不連続な非線形性をもつ系の振動* (乾燥摩擦を伴う強制自励系の場合)

吉 武 裕*¹, 末 岡 淳 男*²
田 村 英 之*², 庄 司 長 史*³

Vibrations of Nonlinear Systems with Discontinuities (Case of Forced Self-Excited Vibration Accompanied by Dry Friction)

Yutaka YOSHITAKE, Atsuo SUEOKA,
Hideyuki TAMURA and Nobuchika SHOJI

This paper deals with forced self-excited vibration accompanied by dry friction, as an example of vibrations of nonlinear systems with discontinuities. The resonance curves of harmonic, higher-harmonic and subharmonic vibrations are obtained using the direct numerical integral method presented previously by us, which is a kind of shooting method and is highly accurate. Chaos and beats are also found. Influences of amplitude and frequency of external force on the stability of solutions are discussed. It is found that bifurcation is realized from the change of the types of vibrations, namely, change from vibration without stick to that with stick, and vice versa. Periodic solution becomes unstable due to this bifurcation and chaos sometimes occurs abruptly on the halfway through the period doubling route. In this study, a new route to chaos was found using a mechanical model.

Key Words: Nonlinear Vibration, Forced Vibration, Frictional Vibration, Chaos, Entrainment, Bifurcation, Harmonic Vibration, Higher-Harmonic Vibration, Subharmonic Vibration

1. 緒 言

強度の非線形性である不連続な特性をもつ系として、乾燥摩擦やクーロン摩擦を伴う系⁽¹⁾⁽²⁾、衝突系⁽³⁾、予圧縮ばね系⁽⁴⁾などがあるが、不連続な特性ゆえに解析に伴う困難も多く、高精度の解析が行われてきたとは言いがたい。よって、これらの系に発生する現象を今日までに理論的に全て説明できているという保証もない。また、これらの系を不連続な特性をもつ系として捉えた観点からの研究もないようである。

一方、これらの系のうち乾燥摩擦を伴う系については、摩擦振動⁽¹⁾、すなわち自励振動が古くから問題となり研究されてきたが、近年、強制力も同時に作用する強制自励系の研究^{(5)~(11)}も行われ、重要な一分野を形成しつつある。例えば、1自由度系の調和振動引込み⁽⁵⁾、鉄道車両の車輪の調和振動引込み⁽⁶⁾、回転体の1/2次分数調波振動引込み⁽⁷⁾⁽⁸⁾、油圧駆動系の調和振動引込み^{(9)~(11)}などである。また、特にカオスに的を絞った研究も見られるようになってきた^{(12)~(14)}。しかし

ながら、この分野の研究においては、摩擦を伴う現象特有の stick-slip 振動を精度良く取り扱った例や、解の分岐やカオスの発生メカニズムに言及した例もほとんどない。

そこで、本論文では、乾燥摩擦を伴う強制自励系として最も基本的な1自由度系を設定して、高精度の数値解析を行い、不連続系の観点からその系に発生する現象を詳細に調べた。数値解析にあたっては、摩擦力の不連続性を連続関数で近似する⁽¹⁵⁾⁽¹⁶⁾ことなく、その不連続性を忠実に処理したことが特徴である。すなわち、摩擦などの不連続関数を含む場合でも高精度の周期解を求めうる直接数値積分法⁽¹⁷⁾を用いて引込み振動の解を精度良く求め、また、解の分岐やカオスの発生メカニズムも調べた。その結果、stick-slip 振動の解と安定性やカオスへのルートの関係が明らかになった。

2. 理 論 解 析

2・1 運動方程式 図1の質量 m 、ばね定数 k の1自由度系を考える。質点は速度 V で移動する基礎の上に置かれ、押しつけ力 P を鉛直下向きに受けており、乾燥摩擦力 f_0 が作用する。同時に、強制力 $F_0 \cos \omega t$ も作用している。この系の復元力を変位 x に

