ダフィング族スナップスルースプリング系自由振動の 厳密解とその数値化プログラム* (第2報, 非対称片振りモード)

田村 英之*¹, 岡部 匡*¹, 松崎 健一郎*¹

Exact Solutions and Numeration Program for Free Oscillation in Duffing Snap-Through Spring System (2nd Report, Asymmetrical Half-Swing Mode)

Hideyuki TAMURA, Tadashi OKABE and Ken-ichiro MATSUZAKI

Exact solutions of the free vibration in a family of Duffing oscillators having hard, soft or snap-through springs with single-degree-of-freedom are solved in terms of the Jacobian elliptic functions. In our previous papers, the algorithms and programs for the precise numerical computation of the exact solution of the free vibration with hard, soft and snap-through (symmetrical full-swing mode) spring systems were successively proposed. As a continuation of the previous studies, we here deal with the snap-through spring system in the asymmetrical half-swing mode and discuss excellent algorithms/programs to calculate the exact solution. The FORTRAN program with the precision of REAL*16 is presented accompanied by the user's manual, which ensures a relative error of less than 10^{-30} . Numerical results of the dynamics of the present free oscillator are also discussed and demonstrated.

Key Words: Dynamics of Machinery, Nonlinear Vibration, Free Vibration, Duffing Equation, Snap-Through Spring, Exact Solution, Elliptic Function, Numeration, Computer Program

1. 緒 言

ダフィング族に属する対称ばねの1種である“飛び移りばね(スナップスルースプリング snap-through spring)”をもつ1自由度振動系;

$$d^2x/dt^2 + \alpha x + \gamma x^3 = 0, \quad \alpha < 0, \gamma > 0 \dots\dots\dots (1)$$

は, 古くから弾性座屈系, また近くは磁気力を伴う弾性(座屈)系のモデルとされ, カオスを発生するシステム⁽¹⁾としても注目されている。

式(1)は, ヤコビの“だ円関数”⁽²⁾により厳密に解かれる⁽³⁾が, その高精度数値化については, 現在, 特に計算機の特長との関連において, いまだ問題なしとはしない。(初期値問題としての)初期条件の違いから二様の解分枝が存在するので, それらを“対称両振りモード”, “非対称片振りモード”と呼び分ける。前者に関する第1報⁽⁴⁾の議論と同様に本稿では後者に関する高精度数値化のアルゴリズムを詳論し, そのプログラムを提示する。

二様のモードの違いは第1報⁽⁴⁾でも述べたとおり, 端的にいうと(本稿の)非対称モードが, ヤコビの“だ円関数” $\text{dn}\omega t$ により表現され, 対称モードのほうは

$\text{cn}\omega t$ により表現される点にある。物理的視点からすれば, 式(1)の3個の静止平衡点; x_-, x_0, x_+ , ただし

$$\left. \begin{aligned} \alpha x + \gamma x^3 = 0 \Rightarrow \quad & x_0 \equiv 0, \quad x_{\pm} \equiv \pm \sqrt{-\alpha/\gamma}, \\ x_- < x_0 < x_+, \quad & x_0 - x_- = x_+ - x_0 \end{aligned} \right\} \dots (2)$$

において, 中央の不安定平衡点(原点) x_0 を中心として対称的に3点を取囲んで発生するのが対称モードであり, 両脇の安定平衡点 x_- または x_+ を中心として x_0 を取込まない形の非対称振動が非対称モードである。 x_- まわりと x_+ まわりの各振動は, 点 x_0 に関して互に対称(鏡像)の関係にある。

既報⁽⁵⁾の総論でも述べたとおり, ダフィング族には α, γ などの符号の違いからする区別: ハード, ソフト, スナップスルー(対称/非対称各モード)の各スプリングが属するが, 本稿は, 前3報(ハード⁽⁵⁾, ソフト⁽⁶⁾, 対称モードのスナップスルー⁽⁴⁾各スプリング)と同様, ダフィング族振動系の自由振動の厳密解の総論⁽⁵⁾を受ける各論の一つとなっている。

2. 基 礎 式⁽⁵⁾

問題の基礎式は(正規化形で)次のとおりである。

$$d^2X/dT^2 - X + X^3 = 0, \quad \text{周期: } (T=)2\pi/\Omega \dots\dots\dots (3)$$

* 原稿受付 平成6年8月19日。

*¹ 正員, 九州大学工学部 (〒812 福岡市東区箱崎6-10-1)。

この周期解 $X(T)$ の一つは次のように仮定できる.

$$\begin{aligned} X(T) &= A \operatorname{dn} u(T) \\ &= \sqrt{2} \Omega \left(\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2q_0^n}{1+q_0^{2n}} \cos n\Omega T \right) \\ &= \sqrt{2} \Omega \left(\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\Omega T}{\cosh 2nQ} \right) \dots\dots\dots (4) \end{aligned}$$

$\operatorname{dn} u$ は、ヤコビの“だ円関数”の一つを表す。ここで $X(T)$ は常に正值であり、余弦フーリエ展開はすべての次数の調波振幅が非零正值である。最大値 $A(>0)$ の対となる最小値を $B(>0)$ とするとき、式(3)のエネルギー積分から容易に次の関係式を得る.

$$A^2 + B^2 = 2 \dots\dots\dots (5)$$

式(4)のフーリエ係数の中の q_0, Q は後述の定義による定数で、与えられた定数；(最大)振幅 A または(角)振動数 Ω の関数であり、また A, Ω のいずれか一方は他方の関数である。よって計算作業は、 A (または Ω) を与えて、 Ω (または A) ならびに q_0, Q いずれかを計算することになるが、途中の中継変数として、 $q_i, \mu_i, K_i (i=0 \cup 1)$ (下記) などを經由する。

本稿で処理すべき関係式やその意味付けの一般論は既報済み⁽⁵⁾ であり、式(3), (4)による議論の出発点となる基礎式は次の2式⁽⁵⁾ である.

$$\begin{aligned} A^2 &= 2/(2-\mu_0) = 2/(1+\mu_1) \\ &= (1 \sim 2 \leftrightarrow \mu_0 = 0 \sim 1 \leftrightarrow \mu_1 = 1 \sim 0) \dots\dots\dots (6) \\ \Omega^2 &= \frac{4}{(2-\mu_0)K_0^2} = \frac{1}{1+\mu_1} \left(\frac{4Q}{\pi K_1} \right)^2 \\ &= (2 \sim 0 \leftrightarrow \mu_0 = 0 \sim 1 \leftrightarrow \mu_1 = 1 \sim 0) \dots\dots\dots (7) \end{aligned}$$

ここで、定数： μ_0, μ_1, K_0, K_1 などは

$$\begin{aligned} \mu_0 &: \text{母数パラメータ,} \\ \mu_1 (=1-\mu_0) &: \text{補母数パラメータ} \} \dots\dots\dots (8) \\ K_0 &: \text{第1種完全だ円積分,} \\ K_1 (=2K_0Q/\pi) &: K_0 \text{のコンプリメンタリ} \} \dots\dots\dots (9) \end{aligned}$$

