波数応答関数にはうねりが現れない(図3の●)。次に、プリトリガをかけた場合は T と T_w が一致しなくなるため、周波数応答関数のうねりの周期と周波数間隔が異なり、離散的に求められた周波数応答関数に周期 $1/(T_w - T)$ のうねりを生じる。図3の▲は T を一定に T_w を $T/8$ 延長した場合の周波数応答関数である。ここで、●と▲の並びを比較すると両者とも系の時定数に対して T の長さは同じであるため、発生している偏り誤差も同じである。しかし、●の並びにはうねりが現れず、共振峰の形状も偏り誤差のない場合とほぼ相似形になっており、▲の並びにはうねりが生じ、共振峰の形状もひずんでいるということがわかる。この原因は計算された周波数間隔が異なるためである。2・3・1項でこのような原因による周波数応答関数の誤差とモード減衰比の推定誤差の関係を数値実験によって明らかにする。また、図3では偏り

図3 離散的に求められた周波数応答関数

誤差の影響を一定にするため、 T を一定にして T_w を変化させたときの周波数応答関数の変化を示したが、実際の測定においては通常、 T_w 一定でプリトリガによって T が短くなる。このような場合においてもプリトリガをかけることによって共振峰の形状がひずむことは図3の場合とまったく同様である。

2.2 データ採集条件と周波数応答関数の精度

2.1 節で示したとおり、測定する系の時定数に対し時系列波形の採集データ長を長くすることによって偏り誤差の少ない周波数応答関数を測定することができる。一方、FFT 演算の性質上、採集データ長と演算点数、解析できる最高周波数の間には一定の関係が成り立つ。この二つの条件から、精度よく周波数応答関数を測定するための、時系列データの取込み条件と系のもつモード減衰比の関係が得られる。

周波数応答関数の誤差を5%以下にするには2.1 節で述べたように、データ取り込み長 T を系の時定数の3倍以上取る必要がある。すなわち、

$$T \geq \frac{3}{\zeta \omega_d} \dots \dots \dots (3)$$

ζ : モード減衰比 ($\zeta \omega_d = 1/\sigma$)

という条件が成り立つ。一方、FFT 演算の性質上、データ長 T 、演算点数 N 、解析できる最高周波数 $f_{\max}$ の間には次の関係が成り立つ。

$$T = \frac{N}{2.56 f_{\max}} \dots \dots \dots (4)$$

ただし、 $f_{\max}$ は多くのFFTアナライザで設定されているように、サンプリング周波数 N/T の $1/2.56$ とした。式(3)、(4)より T を消去して次式を得る。

$$\zeta \geq \frac{1.22}{N} \frac{f_{\max}}{f_d} \dots \dots \dots (5)$$

ただし、

$$\omega_d = 2\pi f_d$$

一例として、解析対象モードのモード周波数が $f_{\max}$ に等しく、演算点数が1024点とすると、このモードは 1.19×10^{-3} 以上の減衰比をもっていなければ正確な周波数応答関数は求められないということになる。逆に、ある一定の ζ と N に対しては $f_{\max}/f_d = 1$ のとき、周波数応答関数の精度が最もよくなる。

2.3 偏り誤差と減衰比推定誤差の関係 周波数

表1 数値実験条件

Cond.	σ [1/sec]	T [sec]	Pre-Trig. [sec]	T_1 [sec]	T_w [sec]	Δf [Hz]
A	1.26	$0.2/\sigma \sim 3/\sigma$	$T/8$	$T/1000$	$(9T)/8$	$8/(9T)$
B	0.126	$0.2/\sigma \sim 3/\sigma$	$T/8$	$T/1000$	$(9T)/8$	$8/(9T)$
C	0.126	$0.2/\sigma \sim 3/\sigma$	0	$T/1000$	T	$1/T$

応答関数に含まれる偏り誤差と、偏分反復法によるモード減衰比推定誤差との関係を解析的に求めることは非常に困難なため、本節では数値実験と実際の加振実験によってその関係を明らかにする。