* 平成6年7月15日 1994 Dynamics and Design Conferenceにおいて講演、原稿受付 平成6年8月19日。

*¹ 正員、長崎大学工学部 (〒852 長崎市文教町1-14)。

*² 正員、九州大学工学部 (〒812-81 福岡市東区箱崎6-10-1)。

*³ 学生員、長崎大学大学院。

関して線形とすると運動方程式は次式となる。

$$m\ddot{x} + kx = f_0(V_r) + F_0 \cos \omega t \quad \cdots \cdots (1)$$

ここに、摩擦係数 f_0 として、次式のように相対速度 V_r に関して負のこう配をもち、原点不連続の区分的 3 次関数を考えている。ただし、 $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_3$ はいずれも正の定数とする。また、 g は重力加速度である。

$$\left. \begin{aligned} f_0(V_r) &= \mu(V_r)m(g + P/m), \quad V_r = V - \dot{x} \\ \mu(V_r) &= \gamma_0 \operatorname{sgn}(V_r) - \gamma_1 V_r + \gamma_3 V_r^3 \quad (V_r \neq 0) \\ -\gamma_0 &\leq \mu(V_r) \leq \gamma_0 \quad (V_r = 0) \end{aligned} \right\} \quad \cdots \cdots (2)$$

上式の摩擦特性の概略図を図 2 に示す。式(1)で表される系と類似した系として、ディザを用いて stick-slip を防止する位置決め制御系⁽¹⁸⁾がある。

式(1)を次のように無次元化する。

$$y'' + y = f(v_r) + F \cos \nu \tau \quad \cdots \cdots (3)$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} \omega_n^2 &= k/m, \quad \tau = \omega_n t, \quad ' = d/d\tau \\ y &= x\omega_n/V, \quad \nu = \omega/\omega_n, \quad F = F_0\omega_n/(kV) \\ \alpha_0 &= \gamma_0 c/(V\omega_n), \quad \alpha_1 = \gamma_1 c/\omega_n \\ \alpha_3 &= \gamma_3 V^2 c/\omega_n, \quad v_r = 1 - y', \quad c = g + P/m \\ f(v_r) &= \alpha_0 \operatorname{sgn}(v_r) - \alpha_1 v_r + \alpha_3 v_r^3 \quad (v_r \neq 0) \\ -\alpha_0 &\leq f(v_r) \leq \alpha_0 \quad (v_r = 0) \end{aligned} \right\} \quad \cdots \cdots (4)$$

2.2 解の数値計算手法 一般に、摩擦や予圧縮ばねなどによる不連続な特性が運動方程式に含まれると、その解析は容易ではない。特に、摩擦力を伴う系では stick を発生することもあり、その解析はより難しくなる。よって、摩擦力を相対速度零の近傍で大きな

図1 振動モデル

図2 摩擦特性の概略図

傾きをもち急激に変化する連続な関数で近似した研究もよくみられる⁽¹⁵⁾⁽¹⁶⁾。また、数値積分を行うにしても、特別な工夫を施さなければその精度は大幅に劣化することが知られている⁽¹⁹⁾。ところで、著者らは、一般の連続的非線形性のみならず、このような不連続性が存在しても周期解を高精度で求めることができる手法、すなわち、シューティング法の原理に基づく直接数値積分法を開発し、その精度を確認している⁽¹⁷⁾。本論文においても、この手法を用いて引込み振動の解を高精度で求めた。以下に、その概略を示す。