であり、 Q も含めて定義は下記する。式(5), (6)から導出される次の関係式は後に利用する.

$$\begin{aligned} A^2 - 1 &= 1 - B^2 = \mu_0/(2-\mu_0) \quad (=0 \sim 1), \\ 2 - A^2 &= B^2 = 2\mu_1/(1+\mu_1) \quad (=1 \sim 0), \\ (\leftrightarrow \mu_0 = 0 \sim 1 \leftrightarrow \mu_1 = 1 \sim 0) \} \dots\dots\dots (10) \end{aligned}$$

式(6), (7)から、陽な $(2-\mu_0)=(1+\mu_1)$ を消去すると

$$(K_0\Omega/2)^2 = (\pi K_1\Omega/4Q)^2 = A^2/2 = 1 - B^2/2 \dots\dots\dots (11)$$

さて、 $\mu_i, K_i (i=0, 1; \text{以後同様})$ などは、 $q_i (0 \leq q_i < 1)$ の関数として、以下のように定義される.

$$K_i = [1 + 2(q_i + q_i^4 + q_i^9 + \dots + q_i^{n \times n} + \dots)]^2$$

$$= 1 + 4P_i = H_i^2,$$

$$\text{ただし } H_i = 1 + 2p_i, \quad (i=0, 1) \dots\dots\dots (12)$$

ここに

$$\left. \begin{aligned} P_i &\equiv p_i(1+p_i) = O(q_i), \\ p_i &\equiv q_i + r_i = O(q_i), \\ r_i &\equiv \sum_{n \geq 2} q_i^{n \times n} = O(q_i^4), \\ b_i &\equiv \sum_{n \geq 1} q_i^{n(n+1)} = O(q_i^2) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (13)$$

さらに

$$\begin{aligned} \mu_i &= 16q_i(1+q_i^2+q_i^6+q_i^{12}+\dots+q_i^{n(n+1)}+\dots)/K_i^2 \\ &= 16q_i[(1+b_i)^2/K_i]^2 = O(16q_i) \dots\dots\dots (14) \end{aligned}$$

$$Q = (-1/2) \ln q_0 = (-\pi^2/2)/\ln q_1 \dots\dots\dots (15)$$

μ_i, q_i, Q など (≥ 0) の実用域は、およそ $\mu_i \leq 1/2, q_i \leq e^{-\pi} = 0.04321\dots, Q \leq \pi/2$ と見るのが妥当であり、以後は便宜的に $0 \leq \mu_0 \leq 1/2$ を準線形、 $0 \leq \mu_1 \leq 1/2$ を強非線形と場合分けする.

以上の5式：式(6), (7), (12), (14), (15)は、 $A (\cup B), \Omega, Q, K_i, \mu_i, q_i (i=0 \cup 1)$ なる6変数が連立しており、 A または Ω が与えられれば、その他の5変数は解かれるはずである。アルゴリズムの構成に際しては、誤差の増殖⁽⁷⁾ を極力抑えるよう、式の組合わせ/整理に注意する。その評価のために、別報⁽⁷⁾ と同様に次のような“(相対)誤差増幅率”を定義する.

$$\left. \begin{aligned} f(x, y) &= 0 : \text{与えられる関数,} \\ \ll y(x)/x \gg &\equiv |(dy/dx)(x/y)| \\ &= \lim_{\delta x \rightarrow 0} |(\delta y/y)/(\delta x/x)| \\ &: x \Rightarrow y(x) \text{ なる変換における相対誤差の増幅率} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (16)$$

$y=y(x)$ によって x から y を数値的に定義する際に $\ll y/x \gg \leq O(1)$ であれば“安全”であるが、そうでなければ“危険”であり、そのような計算は極力避けるか、あるいは $\ll y/x \gg$ を小さく抑えるようアルゴリズムを変更するなどの工夫を行う。ただし、この値は語長との比較において考慮すべきものであるから、 $\ll y/x \gg \geq O(1)$ なる状況はいちがいに忌避することでもなく注意深く吟味すべきではある。式(16)の基本形や類形/頻出例は別報⁽⁷⁾ で詳論しており、以下の議論でも適宜参照することは好都合であろう.

3. 振幅 A (または B) が与えられる問題

3.1 準線形微小振動 ($0 \leq \mu_0 \leq 1/2, 0 \leq q_0 \leq e^{-\pi}, 1 \leq A \leq 2/\sqrt{3}, 1 \geq B \geq \sqrt{2/3}, \Omega \rightarrow \sqrt{2}$) 精度的に、式(4)のうち、 q_0 による表示が妥当する。まず式(6)から次式を得る.

$$\ll A^2/\mu_0 \gg = \mu_0/(2-\mu_0) = 0 \sim 1 \leftrightarrow \mu_0 = 0 \sim 1$$

ゆえに、式(6)から直接 $\mu_0 = \mu_0(A)$ を求めるのは、

$\ll \mu_0/A \gg = \infty \sim O(1) \leftrightarrow \mu_0 = 0 \sim 1$ となり $\mu_0 \rightarrow 0$ では危険である。そこで式(10)から次式を得る。

$$\left. \begin{aligned} \mu_0 &= 2a_0/(1+a_0) = 2b_0/(1+b_0) \quad (=0 \sim 1), \\ a_0 &= (A-1)[2+(A-1)] \quad (=0 \sim 1), \\ b_0 &= (1-B)[2-(1-B)] \quad (=0 \sim 1) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (17)$$

ここに

$$\left. \begin{aligned} \ll \mu_0/a_0 \gg &= \ll \mu_0/b_0 \gg = 1/(1+a_0) \\ &= 1 \sim 1/2 = O(1), \\ \ll a_0/(A-1) \gg &= \ll b_0/(B-1) \gg \\ &= 2[1+(A-1)]/[2+(A-1)] \\ &= 1 \sim 1.172 \dots = O(1), \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (18)$$

ただし $\mu_0 = 0 \sim 1$

これらにより (A, B ではなく) ($A-1$), ($1-B$) から μ_0 を求めることは、その逆関数とともに安全であることがわかる。ただし、 $a_0 = a_0(\mu_0)$ から二次方程式の根として ($A-1$) を得る際には、 $O(A-1) = O(a_0) \rightarrow 0$ となるほうの分枝をとることに注意すべきであり、 b_0 , ($1-B$) についても同様である。すなわち (一般に)

$$x(2 \pm x) = c (\geq 0) \Rightarrow x = c/(1 + \sqrt{1 \pm c}) \dots\dots\dots (19)$$