2.3.1 数値実験 表1に示す条件で式(2)により周波数応答関数を計算し、そのデータに偏分反復法を適用してモード減衰比の推定誤差を求める。励振が始まってから時系列波形の採集を終わるまでの時間 T を系の時定数の0.2~3倍に可変し、プリトリガをかけた場合と、かけない場合について数値実験を行った。プリトリガをかけた場合については、偏り誤差の影響を同じにするため図3と同様に、 T を一定に T_w を変化させた場合について数値実験を行った。

数値実験によって得られた、 $T\sigma$ とモード減衰比推定誤差の関係を図4に示す。まず、条件BとCを比較すると、両者に生じている偏り誤差はまったく同じであるが、Bは精度が悪く、 $T\sigma$ の値によって大きく変化する。Cは非常に精度がよく $T\sigma$ の値にほとんど左右されない。これは図3で示したように同じだけ偏り誤差が発生していても、条件Cでは離散的に求められた周波数応答関数が誤差のない場合の共振峰とほぼ相似形になり、条件Bでは周波数応答関数にうねりを生じ、共振峰の形状が崩れているためであると考えられる。次に、条件AとBを比較すると、両者の誤差は $T\sigma$ の値に対してほぼ同じ値をとっているということがわかる。これは偏り誤差によるモード減衰比推定誤差はおもに、データ採集時間 T と系の時定数 $1/\sigma$ の比に依存するというを示している。

ここでは偏り誤差の影響を一定にするため T を一定に、 T_w を変化させた場合について数値実験の結果を示したが、 T が $1/8$ 程度変化しても偏り誤差に大きな変化はないため、 T_w を一定に T を変化させた場合についてもほぼ同様な結果が得られる。

2.3.2 加振実験 本項では実際の加振実験によ

図4 減衰比推定誤差と時間窓長の関係

り得られた周波数応答関数に偏分反復法を適用して、偏り誤差とモード減衰比の関係を明らかにする。加振実験は試験片の2点をナイロンひもでつるしインパクト加振によって行った。試験片として $500 \times 1000 \times 10$ [mm] のアルミニウム単板を使用した。

まず、プリトリガによる周波数応答関数の変化の一例を図5に示す。図5の実線は時間窓長の1/8に相当する128点(0.01[s])のプリトリガをかけたもので、周波数応答関数に大きなうねりを生じている。また、このうねりの周期は理論的に予想されたとおり0.01[s]の逆数に相当する約100 [Hz] になっていることがわかる。これに対して図5の破線に示す周波数応答関数はプリトリガをかけていないためうねりがまったくみられない。

次に、偏り誤差とモード減衰比の推定精度の関係を調べる。まず、加振実験の入出力の時系列データをサンプリング間隔 7.8125×10^{-5} [s] で 2^{14} 点採集する。この時系列データの初めの $2^{10} \sim 2^{14}$ 点を採用してFFT演算を行い周波数応答関数を求め、このデータに偏分反復法を適用し、モード減衰比を推定する。データの採集長と推定されたモード減衰比の関係を図6に示す。図6中の○はプリトリガを掛けずにFFT演算を施して得られた周波数応答関数から推定された第1モードの減衰比で、線分は最大値と最小値を表している。△は同じく第5モードの推定値である。これに対して、●は0.01[s]のプリトリガを掛けて得られた周波数応答関数から推定した第1モードの減衰比である。●は時間窓長に対して大きく変化しており、周波数応答関数に含まれる偏り誤差がモード減衰比の推定値に大きな影響を与えているということがわかる。また、この場合には周波数応答関数の形状が大きく崩れるため、減衰比の推定値が正常な値に収束しないことも数多くみられた。次に○では、●よりはるかに小さ

いものの、時間窓長に対して減衰比の推定値に変化がみられる。また、時間窓長の短い領域では推定値のばらつきが特に大きくなっているということがわかる。次に△より、第1モードより時定数が小さい第5モードにおいては時間窓長に対する推定値の変化も、ばらつきも非常に小さいということがわかる。これは時間窓長に対してモードの時定数が小さく、偏り誤差が減少したためであると考えられる。

