非対称復元力を有する強制振動系の高分数調波振動の
分岐現象とカオス*

(第2報, 1次共振点以上における周期解の family と内部カタストロフィ)

黒田 雅治^{*1}, 松木 温^{*2}, 中井 幹雄^{*3}Bifurcation of Higher Subharmonics and Chaos in Forced Vibratory System
with Asymmetrical Restoring Force(2nd Report, Bifurcation of Periodic Attractors, Window, Hysteresis
and Interior Catastrophe above the First Resonance)

Masaharu KURODA, Yutaka MATSUKI and Mikio NAKAI

In this paper, a nonlinear oscillator derived from the gear meshing vibration is investigated, which exhibits successive different bifurcations ending in chaos above the first resonance. These bifurcations are examined in detail using bifurcation diagrams, Lyapunov exponents, winding numbers, invariant curves, and Poincaré maps. In the bifurcation diagram, periodic subharmonic oscillations appearing nonsuccessively as a "window" belong to the same "families", which are divided into two kinds: type-I, in which fold bifurcation occurs iteratively (multifolding) in the family, and type-II, in which fold bifurcation occurs only at both ends of the family. Depending on whether both of the chaotic attractors before/after the bifurcation exist in the same area on the phase plane or not, the chaotic attractor bifurcates discontinuously according to "hysteresis" or "interior catastrophe". In the case that a 2^n -band attractor transforms into a 2^{n-1} -band attractor without fold-bifurcated directly unstable fixed points, and a periodic directly unstable fixed point exists very close to an inset of a 2^{n-1} -periodic inversely unstable fixed point, the unstable 2^{n-1} -band attractor is suddenly transformed into a one-band attractor upon touching an inset of the periodic directly unstable fixed point.

Key Words: Nonlinear Vibration, Forced Vibration, Piecewise Linear System, Bifurcation, Chaos, Invariant Curve, Unstable Fixed Point, Heteroclinic Point, Interior Catastrophe

1. 緒 言

第1報⁽¹⁾においては, かみあい誤差をもつ歯車の円周方向振動から導出された非対称復元力を有する運動方程式の周期解の分岐現象について検討した。その結果, 第1報で特に検討した歯車の1次共振点以下の分岐構造については, 厳密解と数値計算結果を比較することによって, ほとんどすべての分岐現象やカオスが生じる過程について解明することができた。

本報では, 第1報に引き続いて, 歯車の1次共振点付近およびそれ以上の回転数範囲における分岐現象について検討する。共振点付近では, カオスの中に無数の“窓”が存在し, Winding numberを調べることにより, 種々の高・超分数調波振動が生じていることを明らかにする。しかし, これらの高・超分数調波振動がランダムに生じるわけではない。同じ周期をもつ高・超分

数調波振動が一つのfamilyを形成し, このfamilyが二つのタイプに分類できることもあわせて報告する。

2. 歯車円周方向振動の運動方程式

第1報⁽¹⁾と同様, 本報においても, 歯面分離を考慮し, かつ分離時に背面当たりではなく歯のばねこわさを近似的に一定として導かれた, 歯車の円周方向振動を表す無次元化された運動方程式について検討する。すなわち,

$$\ddot{x} + c\dot{x} + g(x) = Bc\omega \sin \omega\tau + B\omega^2 \cos \omega\tau \quad \dots\dots\dots (1)$$

ここで, x : 駆動歯車と被動歯車の相対回転角を作用線上に換算した無次元変位, c : 減衰係数, τ : 無次元時間, $g(x)$: 歯面分離に伴う非対称復元力であり, 次式で表される。

$$g(x) = \begin{cases} x & (x \geq -1, A \text{ 領域}) \\ -1 & (x < -1, B \text{ 領域}) \end{cases} \quad \dots\dots\dots (2)$$

なお, 解の求め方および安定性の判別については第1報において述べたとおりである。また, 周期解は次の2種類に分類する⁽¹⁾。

* 原稿受付 平成6年8月26日。

*¹ 正員, 工業技術院機械技術研究所 (〒305 つくば市並木1-2)。*² ヤマハ(株) (〒430 浜松市中沢町10-4)。*³ 正員, 京都大学工学部 (〒606-01 京都市左京区吉田本町)。

nAm : $\tau=\tau_0$ において A 領域から解が始まり, $x=-1$ と $2n$ 回交差する m 周期解.

nBm : $\tau=\tau_0$ において B 領域から解が始まり, $x=-1$ と $2n$ 回交差する m 周期解.