以後、この形式はたびたび出現する。

μ_0 から K_0, q_0 を求めるには、式(12), (14)の逆関数試行解あるいは $q_0 = q_0(\mu_0)$ の陽表示多項式⁽⁷⁾ によるが、これも $\mu_0 < 1/2$ ならば安全である⁽⁷⁾。 μ_0, K_0 を用いて、式(7)あるいは式(11)から Ω を得、 q_0 とともに式(4)のフーリエ係数を定める。ただし、フーリエ係数は、それ自身の相対精度としては O (次数)の危険があり A (あるいは B) に対する相対誤差として評価する場合に限ってまったく安全である⁽⁷⁾。このことは後述するような Q を経由して計算されるフーリエ係数に対しても類似に成立する。なお Ω の計算のために後述する式(24)を利用すると $1 - \Omega/\sqrt{2}$ が得られ、 $\Omega \rightarrow \sqrt{2}$ における Ω の値の高精度表示となる。

自己点検のためには、 μ_0 から得られる Ω を式(11)に代入して得られる ($A-1$), ($1-B$) などを、初めに与えられたこれらの値と比較すればよい。すなわち

$$A^2 - 1 = 1 - B^2 = 8(1 + 2P_0)P_0 - (1 - \Omega^2/2)K_0^2 \dots\dots\dots (20)$$

式中の $(1 - \Omega^2/2)$ なる値は (いわゆる) 比肩する項の差であるから [式(7)ではなく] 後述の式(24)により q_0 の関数として数値化しないと危険である。

3.2 強非線形低周波振動 ($0 \leq \mu_1 \leq 1/2, 0 \leq q_1 \leq e^{-\pi}, \sqrt{2} > A \geq 2/\sqrt{3}, 0 < B \leq \sqrt{2}/3, \Omega \rightarrow 0+$) 精度的に、式(4)のうち、 Q による表示が妥当する。まず式(6)

から次式を得る。

$$\left. \begin{aligned} \ll A^2/\mu_1 \gg &= \mu_1/(1+\mu_1) = 0 \sim 1/2 \leftrightarrow \mu_1 = 0 \sim 1 \\ \text{ゆえに式(6)から } \mu_1 &= \mu_1(A) \text{ を得るのは } \mu_1 \rightarrow 0 \text{ においては危険である。} \\ \text{そこで式(10)から次式を得る。} \\ \mu_1 &= a_1/(1-a_1) = b_1/(1-b_1) \quad (=0 \sim 1), \\ a_1 &= (1-A/\sqrt{2})[2-(1-A/\sqrt{2})] \quad (=0 \sim 1/2), \\ b_1 &= B^2/2 \quad (=0 \sim 1/2) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (21)$$

式(18)と同様にして、 $\mu_1 = \mu_1(1-A/\sqrt{2})$ または $\mu_1 = \mu_1(B)$ およびその逆関数の計算は安全であることが確かめられる。3.1節の場合と同様に $q_1 = q_1(\mu_1)$, $K_1[q_1(\mu_1)]$ を得ると、 Q [式(15)] から式(7)あるいは式(11)を経て Ω を得、式(4)のフーリエ係数も定められる。これらの過程も、誤差の増殖に関しては $\mu_1 < 1/2$ ならば、すべて安全である。特に式(15)については次式を注意する。

$$\ll Q/q_1 \gg = 1/|\ln q_1| < O(1) \rightarrow 0, \quad q_1 \rightarrow 0 \dots\dots (22)$$

自己点検のためには、求められた Ω を式(11)に代入して得られる $(1-A/\sqrt{2})$ あるいは B なる値を、初めに与えられるそれらの値と比較すればよい。すなわち

$$\begin{aligned} 1 - A^2/2 = B^2/2 &= [1 - (\pi\Omega/4Q)^2]K_1^2 \\ &- 8(1 + 2P_1)P_1 = O(16q_1) \dots\dots\dots (23) \end{aligned}$$

式中の $1 - (\pi\Omega/4Q)^2$ なる値は、式(20)の場合と同様の理由で、後述の式(28), (29)により、 $(2-A)A = \text{fun.}(q_1)$ として数値化する必要がある [式(31)]。

4. 振動数 Ω が与えられる問題

4.1 準線形微小振動 ($0 \leq \mu_0 \leq 1/2, 0 \leq q_0 \leq e^{-\pi}, \sqrt{2} \geq \Omega \geq 1.384, A \rightarrow 1+, B \rightarrow 1-$) 精度的に式(4)の q_0 による表示が妥当する。まず式(7)から

$\ll \Omega^2/\mu_0 \gg \approx \ll \Omega^2/q_0 \gg \rightarrow 0$, ただし $\mu_0, q_0 \rightarrow 0$ となるから、 Ω そのものが与えられても $q_0 = q_0(\Omega)$ は必要な精度が得られないことになる。そこで式(12)~(14)により式(7)を変形すると既報⁽⁵⁾⁽⁶⁾の結果となるが、さらに良い別解は

$$\left. \begin{aligned} (1 - \Omega/\sqrt{2})[2 - (1 - \Omega/\sqrt{2})] &= 1 - \Omega^2/2 \\ &= 8\mathcal{K}/(1 - \mu_0/2)K_0^2 = O(24q_0^2), \\ \text{ただし } \mathcal{K} &\equiv (K_0^2 - 1 - \mu_0 K_0^2/2)/8 \\ &= (1 + 2P_0)P_0 - q_0(1 + b_0)^4 = q_0[p_0(3 + 2p_0^2) \\ &\quad - b_0^2\{6 + 4b_0(1 + \sum_{n \geq 2} q_0^{n(n+1)}/b_0^3\} + b_0^2)] \\ &\quad + r_0(1 + 3p_0 + 12q_0p_0 + 2p_0^3 + 4r_0^2) = O(3q_0^2), \\ \text{ここで } \ll (1 - \Omega/\sqrt{2})/q_0 \gg &= O(2), \quad (q_0 \rightarrow 0) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (24)$$

これらを(試行的に)解き $q_0 = q_0(1 - \Omega/\sqrt{2})$ を定める

表 1 式(25)の係数

$f_1 = 0.000000,$	$f_2 = 0.708147,$	$f_3 = 0.005057,$
$f_4 = 0.559862,$	$f_5 = 0.289340$	

ことができる。その試行 q_0 の初期値の仮定のために、次の近似式が得られている。

$$\left. \begin{aligned} q_0 &= \left(1 + \sum_{n=1}^5 f_n z^n\right) z / \sqrt{12}, \quad \text{ただし} \\ z &= \sqrt{1 - \Omega / \sqrt{2}} (\leq 0.15), \quad \text{係数 } f_n: \text{表 1 参照} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (25)$$

$\mu_0(q_0)$ を式(10)あるいは $(1 - \Omega / \sqrt{2})$ とともに式(20)に適用すると $(A-1), (1-B)$ を得、与えられた Ω と q_0 により式(4)のフーリエ係数が決定される。

自己点検の方針としては式(10)から得た $(A-1)$ あるいは $(1-B)$ を式(11)に代入して得られる $(1 - \Omega / \sqrt{2})$ を、初めに与えられるその値と比較すればよい。すなわち式(20), (10)から

$$1 - \Omega^2 / 2 = [8(1 + 2P_0)P_0 - \mu_0 / (2 - \mu_0)] / K_0^2 \quad \dots\dots\dots (26)$$