2.4 コヒーレンス関数とウィンドウ処理について

コヒーレンス関数は実験データの信頼性を確認する上で非常に重要なものである。2.3.2項で述べた加振実験におけるコヒーレンス関数の一例を図7に示す。なお、いずれのデータも8回の平均化処理を行い、入力波形にはフォースウィンドウをかけている。図7をみると共振峰と反共振ディップ以外の周波数においてはコヒーレンス関数は0.95以上の高い値を示している。これは平均化によって不規則誤差は十分に取除かれているということを表している。これに対して、共振峰と反共振ディップにおいてはコヒーレンス関数の値が大きく落ち込んでおり、偏り誤差が発生していることがわかる。さらに、実線と破線を比較すると時間窓の長さが16倍になってもその値には大きな変化がないということがわかる。すなわち、コヒーレンス関

図6 時間窓長に対する減衰比推定値の変化

図5 プリトリガによる周波数応答関数の変化

図7 時間窓長に対するコヒーレンス関数の変化

図 8 EXP ウィンドウによるコヒーレンス関数の変化

数は時間窓の長さの変化に対して非常に感度が低く、時間窓長を長くしても値を改善することが難しいということがわかる。

次に出力波形に $W(t)=\exp(-\alpha t)$ で表されるエクスポネンシャルウィンドウをかけ、見掛け上の時定数を小さくすることを考える。出力の時系列波形に種々の強さのエクスポネンシャルウィンドウをかけたときのコヒーレンス関数の変化を図 8 に示す。図 8 をみるとウィンドウ処理によって見掛け上の時定数を小さくするほどコヒーレンス関数の値が改善されているということがわかる。ただし、図 8 で採用した $\alpha=115[1/s]$ のウィンドウでは時間窓の終端部において時系列データの値に約 10^{-8} がかけられることになる。これは一般に使用されているウィンドウより極端に強いものである。

2.5 偏分反復法まとめ

2.5.1 プリトリガの影響について 2.3 節の数値実験において、プリトリガをかけずに周波数応答関数を求めれば偏り誤差が発生していてもモード減衰比にはほとんど誤差が現れないという結果が得られた。もし、時系列データに打ち切りがなければプリトリガは減衰比の推定精度にまったく影響しないが、打ち切りが行われた場合には、プリトリガをかけないほうが推定精度がよくなる。さらに、加振実験においてもプリトリガをかけるとモード減衰比に大きな推定誤差が発生するということが明らかになった。一方、プリトリガをかけない場合にも測定の時間窓長によって減衰比の推定値は変化を示す。このように、プリトリガをかけた場合より、はるかに小さいながらも、モード減衰比に誤差が発生する原因として、実験データに含まれるノイズや、実際の構造物と理論モデルの食い違いが考えられる。

以上のように、モード減衰比の推定にはプリトリガをかけないほうが有利であるが、その他のモーダルパ

ラメータを推定するには問題があると考えられる。プリトリガをかけなければ、トリガレベルの設定により、加振入力全体を正しくとらえることが難しく、入出力の振幅比を正確に評価できないなどの問題が起こる。

2.5.2 ウィンドウ処理について エクスポネンシャルウィンドウをかけることによって、時系列波形の見掛け上の時定数を小さくすることができるため、偏り誤差を減少させることができる。しかし、モード減衰比の推定精度を改善することは困難である。すなわち、ウィンドウ処理によって見掛け上の減衰を大きくして減衰比を推定したときは、その後ウィンドウによって付加された減衰を差引いて真の減衰比を求める。

一例として今回の加振実験のデータでは第 1 モードの減衰比は約 5×10^{-4} である。一方、図 8 に示したように、このデータにおいて十分にコヒーレンス関数を改善するためには $\alpha=460[1/s]$ 程度のウィンドウをかけなければならない。このウィンドウは第 1 モードに対して約 3.66×10^{-1} の減衰を付加する。よって、このとき得られる見掛け上の減衰比の大きさは 3.665×10^{-1} になる。ここで、減衰比の推定精度を改善するためにはこの値の 4 けため以降の値が誤差なく求まっていなければならない。これは、実際の偏分反復法の計算においては非常に困難であると考えられる。