$\tau=0$ での初期値 $y^0=(y(0), y'(0))^t$ (ただし、右肩号 t は転置行列を表す) を仮定し、式(3)を一周期間 $\tau=T$ まで(調和振動では $T=2\pi/\nu$, n 次分数調波振動では $T=2\pi n/\nu$) 数値積分しそれを $y^1=(y(T), y'(T))^t$ とすると周期解の条件は次式となる。

$$y^1 - y^0 = 0 \quad \cdots \cdots (5)$$

ただし、仮定した y^0 から数値積分を行うことにより y^1 が求められることを考えれば y^1 は y^0 の関数である。よって式(5)を満たす y^0 を求めることが周期解を求めることに相当する。式(5)に、Newton-Raphson 法を適用すれば、繰返し計算のための式は次のようになる。

$$(B - I_2) \tilde{y} = y^0 - y^1 \quad \cdots \cdots (6)$$

ここに、 $\tilde{y}$ は次の繰返しのための y^0 の修正量であり、 B は単位マトリックス I_2 を形成する各単位ベクトルを初期値として、変分方程式をおのおの一周期積分したものを行方向に並べることにより求める。ただし、stick 運動中の変位の変分は一定で、速度の変分は零である。安定判別は y^0 が収束したときの B を使用する。 B の全ての固有値(特性乗数に相当)の絶対値が1より小さいならば対応する周期解は安定と判定する。この手法では、相対速度 v_r を常にチェックしながら数値積分を行い、 v_r の符号の変化を検出すると、符号が変化する直前の時刻からそれまでのきざみ幅を1/10にした状態で積分を行うという操作を繰返し行うことにより不連続点 $v_r=0$ を極めて高精度で検出することや、不連続点到達時の加速度の値によりその後の運動を slip か stick か判定すること、さらに、変分方程式の δ 関数の積分などに工夫がなされている⁽¹⁷⁾。

また、周期的でないなりやカオスなどの求解に用いたルンゲ・クッタ・ギル法においても slip と stick の切替え点を正確に求めて精度を維持している。

3. 数値計算結果および考察

3.1 周期解とその安定性

本論文では摩擦特性

は $\alpha_0=1.5$, $\alpha_1=1.5$, $\alpha_3=0.45$ とし, 強制力の振幅 F の大きさを種々変化させて数値計算したが, ここでは, その代表値として 0.1 と 1 を用いた計算結果のみを示す. 図 3 に調和振動引込み (1/1) と高調波振動引込み ($n/1$: n 次高調波振動) に対する共振曲線とその代表的な速度波形の計算結果を示す. ここに, 図 3 (a) の縦軸 $A=[(\text{変位 } y \text{ の最大値}-\text{変位 } y \text{ の最小値})/2]$ は変位振幅である. 図 3 (a) から, 強制力の振幅 F が大きくなると, 解の変位振幅 A が大きくなるとともに引込み領域が強制力の角振動数 ν の小さな方向に移動し, 引込み領域そのものも広がっている. この引込み領域の移動は摩擦力の非線形性による. 図中の○印はカオスの存在を確認した領域である. また, 図 3 には表示していないが, 図の各引込み領域の間には多くの超分数調波振動引込み (Ultrasubharmonic entrainment⁽²⁰⁾) やうな存在する (3・3 節参照). 図 4 に ν が 1 から 4 の範囲に存在する調和振動と分数調波振動 ($1/n$: $1/n$ 次分数調波振動) の共振曲線とその代表的な速度波形の計算結果を示す. ただし, 図 4

(a) 引込み共振曲線

(b) 調和振動の速度波形 ($F=0.1$) (c) 2 次高調波振動の速度波形 ($F=0.1$)

図 3 調和振動引込みと高調波振動引込み

(a) には, 基本的な解のみ描いており, 次数の高い分数調波振動の解は省略している. 強制力の振幅 F が大きくなると分数調波振動の引込み領域は ν の大きな方向に移動しその領域も広がっている. これら引込み領域の間にはうなりが存在する. また, 図 3, 4 から, F が大きくなると 2 次高調波振動と 1/2 次分数調波振動は調和振動の解と接続することがわかる.