ところが右辺の [] 内は比肩する項の差であり、このまま数値計算すると [特に $(A-1), (1-B) \rightarrow 0$ にて] 自明なけた落ちを起こす危険なプログラムとなるから、多少の変形を施す。その整理結果の一つは式(24)にほかならないが、それでは自己点検の意味がないから、少なくとも累積丸め誤差が把握できるよう、意図的に式(24)とは異なるアルゴリズムを作る。すなわち

$$\begin{aligned} \frac{1 - \Omega^2 / 2}{8q_0 / K_0^4} &= \{(11 + 52p_0)p_0 + 2[69 + 16(7 + 7p_0 \\ &\quad + 4p_0^2 + p_0^3)p_0]p_0^3 + (1 + p_0)(1 + 2P_0)K_0^2 r_0 / q_0\} \\ &\quad - \{(1 + b_0)^4 \sum_{n=1}^5 (\mu_0 / 2)^n + 4[1 + (1 + b_0 / 2)b_0] \\ &\quad \times (1 + b_0 / 2)b_0\} = O(3q_0), \quad (q_0 \rightarrow 0) \quad \dots\dots\dots (27) \end{aligned}$$

解 $(A-1), (1-B)$ は、式(17)により、上式中の μ_0 を通じて半ば陽に参与し、それから得られる q_0 による p_0, P_0, r_0, b_0 とともに μ_0 を代入すると $1 - \Omega^2 / 2$ が得られる。それを式(19)で処理して得られる $1 - \Omega / \sqrt{2}$ を入力と比較すれば、この数値処理中に発生する累積丸め誤差の程度を推察することができる。

4・2 強非線形低周波振動 ($0 \leq \mu_1 \leq 1/2, 0 \leq q_1 \leq e^{-\pi}, 0 \leq \Omega \leq 1.384, A \rightarrow \sqrt{2} -, B \rightarrow 0+$) 精度的に式(4)の Q による表示が妥当する。ここで式(7)あるいは(22)から次式を得る。

$$\ll \Omega / q_1 \gg \leq \ll Q / q_1 \gg = 1 / |\ln q_1| = O(Q) \rightarrow 0,$$

$$q_1 \rightarrow 0$$

よって $q_1 = q_1(\Omega)$ なる計算の精度に不安があるから、式(7)を次のように変形する。

$$\left. \begin{aligned} \Delta &= 1 - \pi \Omega / 4Q = 1 - 1 / K_1 \sqrt{1 + \mu_1}, \\ \pi \Omega / 4Q &= 1 - \Delta \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (28)$$

ここで $\Delta = 1 - 1 / K_1 \sqrt{1 + \mu_1}$ をけた落ちを防止する形に変形すると

$$\Delta = 8 \frac{P_1(1 + 2P_1) + 2q_1(1 + b_1)^4}{K_1 \sqrt{1 + \mu_1}(1 + K_1 \sqrt{1 + \mu_1})} = O(12q_1) \quad \dots\dots\dots (29)$$

他方、式(15), (28)から q_1 の定義により

$$\left. \begin{aligned} q_1 &= \exp(-\pi^2 / 2Q) = q_\Delta / q_\Delta^4, \\ \text{ただし } q_\Delta &= \exp(-2\pi / \Omega), \\ q_\Delta^4 &= \exp(-2\pi \Delta / \Omega) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (30)$$

ゆえに式(29)は Δ に関する超越方程式となり試行的に解くことができる。試行の初期値として右辺の q_1 は

$$q_1 \simeq q_\Delta^{1 - (12 + 149.026 q_\Delta^2) q_\Delta}, \quad \text{ただし } 0 < q_\Delta \leq 0.011$$

とおけばよい(誤差は $\pm 10\%$, $\mu_1 \rightarrow 0, \sim 1/2$ では正值)。誤差の拡大に関しては格別の問題はないことが別報⁽⁴⁾⁽⁷⁾と同様にして確かめられる。 Δ が求められると、ただちに $Q = Q(\Omega)$ を得、それと Ω とを式(4)に適用してフーリエ係数が定まる。問題は $q_1 = q_1(Q)$ あるいは $q_1 = q_1(\Omega)$ (ただし $Q, \Omega \rightarrow 0$) における精度低下障害(弱い危険)であるが、前報⁽⁷⁾の詳論と同様に Ω の実用的下限を設定することにより、辛うじて許容される程度の危険と判定される。

$\mu_1(q_1)$ から式(10)により $\sqrt{2} - A, B$ を得ることに問題はない。式(11), (28)による別のアルゴリズムは

$$\begin{aligned} 1 - A^2 / 2 &= B^2 / 2 = 1 - (\pi K_1 \Omega / 4Q)^2 \\ &= \Delta(2 - \Delta)K_1^2 - 8P_1(1 + 2P_1) = O(16q_1) \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (31)$$

であり、先に得た Δ の値を直接 A, B の値に関与させることができる。

自己点検のためには、式(7)を、なるべく原形に近い形で利用して

$$\Omega = (4Q / \pi K_1) / \sqrt{1 + \mu_1} \quad \dots\dots\dots (32)$$

を、入力の Ω と比較するのが一法かと思われる。しかし、この節の出发点である式(28)が式(7)の一変形であるから、上式は無意味(代数的には無論等価)のように見えるが、式(27)の場合と同様、式(28)以下の大幅な変形により、アルゴリズムとしては十分異質と見られるから問題はないであろう。ただし、上述の $q_1 = q_1(\Omega), (\Omega, q_1 \rightarrow 0)$ における弱い危険と、本節冒頭の $\ll \Omega / q_1 \gg \rightarrow 0, (q_1 \rightarrow 0)$ (過剰な弱い安全)とが打ち消し合うから、たとえ入/出力による Ω の比較で大過がなくとも、内部の q_1 の安全が十分に保証されるわけで

はない(弱い危険)のは、式(31)上の議論のとおり⁽⁷⁾であり、この障害は本節の計算問題の宿命的難点である。なお q_1 のかわりに Q に注目することにすれば、このような微妙な問題は起こらず、 Ω の自己点検の成

否が Q の安全性にそのまま反映する。

5. 数 値 例

図1に解 $X(T)$ の振動波形を示した。解は、振動数 $0 \sim \sqrt{2}$ の領域で存在し、その波形は、 $\Omega \rightarrow \sqrt{2}$ では準線形微小振動に、 $\Omega \rightarrow 0$ では高さ $\sqrt{2}$ 、周期 $\Omega T = 2\pi$ の一方向性パルス列様波形に漸近する。

図2には最大/最小振幅(A/B)および調波振幅： A_n の計算結果を示した。 A_n の定義は次式による。

$$X(T) = A_0 + A_1 \cos \Omega T + A_2 \cos 2\Omega T + A_3 \cos 3\Omega T + \dots \quad (33)$$