このように、実際の減衰に対して付加する減衰が非常に大きいと精度の改善は困難で、減衰の付加分を差し引くと減衰比が負になってしまうこともあり、減衰の付加分が小さいと偏り誤差が十分に改善されない。したがって、ウィンドウ処理によってモード減衰比の推定精度の問題が根本的に解決することはない。

2.5.3 コヒーレンス関数について コヒーレンス関数の値については、時定数の大きな系において、十分 1 に近い値を取ることは非常に困難である。共振峰におけるコヒーレンス関数の値を 0.95 以上にするために 2.1 節で述べたように時定数の 7 倍の T を取ろうとすると、2.4 節の加振実験における第 1 モードに対しては、実に 11 秒という長大な時系列波形を採らなければならないことになる。このようなデータを高い SN 比で取ることは測定器のもつダイナミックレンジを考えると実現が非常に難しいと考えられる。

ところが、図 6 をみると、プリトリガをかけない場合においてはモード減衰比の推定値は、コヒーレンス関数の値の低下が起こっている T においても収束傾向にあることがわかる。これは、偏り誤差によってコヒーレンス関数が低下している領域においても実用上

十分な精度でモード減衰比が推定できるということを示している。このことから、コヒーレンス関数はモード減衰比の推定精度の有効な指標にはならないということがいえる。また、減衰比の推定精度の確認にはコヒーレンス関数の値をみるよりも、 T に対する減衰比推定値の変化を調べるほうが実用的であると考えられる。

3. プロニーの方法における推定誤差

本章では時間領域データからモデルパラメータを推定する手法の一つとしてプロニーの方法における推定誤差について検討を加える。プロニーの方法は時系列データに適用するものであり、正確な単位衝撃応答が得られていれば推定誤差はデータ長に依存しない。

3.1 プロニーの方法 本節では、プロニーの方法によるモデルパラメータの推定手順について述べる。

まず、離散的に取込まれた単位衝撃応答の時系列波形を $h(t)$ とおく。 $h(t)$ より次の値を計算する。

$$R_{ik} = R_{ki} = \sum_{l=0}^{m-1} h(t_{l+i})h(t_{l+k}) \quad \dots\dots\dots (6)$$

ただし、 m は時系列データを採用する組数である。すなわち、推定を行うモード数を n とすると、 $2n+m$ 個の時系列データがあれば計算を行うことができる。ここで、 m の値が十分大きいとき式(6)の値は $|i-k|$ の値のみの関数になる。たとえば、 $|i-k|=2$ のとき、

$$R_{13} = R_{24} = R_{31} = R_{42} = R(2) \quad \dots\dots\dots (7)$$

と、書くことにする。ここで、式(8)のような連立一次方程式を考える。

$$\begin{bmatrix} R(0) & R(1) & \cdots & R(2n-1) \\ R(1) & R(0) & & \cdot \\ \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ R(2n-1) & \cdots & \cdots & R(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ b_{(2n-1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -R(2n) \\ -R(2n-1) \\ \cdot \\ \cdot \\ -R(1) \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (8)$$

上式の解 $b_0 \sim b_{2n-1}$ を係数とする式(9)のような代数方程式を考える。

$$\sum_{i=0}^{2n} b_i X^i = 0 \quad \dots\dots\dots (9)$$

ただし、

$$b_{2n} = 1$$

式(9)は n 組の共役複素根をもつ、 r 番めの根を

$$X_r = X_{Rr} + jX_{Ir} \quad \dots\dots\dots (10)$$

とおくと、 r 番めのモードのモード減衰比 ζ_r と ω_r は

$$\omega_r = \frac{1}{\Delta t} \tan^{-1} \left(\frac{X_{Ir}}{X_{Rr}} \right) \quad \dots\dots\dots (11)$$

$$\zeta_r = \frac{-\ln \sqrt{X_{Rr}^2 + X_{Ir}^2}}{\omega_r \Delta t} \quad \dots\dots\dots (12)$$

として求められる。

3.2 誤差の理論的検討

3.2.1 マトリックスの特異性による誤差 本項では時系列データの取込み条件とモード減衰比推定時に発生する計算誤差について理論的に検討する。3.1節に示した計算過程において、時系列データの取り込み条件が悪いと式(8)の左辺の係数マトリックスが特異に近くなり計算精度が低下する。