3. 分岐現象

図1は第1報にも示した ω を増加させたときの分岐図である. 本報告では, 図1にみられる $\omega=0.86$ 付近に生じる“窓”や①点, ②点に生じる「内部カタストロフィ」についておもに検討した結果について述べる.

3.1 窓と family

[7周期解と family ($\omega=0.85\sim 0.95$)]

図2(a)は $0.85\leq\omega\leq 0.95$ における分岐図と周期性のある“窓”の部分の解軌道を示しており, $\omega=0.86$ 付近から7周期解とカオスがほぼ交互に生じていることがわかる. さらに, 周期解の分類が可能のように Winding number を計算した結果を図2(b)に示す. この図では第1報⁽¹⁾で述べたとおり, Winding number が一定かつ有理数となっている ω の範囲が周期解の存在可能範囲である. この範囲は「位相ロッキング状態」とも呼ばれる⁽²⁾. なお, 解軌道図において, ノイジーながら周期性が認められる $\omega=0.89$ 付近では, Winding number は有理数となっている. 図2(a), (b)から, $0.85\leq\omega\leq 0.95$ では, 多くの高・超分数調波振動を含む7周期解が存在し, ω が増加するに従って, それらが $5/7\rightarrow 4/7\rightarrow 3/7$ のように7周期の間に軌道が平衡点位置のまわりを回る回転数が減っていくことがわかる. 図2(d)に“窓”の部分の解の波形を示す. この図からも, ω の増加につれて, 回転数, すなわち復元力が変わる境界 ($x=-1$) と波形の交差回数が減っていくようすがよくわかる.

このように断続的に多数の7周期解が生じるメカニズムを明らかにするために, 式(1)から厳密解を求め

図1 $0.35\leq\omega\leq 1.85$ における分岐図, $\tau=0\pmod{2\pi}$ における値

る. 図2(c)に種々の ω に対する7周期の不動点をおもに計算した結果を示している. これらの周期解はいずれも nBm 型である. 図中で太線は完全安定不動点 S , 点線は逆不安定不動点 I , 破線は正不安定不動点 D をそれぞれ表している. なお, 後に現れる記号 ' S ' などは i 番めの j 周期の不動点を示す. 図2(a)と

図2 $0.85\leq\omega\leq 0.95$ における(a)分岐図, トラジェクトリ, (b)Winding number, (c)解曲線(太線: 完全安定不動点, 点線: 逆不安定不動点, 破線: 正不安定不動点)および(d)解の波形

(c)を比較すると、図2(c)の太線部分、つまり fold 分岐した完全安定不動点で“窓”が生じることがわかる。また、図は省略するが、fold 分岐した完全安定不動点は“窓”発生前のカオスアトラクタ内に存在しており、ヒステリシスがなく“窓”が発生する。さらに、各周期解が実際どのように分岐しているかを明らかにするために、7周期解のうち、一つの不動点のみ $0.80 \leq \omega \leq 1.80$ の範囲について示したのが図3であり、さらに $0.85 \leq \omega \leq 0.95$ の部分を拡大したのが図4である。なお、点線で表されている逆不安定不動点の両側には必ず完全安定不動点が存在するが、その存在範囲が狭いときには太線が図中に示されない場合があることに注意する。図3, 4から次のことがわかる。

(1) 分岐図で“窓”として不連続に現れている種々の7周期解は、すべて連続して一つの family⁽³⁾をなす。

(2) 図3, 4において三つの family ①, ②, ③が存在している。これらの family は fold 分岐を数回繰返す family と、解曲線の両端でのみ fold 分岐する family に分類される。本報告では前者を I 型、後者を II 型の family と称することにする。さらに、この family について詳述すると、