この振動系の非対称片振りモード解は、他のダフィング形振動系 [ハード、ソフト、スナップスルー(対称両振りモード)の各spring系] の解が奇数次調波のみで構成されるのに反し、零次(定数)項を含め奇数偶数すべての調波を伴うことが大きな特徴である。

図1 解の波形

図2 振幅の周波数応答

図3 母数 μ_0 , 補母数 μ_1 と諸特性値の対応

```

00010 *-----TOP OF FILE=DSNPH-----950123
00020 * EXACT SOLUTIONS OF THE FREE OSCILLATION
00030 * IN A DUFFING OSCILLATOR WITH SINGLE-DEGREE-OF-FREEDOM
00040 * ( SNAP-THROUGH SPRING : HALF SWING MODE )
00050 * ISW
00060 * V
00070 * 11 C1=AA-1 : MAX. OF DISPLACEMENT, A (IN/OUT)
00080 * 12 C2=RT2-A : COMPLEMENTARY VALUES OF A (IN/OUT)
00090 * 20 BB : MIN. OF DISPLACEMENT, B (IN/OUT)
00100 * 21 B1=1-B : COMPLEMENTARY VALUES OF B (IN/OUT)
00110 * 30 OMG : NATURAL FREQUENCY (IN/OUT)
00120 * 32 OM2=RT2-OMG : COMPLEMENTARY FREQUENCY (IN/OUT)
00130 * AN(0:NN) : HARMONIC AMPLITUDES (OUT)
00140 * EN(2) : ESTIMATION OF NN (SEE MANUAL) (IN/OUT)
00150 * ER : ESTIMATED RELATIVE ERROR OF SOLUTION (OUT)
00160 * ISW : INDICATION THE INPUT PARAMETER (IN)
00170 * ICON : CONDITION CODE (OUT)
00180 * WHERE 'RT2'==SQRT(2)
00190 *
00200 *
00210 SUBROUTINE DSNPH(AA,C1,C2,BB,B1,OMG,OM2,AN,NN,EN,ER,ISW,ICON)
00220 IMPLICIT REAL*16(A-H,O-Z)
00230 DIMENSION AN(0:NN),EN(2)
00240 DATA EPS/1Q-70/
00250 ICON=0
00260 IND=0
00270 IF (ISW.EQ.11.AND.C1.GT.EPS.AND.C1.LE.0.155Q0) THEN
00280 SS=C1*(2+C1)
00290 CALL SOLMQ(IND,2*SS/(1+SS),2)
00300 GO TO 50
00310 ENDF
00320 IF (ISW.EQ.12.AND.C2.GT.EPS.AND.C2.LE.0.260Q0) THEN
00330 IND=1
00340 SS=C2*(2.828427124746190097603377448419394Q0-C2)
00350 CALL SOLMQ(IND,SS/(2-SS),2)
00360 GO TO 50
00370 ENDF
00380 IF (ISW.EQ.20.AND.BB.GT.1Q-38.AND.BB.LE.0.81Q0) THEN
00390 IND=1
00400 SS=BB*BB
00410 CALL SOLMQ(IND,SS/(2-SS),2)
00420 GO TO 50
00430 ENDF
00440 IF (ISW.EQ.21.AND.B1.GT.EPS.AND.B1.LE.0.184Q0) THEN
00450 SS=B1*(2-B1)
00460 CALL SOLMQ(IND,2*SS/(1+SS),2)
00470 GO TO 50
00480 ENDF
00490 IF (ISW.EQ.30.AND.OMG.GT.EPS.AND.OMG.LE.1.384Q0) THEN
00500 IND=1
00510 CALL OMGAJ(OMG,2)
00520 GO TO 50
00530 ENDF
00540 IF (ISW.EQ.32.AND.OM2.GT.EPS.AND.OM2.LE.0.031Q0) THEN
00550 CALL OM2Q0(OM2)
00560 GO TO 50
00570 ENDF
00580 ICON=90000
00590 RETURN
00600 50 CONTINUE
00610 EN(2)=ABS(EN(1))+1Q-35
00620 IF (IND.EQ.0)
00630 CALL AMPLH(EM,H2,AN,NN,AA,C1,C2,BB,B1,OMG,OM2,EN)
00640 IF (IND.EQ.1)
00650 CALL AMPLB(EM,2,AN,NN,AA,C1,C2,BB,B1,OMG,OM2,EN)
00660 CALL ERROR(IND,H2,2,NN,ER)
00670 RETURN
00680 END
00690
00700 SUBROUTINE SOLMQ(IND,EM,2)
00710 IMPLICIT REAL*16(A-H,O-Z)
00720 EXTERNAL SUBR1
00730 CALL APRXH(EM,H2)
00740 CALL PUTQM(EM)
00750 CALL REGUL(H2,H2*1.01+1Q-30,SUBR1,EF,KOUNT)
00760 IF (IND.EQ.1)
00770 Z=-4.93480220054467930941724549993807Q0/QLOG(H2)
00780 RETURN
00790 END
00800
00810 SUBROUTINE APRXH(EM,HH)
00820 IMPLICIT REAL*16(A-H,O-Z)
00830 IF (EM.GE.0.06) HH=QLOG(1-EM)/(-16.04)
00840 IF (EM.LE.0.06) HH=(1+EM/2)*EM/16
00850 RETURN
00860 END
00870
00880 SUBROUTINE SUBR1(H2,F)
00890 IMPLICIT REAL*16(A-H,O-Z)
00900 CALL QANDM(H2,EM,QK,P,S,FI,0)
00910 F=(EM+1Q-70)/QM-1
00920 RETURN
00930 ENTRY PUTQM(PUT)
00940 QM=PUT+1Q-70
00950 RETURN
00960 END
00970
00980 SUBROUTINE OMGAJ(OMG,Z)
00990 IMPLICIT REAL*16(A-H,O-Z)
01000 EXTERNAL SUBR2
01010 QM=QXZ/(-6.283185307179586476925286766559012Q0/OMG)
01020 CALL REGUL(QM*(1-(12+149026*QM*QM)*QM),EM,DT,1,0)
01030 IF (1-DT.EQ.1Q0) GO TO 2
01040 CALL PUTQM(QM)
01050 CALL REGUL(DT,DT*1.01+1Q-30,SUBR2,EF,KOUNT)
01060 2 CONTINUE
01070 Z=0.7853981633974483096156608458198769Q0*OMG/(1-DT)
01080 RETURN
01090 END
01100
01110 SUBROUTINE SUBR2(DLT,F)
01120 IMPLICIT REAL*16(A-H,O-Z)
01130 CALL PRSET(QM*(1-DLT),EM,DLO,1,0)
01140 F=(1Q-30+DLT)/(1Q-30+DLO)-1
01150 RETURN
01160 ENTRY PUTQM(PUT)
01170 QM=PUT+1Q-70
01180 RETURN
01190 END
01200
01210 SUBROUTINE PRSET(H2,EM,UH,IND,K)
01220 IMPLICIT REAL*16(A-H,O-Z)
01230 DATA RT28/11.31370849898476039041350979367758Q0/
01240 CALL QANDM(H2,EM,QK,P,S,FI,K)
01250 IF (IND.EQ.0) THEN
01260 EMK=QK*SQRT(1-EM/2)
01270 UH=RT28*(FI-EM*H2/2+(1-EM/2)*(S+2*P*P))/EMK/(1+EMK)
01280 ELSE IF (IND.EQ.1) THEN
01290 EMK=QK*SQRT(1+EM)
01300 UH=(8*P*(1+2*P)+EM*QK*QK)/EMK/(1+EMK)
01310 ENDF