ここでは1自由度系の場合についてデータの取込み条件と計算精度の関係を明らかにする。まず、1自由度系の減衰振動波形を次のようにおく。

$$h(t) = \exp(-\sigma t) \sin(\omega_d t) \quad \dots\dots\dots (13)$$

1自由度系の場合、式(8)は次のようになる。

$$\begin{bmatrix} R(0) & R(1) \\ R(1) & R(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -R(2) \\ -R(1) \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (14)$$

ここで、式(14)中の $R(0)$ を連続時間系で書くと次式のようにになる。

$$R(0) = \int_0^T h(t)^2 dt = \int_0^T \exp(-2\sigma t) \sin^2(\omega_d t) dt \quad \dots\dots\dots (15)$$

ただし、

T : 採集データ長

同様に $R(1)$ は、

$$R(1) = \int_0^T h(t)h(t+\Delta t) dt = \int_0^T \exp(-\sigma t) \sin(\omega_d t) \exp(-\sigma(t+\Delta t)) \sin(\omega_d(t+\Delta t)) dt \quad \dots\dots\dots (16)$$

ただし、

Δt : サンプリング間隔

と表される。式(14)の行列式の値 D は

$$\begin{aligned}
D &= R(0)^2 - R(1)^2 \\
&= \frac{1}{4} \left[-\frac{\exp(-2\sigma T)}{\sigma} + \frac{1}{\sigma} - \frac{\exp(-2\sigma T)\{-\sigma \cos(2\omega_d T) + \omega_d \sin(2\omega_d T)\} + \sigma}{\sigma^2 + \omega_d^2} \right]^2 \\
&\quad - \frac{1}{4} \exp(-\sigma \Delta t) \left[-\frac{\exp(-2\sigma T) \cos(\omega_d \Delta t)}{\sigma} - \frac{\cos(\omega_d \Delta t)}{\sigma} \right. \\
&\quad \left. - \frac{\exp(-2\sigma T)\{-\cos(2\omega_d T) + \omega_d \sin(2\omega_d T)\} + \sigma}{\sigma^2 + \omega_d^2} \right. \\
&\quad \left. - \frac{\exp(-2\sigma T)\{-\sigma \cos(\omega_d(2T + \Delta T)) + \omega_d \sin(\omega_d(2T + \Delta T))\}}{\sigma^2 + \omega_d^2} \right. \\
&\quad \left. + \frac{-\sigma \cos(\omega_d \Delta T) + \omega_d \sin(\omega_d \Delta T)}{\sigma^2 + \omega_d^2} \right]^2 \dots\dots\dots (17)
\end{aligned}$$

となる。ここで、式(17)最右辺の二つの $[\cdot]$ 内の第3項以降はそれぞれの $[\cdot]$ 内の第1, 2項に比べ十分小さいためこれを省略すると

$$\begin{aligned}
D &\doteq \frac{1}{4\sigma^2} (1 - \exp(-2\sigma T))^2 \\
&\quad \times \{1 - \exp(-2\sigma \Delta t) \cos^2(\omega_d \Delta t)\} \dots\dots\dots (18)
\end{aligned}$$

を得る。式(14)の係数マトリックスが特異に近いとき D の値が零に近づくため計算値にけた落ちが生じ計算精度が悪くなる。けた落ちの数 e は次の式のように書くことができる。

$$\begin{aligned}
e &= -\log_{10} \left(1 - \frac{R(1)^2}{R(0)^2} \right) \\
&= -\log_{10} (1 - \exp(-2\sigma \Delta t) \cos^2(\omega_d \Delta t)) \dots\dots\dots (19)
\end{aligned}$$