図 5 に $F=0.1$ の場合の調和振動引込みの共振曲線の拡大図, 特性乗数⁽¹⁷⁾, 代表的位相平面を示す. ただし, 1 自由度系では特性乗数は 2 個存在するが, 安定性に直接関係がある絶対値の大きい方のみ描いている. また, 解が stick-slip となる周期解の場合, 特性乗数の一つは零となる.

(a) 引込み共振曲線

(b) 1/2 次分数調波振動の速度波形 ($F=0.1$) (c) 1/4 次分数調波振動 (周期倍分岐後) の速度波形 ($F=0.1$) (d) 1/4 次分数調波振動の速度波形 ($F=0.1$)

図 4 調和振動引込みと分数調波振動引込み

図5を用いて調和振動の解の形とその安定性について考察する。図5(a)の共振曲線の拡大図から、強制力の角振動数 ν を約0.86から減少させていくと、解は、stickを伴わないslip振動の安定解から $\nu=0.851$ でいったん裏がえり不安定stick-slip振動となった

(a) 共振曲線の拡大図

(b) 特性乗数

(c) 位相平面

図5 調和振動引込み ($F=0.1$)

後、 $\nu=0.854$ で再び裏がえり安定stick-slip振動と変化する。さらに ν を減少させると、振幅が最大となった後 $\nu=0.739$ で裏がえり不安定なslip振動の解となっている。次に、解の分岐については、図5(b)の特性乗数 λ の図から、不安定stick-slip振動が $\nu=0.854$ で安定化する分岐は、分岐点で $\lambda=1$ となっており接線分岐とわかる。一方、 $\nu=0.851$ での安定slip振動から不安定stick-slip振動への分岐と $\nu=0.739$ での安定stick-slip振動が不安定slip振動への分岐は、分岐点で特性乗数 λ が不連続に変化しているのが特徴である。この特性乗数が不連続に変化する分岐は、図5(c)の位相平面に示すように、stickを伴わない振動

(a) 共振曲線の拡大図

(b) 特性乗数

(c) 位相平面

図6 2次高調波振動引込み ($F=0.1$)

(I)から伴う振動(II)へ、あるいはその逆(IIIからIV)の状態でのトラジェクトリの形の変化が原因で発生する。なぜなら、stick-slipの周期解では、slipの周期解とは異なり、特性乗数の計算に用いたマトリックス B を求める際に変分方程式中の δ 関数の積分が入ってくるようになるので、このようにトラジェクトリの形

(a) 共振曲線の拡大図

(b) 特性乗数

(c) 位相平面

図 7 1/2 次分数調波振動引込み ($F=0.1$)

が変化すると、その前後で B のある要素の値が step 的に変化するからである。

図 6 は 2 次高調波振動引込みに対する図 5 と同様の図である。強制力の振幅 F が 0.1 の場合、図 6 (a) の共振曲線の拡大図からわかるように、解は島状の形を形成し 2 価となるが、全体的に見て振幅の小さい方の分枝が安定である。また、図 6 (b) の特性乗数 λ と図 6 (c) の位相平面の図からわかるように、slip 振動と stick-slip 振動という stick を伴うか否かのトラジェクトリの形の違いが原因で、 $\mu \approx 0.407$ と $\nu \approx 0.413$ の 2 箇所で特性乗数が不連続に変化している。

図 7 に示す 1/2 次分数調波振動引込みについても、トラジェクトリの形と特性乗数の間の関係は調和振動、2 次高調波振動と同様の傾向である。また、 $\nu \approx 1.713$ で 1/4 次分数調波振動に周期倍分岐しているのが見られる。

3・2 カオスへの分岐 強制自励系にカオスが発生することはよく知られている⁽²¹⁾。乾燥摩擦を伴う強制自励系のカオスは近年になって確認され、非線形復元力の場合⁽¹³⁾ がよく調べられており、式(1)のような線形復元力の場合の研究⁽¹²⁾ は僅かである。しかも、文献(12)でカオスと判定しているもののなかには、著者らの高精度の数値計算の結果、カオスではなく長周期の分数調波振動であるものも含まれていた。