01320 RETURN
01330 END
01340
01350 SUBROUTINE OM2Q0(OM2)
01360 IMPLICIT REAL*16(A-H,O-Z)
01370 EXTERNAL SUBR3
01380 CALL APRXH(OM2,H2)
01390 CALL PUTQM(OM2)
01400 CALL REGUL(H2,H2*1.01+1Q-30,SUBR3,EF,KOUNT)
01410 RETURN
01420 END
01430
01440 SUBROUTINE SUBR3(H2,F)
01450 IMPLICIT REAL*16(A-H,O-Z)
01460 CALL PRSET(H2,EM,UOM,0,0)
01470 F=(UOM+1Q-70)/OM2-1
01480 RETURN
01490 ENTRY PUTQM(PUT)
01500 OM2=PUT+1Q-70
01510 RETURN
01520 END
01530
01540 SUBROUTINE APRXH(OM2,H2)
01550 IMPLICIT REAL*16(A-H,O-Z)
01560 DIMENSION F(0:5)
01570 DATA F/1Q0,0.000000Q0,0.708147Q0,0.005057Q0,
01580 0.559862Q0,0.289340Q0/
01590 ROM=QSORT(OM2/1.41421356237309504880168872420970Q0)
01600 H2=F(5)
01610 DO 10 I=4,0,-1
01620 H2=H2*ROM+F(I)
01630 10 CONTINUE
01640 H2=H2*ROM/3.464101615137754587054892683011748Q0
01650 RETURN
01660 END
01670
01680 SUBROUTINE AMPLH(EM,H2,AN,NN,AA,C1,C2,BB,B1,OMG,OM2,EN)
01690 IMPLICIT REAL*16(A-H,O-Z)
01700 DIMENSION AN(0:NN),EN(2)
01710 CALL PRSET(H2,EM,UH,0,1)
01720 EM2=EM/2
01730 REM2=QSORT(1-EM2)
01740 C1=EM2/REM2/(1+REM2)
01750 B1=EM2/(1-EM2+QSORT(1-EM)*REM2)
01760 AA=1-C1
01770 C2=1.41421356237309504880168872420970Q0-AA
01780 BB=1-B1
01790 OM2=UH0
01800 OMG=1.41421356237309504880168872420970Q0-OM2
01810 RR=OMG*2.828427124746190097603377448419394Q0
01820 W=H2
01830 AN(0)=RR/4
01840 DO 10 N=1,NN
01850 AN(N)=RR*W/(1+W*W)
01860 W=W*H2
01870 10 CONTINUE
01880 EN(2)=QLOG(EN(2))/QLOG(H2)+1
01890 RETURN
01900 END
01910
01920 SUBROUTINE AMPLB(EM,2,AN,NN,AA,C1,C2,BB,B1,OMG,OM2,EN)
01930 IMPLICIT REAL*16(A-H,O-Z)
01940 DIMENSION AN(0:NN),EN(2)
01950 CALL PRSET(H2,EM,UH,1,1)
01960 REM2=QSORT(1-EM)
01970 C2=1.41421356237309504880168872420970Q0*EM/REM/(1+REM)
01980 BB=QSORT(2*EM/(1+EM))
01990 AA=1.41421356237309504880168872420970Q0-C2
02000 C1=AA
02010 B1=1-BB
02020 OM2=2*(1-UH1)/0.7853981633974483096156608458198769Q0
02030 OMG=1.41421356237309504880168872420970Q0-OMG
02040 IF (C2.EQ.0Q0.AND.2.NE.Q00)
02050 C2=1.053604984823934183248086131535724Q0
02060 2.143157364980578524733595450113363Q0/Z
02070 RR=OMG*1.41421356237309504880168872420970Q0
02080 Z2=2*Z
02090 AN(0)=RR/2
02100 DO 10 N=1,NN
02110 AN(N)=RR/QCOSH(MIN(N*Z2,16Q00))
02120 10 CONTINUE
02130 QLOG(QTAN(EN(2)*QTAN(QEXP(-Z2))))/Z2
02140 RETURN
02150 END
02160
02170 SUBROUTINE ERROR(IND,H2,Z0,NN,ER)
02180 IMPLICIT REAL*16(A-H,O-Z)
02190 E0=H2
02200 IF (IND.EQ.1) E0=QEXP(-2*Z0)
02210 IF (IND.EQ.0) Z0=-QLOG(E0)/2
02220 EL=E0*QEXP(-2*NN*Z0)
02230 P1=EL/(1+EL+EL)
02240 P2=QATAN(EL)
02250 DP2=QATAN(EL)
02260 P2=QATAN(E0)
02270 ER=(DP1-Z0+DP2)/(P1*20+P2)
02280 RETURN
02290 END
02300
02310 SUBROUTINE QANDM(SQ,YM,QG,PG,PZ,FA,ID)
02320 IMPLICIT REAL*16(A-H,O-Z)
02330 IF (ID.NE.0) GO TO 3
02340 H2=SQ
02350 P1=Q00
02360 R1=H2
02370 S1=H2
02380 P2=H2**2
02390 R2=P2
02400 S2=P2
02410 SS=P2
02420 21 CONTINUE
02430 S1=S1*SS
02440 R1=R1*S1
02450 S2=S2*SS
02460 R2=R2*S2
02470 PP=P1+R1
02480 IF (PP.EQ.P1) GO TO 22
02490 P1=PP
02500 P2=P2+R2
02510 GO TO 21
02520 22 CONTINUE
02530 P3=H2+P1
02540 EM4=H2**2*((1+P2)/(1+2*P3))**4
02550 SP=P3*P3+P1
02560 P4=H2*SP
02570 QK=1+4*P
02580 PS=(P3-P2/2)/(1+2*P3)
02590 PS1=1-PS
02600 P1=H2*PS1*(1-2*PS1*PS)*PS
02610 3 CONTINUE
02620 SQ=H2
02630 TM=EM
02640 QE=QK
02650 PG=P
02660 PZ=SP
02670 FA=FI
02680 RETURN
02690 END
02700
02710 SUBROUTINE REGUL(X,X2,SUB,EF,KOUNT)
02720 IMPLICIT REAL*16(A-H,O-Z)
02730 DATA EP3,EP7/1Q-32,1Q-70/
02740 EXTERNAL SUB
02750 CALL SUB(X,X,F1)
02760 IF (ABS(F1).LE.EP3) RETURN
02770 CALL SUB(X2,F2)
02780 KOUNT=0
02790 FB=1/EP7
02800 Z1=X
02810 Z2=X2
02820 1 CONTINUE
02830 Z1Z=ABS(Z1+Z2)+EP7
02840 F21=F2/F1
02850 F21=F21+SIGN(EP7,F21)
02860 G2=F2/F21
02870 G1=F1/F21
02880 XX=Z1*G2-Z2*G1
02890 CALL SUB(XX,FF)
02900 IF (ABS(XX-Z1)/Z12.LE.EP3) RETURN
02910 IF (ABS(XX-Z2)/Z212.LE.EP3) RETURN
02920 ABSFF=ABS(FF)
02930 IF (ABSFF.LE.EP3) RETURN
02940 IF (ABSFF.GE.FB) KOUNT=KOUNT+1
02950 IF (KOUNT.GE.33) RETURN
02960 FB=ABSFF
02970 Z1=Z2
02980 F1=F2
02990 Z2=XX
03000 F2=FF
03010 GO TO 1
03020 END
03030 *-----END OF FILE=DSNPH-----950123