$\omega_d \Delta t$ と ζ に対する e の値を図9に示す。図9をみると、 ζ の値が大きいほうがけた落ちが起こりにくいということがわかる。また、減衰比が同じならば $\omega_d \Delta t = \pi/2$, すなわち、

$$f_d \Delta t = \frac{1}{4} \dots\dots\dots (20)$$

のときに最もけた落ちが起こりにくいということがわかる。

一方、2・2節で述べたように、時間窓長と採集点数、解析できる最高周波数の間には式(4)の関係がある。

図9 $\omega_d \Delta t$ と ζ に対するけた落ちの数

ここで、サンプリング間隔 Δt は T/N と表されるから式(4)と(20)より

$$\frac{f_d}{f_{\max}} = \frac{2.56}{4} = 0.64 \dots\dots\dots (21)$$

の関係が成り立つときに最も推定誤差が起こりにくいということがわかる。これは、 $f_{\max} = f_d$ のときに最も精度がよくなる偏分反復法とは対照的な特徴である。

3・2・2 計算けた数による推定値の限界 精度よく係数 $b_0 \sim b_n$ を求め、式(9)の代数方程式を解いたとしても式(12)によって推定値に計算誤差が生じる。式(12)を変形して

$$\zeta \omega_d \Delta t = -\ln \sqrt{X_{kr}^2 + X_{lr}^2} \dots\dots\dots (22)$$

となる。ここで、式(22)の左辺の値が零に近づくと、右辺の $\ln$ の真数は小さいほうから1に近く、真数が1に近くなると式(23)に示すけた落ち e が生じる。

$$e = -\log_{10} (1 - \sqrt{X_{kr}^2 + X_{lr}^2}) \dots\dots\dots (23)$$

すなわち、系の時定数に対して Δt の値が小さいとモード減衰比の推定精度が悪くなる。

3・3 プロニーの方法のまとめ

3・3・1 数値実験による確認 3・2節までに理論的に導かれた推定誤差は数値実験によっても確認された。推定値の精度の悪化は3・2節で述べた二つのけた落ちの要因から予想されるものと非常によく一致した。その二つの要因を考え合わせると、減衰比 ζ の値は大きいほど推定精度はよくなる。また、 $\omega_d \Delta t$ の値は $\pi/2$ のとき、最も精度がよく、その値から離れた場合は値が大きいほうに離れた場合のほうが精度の悪化が少ない。

3・3・2 実験データに適用する場合の問題点 プロニーの方法は時系列データに適用するものであるが、実験により採集したデータを一度フーリエ変換した後、逆フーリエ変換を行って単位衝撃応答を得ることが一般的である。このような計算過程を経ることから、実際にはプロニーの方法においても打ち切りによる誤差が影響する。また、周波数領域から時間領域に戻す際に帯域制限を行う場合には、同一モードを取り出

しても、帯域幅のとり方により推定値が大きく変化するという問題が起こる。

4. 結 論

(1) データ採集条件に対するプロニーの方法のモード減衰比推定誤差を理論的に導き、以下の点を明らかにした。

(1-1) 減衰比 ζ は大きいほど推定による誤差は起こり難く、同一の ζ に対しては最高周波数の約1/2の位置にあるモードの減衰比が最も精度よく推定できる。

(2) データの採集条件と周波数応答関数の偏り誤差、偏分反復法によるモード減衰比の推定誤差の関係について検討を加え、以下の結論を得た。

(2-1) 減衰比の推定に限定すれば、プリトリガをかけずに周波数応答関数を求めた方が推定精度がよい。

(2-2) コヒーレンス関数は減衰比の推定精度の指標としては、あまり有効ではない。

(2-3) 減衰比 ζ が大きいほど推定による誤差は起こり難く、同一の ζ に対しては最高周波数に近い位置にあるモードほど減衰比の推定精度がよくなる。

文 献

- (1) 渡辺・岡野, 機論, 57-535, C (1991), 81.
- (2) Jung, H., On the Use of Simulated "Experimental" Data for Evaluation of Modal Analysis Methods, *Proc. IMAC10*, (1992), 421.
- (3) Lee, M., Determining the Accuracy of Modal Parameter Estimation Methods, *Proc. IMAC10*, (1992), 159.
- (4) Evensen, H. A., Bias Errors in Estimating Frequency Response and Coherence Function from Truncated Transient Signals, *J. Sound Vib.*, 145-1 (1991), 1.
- (5) Trethewey, M. W., Time-Delay Bias Errors in Estimating Frequency Response and Coherence Functions from Windowed Samples of Continuous and Transient Signals, *J. Sound Vib.*, 97-4 (1984), 531.