図 8 に $F=1$ の場合の 1/2 次分数調波振動から始まる分岐を示す。周期倍分岐を繰返しカオスに至るまでの解は全て slip 振動であり、このカオスへのルートは通常の周期倍分岐である。

図 9 には $F=0.1$ の場合について、図 8 と同様に 1/2 次分数調波振動から始まる分岐を示している。図から、1/2 次分数調波振動は $\nu \approx 1.713$ で 1/4 次分数調波振動に周期倍分岐している [図 7 (a), (b) 参照] ことと $\nu \approx 1.7077$ 付近でカオスが突然発生したことが読

図 8 分岐線図 ($F=1$)

み取れる。事実、 $\nu=1.7077$ におけるリアプノフ指数⁽¹⁷⁾を計算すると0.010, -9.10 であったので、これより僅かに大きい ν で突然カオスが発生していると考えられる。図10に $\nu=1.71$ と $\nu=1.7$ における位相平面を示す。 $\nu=1.71$ の解はstickを伴わない1/4次分調波振数のslip振動である。 $\nu=1.7$ の解はカオス(リアプノフ指数, 0.017, -9.14)であるが、僅かにstickを伴っている。 ν を変化させた詳しい計算の結果、カオスの発生と同時に解はstickを含むことが判明した。3・1節では周期解のトラジェクトリにstickを伴うようになることを契機に特性乗数が不連続に変化する分岐を確認したが、このように周期倍分岐ルートの途中でstickを伴うようになると、それを契機に突然カオスが発生する分岐が生ずる例もあるのである。

図11に図9のカオスへの分岐点付近の ν におけるポアンカレマップを示す。横軸の y_n は強制力の位相が零の瞬間の変位で、縦軸の y_{n+4} はそれより4周期後の変位を表す。ただし、図には $y_n=1.90$ 付近のマップのみ拡大して表している。 $\nu=1.707, 1.705, 1.7$ におけるマップは下に尖った極めて特徴的な形、すなわち、極小値(尖点)において傾きが不連続なものとなっている。カオスへの分岐点に近い $\nu=1.7077$ におけるマップも拡大すればこれらとほぼ相似な形をしている。さ

らに、 $\nu=1.7077$ においては、不安定4周期不動点と極小値(尖点)は極めて近くに位置している。そして、カオスへの分岐点では不動点と極小値(尖点)は一致する。逆に、このようなマップをもつ系では図9に示したように突然カオスが発生する分岐が生ずることが、マップ(差分方程式)を対象とした研究⁽²²⁾から明らかになっている。この文献(22)では、実際の系は対象としていないために、このような分岐を行う実際の物理系の例が熱望されている。これに対し、本研究で取り扱った系は実際の系をモデル化したものであり、これに対する一つの解答と言える。

図12にカオス発生直後と思われる $\nu=1.7077$ において縦軸を y_{n+32} (y_n から32周期後の変位)とした場合のポアンカレマップを示す。この図の範囲では15個の不安定不動点を読み取れ、安定不動点は一個も存在していないことがわかる。前述のように、リアプノフ指数が正であることから $\nu=1.7077$ の解はカオスであると判定したわけであるが、図12のように数多くの不安定不動点が存在するものの安定不動点が存在しない状態である(図12では図面上で不動点を判別できるか否かの観点から縦軸は y_{n+32} としたが、安定周期解が存在しないことは様々な初期値を用いた直接数値

図9 分岐線図 ($F=0.1$)

(a) 1/4次分調波振動

(b) カオス

図10 位相平面 ($F=0.1$)

図11 ポアンカレマップ ($F=0.1$)

図12 ポアンカレマップ [$F=0.1, (y_n, y_{n+32})$]

(a) 2/2次超分数調波振動 (b) 2/5次超分数調波振動

図13 超分数調波振動引込みの位相平面 ($F=1$)