```

図 4 FORTRAN(REAL*16)によるプログラムリスト

Duffing 系自由振動の厳密解 (スナップスルースプリング: 非対称片振りモード)
CALL DSNPH (AA,C1,C2,BB,B1,OMG,OM2,AN,NN,EN,ER,ISW,ICON)

(1) 機能

運動方程式 $d^2X/dT^2 - X + X^3 = 0$ の厳密解のフーリエ展開;

$$X(T) = A_0 + A_1 \cos \Omega T + A_2 \cos 2\Omega T + A_3 \cos 3\Omega T + \dots$$

におけるフーリエ係数: $A_0, A_1, A_2, A_3, \dots$; 最大値 $A = \max_{(T)} X(T)$, 最小値 $-B = \min_{(T)} X(T)$ なる $A, B \geq 0$; (それらのコンプリメンタリ) $A-1, \sqrt{2}-A, 1-B$; 円振動数 Ω , (そのコンプリメンタリ) $\sqrt{2}-\Omega$ などを数値計算する。与える条件はこれら $A-1, \sqrt{2}-A, B, 1-B, \Omega, \sqrt{2}-\Omega$ のいずれか 1 個とする。指定された相対誤差を保証するに必要な A_n の次数上限 $N(\geq n)$ の近似値を推算する。

(2) パラメタ

AA ... 出力。 $A = \max_{(T)} X(T)$ 。
 C1 ... 入力/出力。 $A-1$ 。ただし $10^{-70} < C1 \leq 0.155$ 。ISW=11 の場合は入力, それ以外は出力。
 C2 ... 入力/出力。 $\sqrt{2}-A$ 。ただし $10^{-70} < C2 \leq 0.260$ 。ISW=12 の場合は入力, それ以外は出力。
 BB ... 入力/出力。 $B = \min_{(T)} X(T)$ 。ただし $10^{-38} < BB \leq 0.817$ 。ISW=20 の場合は入力, それ以外は出力。
 B1 ... 入力/出力。 $1-B$ 。ただし $10^{-70} < B1 \leq 0.184$ 。ISW=21 の場合は入力, それ以外は出力。
 OMG ... 入力/出力。円振動数 Ω 。ただし $10^{-70} < OMG \leq 1.384$ 。ISW=30 の場合は入力, それ以外は出力。
 OM2 ... 入力/出力。 $\sqrt{2}-\Omega$ 。ただし $10^{-70} < OM2 \leq 0.031$ 。ISW=32 の場合は入力, それ以外は出力。
 AN ... 出力。フーリエ係数 $A_n (n=0, 1, 2, 3, \dots, NN)$ 。大きさ (0:NN) の 1 次元配列。
 NN ... 入力。フーリエ係数の最高次数 (AN 参照)。NN ≥ 1 。
 EN ... EN(1): 入力。所要の NN を推算するための $X(T)$ の相対誤差 (符号なし)。
 EN(2): EN(1) を満足する NN の推定値。
 大きさ 2 の 1 次元配列。
 ER ... 出力。解 $X(T)$ の相対誤差の推定値 (符号なし)。
 ISW ... 入力。計算条件の指示。上述 AA~OM2 参照 [() 内は指定された入力]: 11(C1), 12(C2), 20(BB), 21(B1), 30(OMG), 32(OM2) のいずれか。
 ICON ... 出力。コンディションコード。0 は正常終了。90000 は ISW が上記以外の指定であった, または ISW の値と対応する入力パラメタの値の範囲が対応していないことを意味し計算を打ち切る。

(3) 使用上の注意

a. 使用する副プログラム名

- ① FORTRAN 基本関数... QLOG, QEXP, QSQRT, QCOSH, QTAN, QATAN, ABS, MIN, SIGN
- ② 本プログラム中... SOLMQ, APRXH, SUBR1, OMGAJ, SUBR2, PRSET, OM2Q0, SUBR3, APROH, AMPLH, AMPLJ, ERROR, QANDM, REGUL

b. 注意

- ① プログラムは固定フォーマットで書かれている。
- ② $X(T)$ が解であるとき, $-X(T)$ も又解であるから, $X(T) \geq 0$ としても一般性は失われない。入/出力パラメタはすべて正値とし, 符号が付されていても無視され, 最大値, 最小値は $X(T) \geq 0$ に対応する意味とする。
- ③ $[EN(1)+10^{-35}]$ により指定される解 $X(T)$ の相対誤差 (要求値) を保証する NN の推定値が EN(2) に出力される。EN(1)=0 とおくと 10^{-35} (〜1 語の丸め) を採用したことになる。
- ④ パラメタは一般に 0 または正の値であるが, 例外的に出力 C2 が負値をとることがある。その場合 C2 は $\log_{10}(\sqrt{2}-A)$ を表している。

$\Omega \rightarrow \sqrt{2}$ の場合, 零次以外のすべての調波振幅 A_n については

$$A_n \rightarrow 4[(1-\Omega/\sqrt{2})/12]^{n/2}, \quad n=1, 2, 3, \dots \quad (34)$$

なる関係があり, 他方, $\Omega \rightarrow 0$ では, すべての調波振幅 A_n は Ω に比例し, 零次を除いて $A_1 (\rightarrow \sqrt{2}\Omega)$ に漸近する。なお, A_0 は, すべての振動数範囲で

$$A_0 = \Omega/\sqrt{2} \quad (35)$$

なる (完全な) 直線である。

図 3 は母数パラメタ μ_0 および補母数パラメタ $\mu_1 (=1-\mu_0)$ の関数として各特性値を表示した。

6. プログラム

FORTRAN 77 (4 倍精度) によるサブルーチンサブプログラムの全文を図 4 に, その使用説明書を図 5 に示した。

入力パラメタは, 振幅 ($A-1, \sqrt{2}-A, B, 1-B$), または振動数 (Ω または $\sqrt{2}-\Omega$) の 6 種のいずれかであり, いずれを指定しているのかは, 入力パラメタ ISW で指示する。入力パラメタの組 ($A-1, 1-B, \sqrt{2}-\Omega$) は準線形振動 ($\Omega \rightarrow \sqrt{2}$) に, ($\sqrt{2}-A, B, \Omega$) は強非線形低周波振動 ($\Omega \rightarrow 0$) に対応し, 精度保証のために数値の範囲に制限がある。

出力パラメタは上述した入力パラメタのすべてに振幅 A を加えた計 7 種のほかに, フーリエ係数 (調波振幅) が大きさ指定の配列となり, さらに解に対する相対誤差を指定すると, それを保証するに必要な高調波の次数の推奨値が計算され出力される。

自己点検を適用した結果, 調波振幅は全振幅に対する相対誤差により, それ以外の出力は, それ自身の相対誤差により, いずれも誤差の値 (符号除外) は 10^{-30} 以下と推定されたので, 本プログラムでは簡素化のため自己点検の手順を削除し, しかも, より高速/高精度を実現している。

7. 結 語

前報⁽⁵⁾ 以来, ダフニング族 1 自由度非線形系の自由振動の厳密解とその高精度数値化の問題を扱った一連の報告の最終稿として, 本報では, スナップスルースプリング系の自由振動のうち, 非対称片振りモードの取扱いを論じ, これまでと同様に, 相対誤差 10^{-30} 以下を保証する FORTRAN プログラムを提示した。

これら一連の研究により, いわゆる (対称形) ダフニング族に属するすべての振動系の自由振動は厳密に解かれ, 計算機の性能一杯に可能な高精度で数値化を実

図 5 プログラムの使用説明書

表2 $\mu=16q[1+\sum_{k=1}\rho_k(-q)^k]$ の係数

k	ρ_k
1 (Note: $ q < 0.055$)	8
2	44
3	192
4	718
5	2 400
6	7 352
7	20 992
8	56 549
9	145 008
10	356 388
11	844 032
12	1 934 534
13	4 306 368
14	9 337 704
15	19 771 392
16	40 965 362
17	83 207 976
18	165 944 732
19	325 393 024
20	628 092 832
21	1 194 744 096
22	2 241 688 744
23	4 152 367 104
24	7 599 231 223
25	13 749 863 984
26	24 612 479 480
27	43 610 343 936
28	76 529 401 910
29	133 070 048 $\times 10^3$
30	229 370 313 $\times 10^3$
31	392 081 $\times 10^6$
32	664 905 $\times 10^6$
33	1 119 $\times 10^9$
34	1 870 $\times 10^9$
35	3 102 $\times 10^9$
36	5 $\times 10^{12}$

現する手順が確立したことになる。これらの研究は単に対称形ダフィング族自身の自由振動の高精度数値表示を指向するものであるにとどまらず、その検討の過程で見出された、ヤコビのだ円関数に関する高精度数値処理の手法や定語長計算機に固有の誤差拡大障害の処置法、さらにはプログラム上の種々の技巧などの有為性ととも、非対称ダフィング族自由振動の厳密解⁽⁸⁾やその高精度数値化計算に必要となる基本関数群の高精度計算法としても有意義と思われる。

なお、上述の“保証精度=相対誤差 10^{-30} ”なる表現は、4倍精度計算(現行の計算機の標準的使用による最高精度)に固有のものであるが、その際の1語の単独丸め誤差は、最大相対誤差 $\geq 3 \cdot 10^{-33}$ 、平均値 $\leq 3 \cdot 10^{-34}$ に過ぎないのに、それが累積すると⁽⁹⁾最大 10^{-30} 程度にも達する(実測)事実を深刻な問題点の示唆として注意すべきことを付言しておきたい。

付録 $\mu=\mu(q)$ [式(14)] の単純べき級数表示⁽¹⁰⁾

式(14)の右辺は、べき級数の商の四乗となっているが、これを“単純なべき級数”の形に整理する⁽¹¹⁾ことにより $\mu=\mu(q)$ そのものの計算を簡素化、高能率化でき、また、その逆関数 $q=q(\mu)$ の陽表示として別報⁽⁷⁾で提案した多項式を作る際に、べき級数反転⁽¹¹⁾の(直接的)対象とすべき原(始)級数ともなる。参考資料として、その概説を付録しておく。

べき級数は次のように定義される。

$$\mu=16q[1+\sum_{k=1}\rho_k(-q)^k]$$

係数 ρ_k の一部を付表に示した。この成果に関する厳密な取扱いは一部未完であるが、現在、以下のような知見が得られている⁽¹⁰⁾。

(i) この級数は q に関する交項級数であり、係数 $\rho_1 \sim \rho_{127}$ が数値計算されている。

(ii) 係数 ρ_k はすべて整数であり、その絶対値は k とともに単調増加する。 ρ_{127} は27けたである。

(iii) $\rho_1 \sim \rho_{80}$ は厳密値である。 ρ_{80} は22けた。

(iv) $\rho_{81} \sim \rho_{127}$ は近似値である。 ρ_{81} ではほとんど誤差零であるが、 k とともに精度は単調に低下し ρ_{127} の相対誤差(絶対値)は最大 $5 \cdot 10^{-13}$ 、rms 値で $2 \cdot 10^{-20}$ 程度と推定される⁽⁹⁾⁽¹⁰⁾。

(v) $\rho_1 \sim \rho_{127}$ により4倍精度計算を行うときは、丸め(16進の1語単独で相対誤差 2^{-108} 以下)のため $0 \leq q < 1/3 \leftrightarrow 0 \leq \mu < 0.998$ が処理の限界である。

(vi) $0 \leq q \leq 0.055 (\leftrightarrow 0 \leq \mu < 0.6)$ 対応⁽⁷⁾の4倍精度計算のためには $k \leq 36$ 程度で十分であり、付表はこの点を考慮した抄略実用版となっている。

文 献

- (1) Moon, F. C., *Chaotic Vib.*, (1987), 77, John Wiley & Sons.
- (2) 戸田, 楢田関数入門, (1976), 75, 日本評論社.
- (3) McLachlan, N. W., *Ordinary Nonlinear Differential Equations*, (1956), 39, Oxford at the Clarendon Press.
- (4) 田村・ほか2名, 機論, 61-583, C(1995), 752.
- (5) 田村・ほか2名, 機論, 59-567, C(1993), 3267.
- (6) 田村・ほか2名, 機論, 60-579, C(1994), 3719.
- (7) 田村・ほか2名, 機論, 61-584, C(1995), 掲載予定, No. 941221.
- (8) 田村・ほか2名, 機論, 58-545, C(1992), 1.
- (9) 田村, 機論, 57-533, C(1991), 338.
- (10) 田村・深田, 九州大学工学集報, 61-2(1988), 149.
- (11) 田村, 機論, 56-531, C(1990), 3154.