(a) stick-slipの場合 (b) slipの場合

図14 うなりのポアンカレ断面 ($F=0.1$)

積分法⁽¹⁷⁾や長時間の数値積分を行った結果からも確認している)ことから、この突然発生するカオスは通常の周期倍分岐後のカオスと同様のカオスであると推察される。

3.3 超分数調波振動引込みとうなり 図3, 4に示した引込みを振動以外に、多くの超分数調波引込みおよびうなり振動を確認した。

図13に $F=1$ の場合の超分数調波振動引込み ($m/n:1/n$ 次分数調波振動の m 次高調波振動)の位相平面の例を示す。直接数値積分法⁽¹⁷⁾を用いることによりこのような複雑な周期解も精度良く求めることができる。

図14に $F=0.1$ の場合のうなり振動(概周期振動)の代表的なポアンカレ断面を示す。乾燥摩擦を伴う系のうなり振動のポアンカレ断面は、それがstickを伴うか否かによりそれぞれ図14(a), (b)のような閉曲線となるのが特徴である。

4. 結 言

乾燥摩擦に起因して生じる自励振動系に強制力が作用する1自由度強制自励系のslipおよびstick-slip振動を乾燥摩擦の不連続を忠実に扱うことによって高精度に数値解析した。直接数値積分法によって調和振動, 高調波振動, 分数調波振動, 超分数調波振動などの周期的な引込み振動およびカオスやうなりの発生領域, また, 解の分岐とstick-slipとの関係を調べた。その結果, stick-slipが原因で周期解の安定/不安定境界では特性乗数が不連続に変化することや突然カオスが発生する分岐が存在することを確認した。

文 献

- (1) 亘理・杉本, 機論, **29**-200(1963), 769.
- (2) Den Hartog, J. P., *Trans. ASME*, **53**(1931), 107.
- (3) 吉武・末岡, 機論, **60**-569, C(1994), 50.
- (4) Shaw, S. W. and Tung, P. C., *Trans. ASME J. Dyn. Syst. Meas. Cont.*, **110**(1988), 278.
- (5) 井上・ほか2名, 機論, **32**-234(1966), 184.
- (6) 中井・秋山, 機論, **59**-563, C(1993), 2098.
- (7) Shaw, J. and Shaw, S. W., *J. Sound Vib.*, **147**-3(1991), 435.
- (8) 石田・山本, 機論, **58**-549, C(1992), 1564.
- (9) 倉本・ほか2名, 機論, **58**-552, C(1992), 2348.
- (10) 倉本・ほか2名, 機論, **59**-559, C(1993), 665.
- (11) 倉本・ほか2名, 機論, **59**-563, C(1993), 1999.
- (12) Popp, K. and Stelzer, P., *Phil. Trans. R. Soc. Lond., A* **332**(1990), 89.
- (13) Narayanan, S. and Jayaraman, K., *J. Sound Vib.*, **146**-1(1991), 17.
- (14) 平井, 機習教, No. 910-18(1991), 27.
- (15) Spanos, P. D., ほか3名, *ASME J. Vib. Acous.*, **112**(1990), 366.
- (16) Sai-Lin, L., ほか2名, *Proceedings of Asia-Pacific Vib. Con.*, (1993), 1693.
- (17) 吉武・ほか3名, 機論, **59**-561, C(1993), 1428.
- (18) 榎木・ほか2名, 自動制御工学, (1977), 117, 養賢堂.
- (19) Brown, J. M. B. and Borthwick, W. K. D., *J. Earthqu. Eng. and Struc. Dynam.*, **16**(1988), 265.
- (20) Nayfe, A. H. and Mook, D. T., *Nonlinear Oscillations*, (1979), 15, Wiley.
- (21) 上田, 電子通信学会論文誌, **56A**-4(1973), 218.
- (22) Nusse, H. E. and Yorke, J. A., *Physica, D*, **57**(1992), 39.