I 型の family: この family は fold 分岐(サドルノード分岐)を繰返す多重巻込み(multi-folding)⁽⁴⁾によ

って形成される ①, ② のような family である。例えば、図4の ①の family をみれば、5B7 の正不安定不動点 → fold 分岐 → 5B7 の完全安定不動点 → 5B7 から 4B7 の逆不安定不動点 → 4B7 の完全安定不動点 → fold 分岐 → 4B7 から 3B7 の正不安定不動点 → … のように、multi-folding を繰返しながら解曲線は一つの family を形成する。一見、このような分岐でないようにみえる場合でも、図3の ②, ③の拡大図からわかるように、解曲線は正不安定 → fold 分岐 → 完全安定 → 逆不安定 → 完全安定 → fold 分岐 → 正不安定のパターンを繰返している。完全安定不動点と逆不安定不動点の境界における固有値は -1 であり、周期解はこの境界で flip 分岐して周期倍化される。

II 型の family: この family は図4の $\omega = 0.905$ 付近で現れる ④の family などのように、解曲線の両端でのみ fold 分岐している family である。④の family の場合は、4B7 の完全安定不動点と正不安定不動点からのみ形成されている。

[5, 9 周期解と family ($\omega = 0.95 \sim 1.20$)]

図5(a), (b)は図2(a)に続く分岐図と Winding number を計算した結果である。5周期解および9周期解の“窓”が生じている。図6, 7は5, 9周期解の不動点の一つを計算した結果である。やはり、図6の5周期解でも解は ①, ②の family を形成する。Winding number の小さい 1B5, 2B5 からなる ④の family は、解曲線の両端でのみ fold 分岐する II 型に属する。この

図3 7周期解の解曲線における ①, ②, ③ family (太線: 完全安定不動点, 点線: 逆不安定不動点, 破線: 正不安定不動点, 以下の図も同様)

図4 7周期解の解曲線(拡大図)

図5 $0.95 \leq \omega \leq 1.20$ における (a) 分岐図, トラジェクトリおよび (b) Winding number

場合, fold 分岐→完全安定不動点→逆不安定不動点→完全安定不動点→fold 分岐→正不安定不動点の過程を経て一つの family を形成している。また, ㉔の family は I 型の family に分類される。なお, 解の拡大図の㉔, ㉕, ㉖および㉗の各点の完全安定不動点は図 2 (b) の“窓”㉔および図 5 (b) の㉕, ㉖, ㉗にそれぞれ相当する。図 7 の 9 周期解においても不動点は I 型の㉔の family をなす。しかし, 図 5 (b) の“窓”の部分を示す㉕, ㉖のうち, ㉖部分では逆不安定不動点がなく完全安定不動点と正不安定不動点が接続し, 前述の I 型の family と解の接続が少し異なる部分が存在する。

[3, 4, 6 周期解と family]

分岐図に直接現れていないその他の周期解について調べる。図 8~10 は 3, 4, 6 周期解について不動点を計算した結果である。図 8 の 3 周期解の場合, 1B3 から周期倍分岐した 2B6 の不動点も示してある。㉔の family は I 型である。㉕の family は拡大図㉖から, 図 7 の㉖の部分と同じ解の接続で I 型の family に属していることがわかる。図 9 の 4 周期解の場合, 1B2 から周期倍分岐した 2B4 の不動点からなる㉔の family と II 型の㉕の family が形成される。図 10 の 6 周期解の場合も I 型の㉔の family が形成される。

以上のように, 種々の周期解を求めた結果, それら

の解はある一つの family をなし, その family は二つの型に分類できることが明らかになった。

3.2 $\omega=0.95\sim1.85$ における分岐現象 前に示した図 5 (a) の分岐図から, $\omega=0.95\sim1.00$ において解は 1 バンドアトラクタ→4 バンドアトラクタ→8 バンドアトラクタ→周期倍分岐→2B4→3B4→周期倍分岐→4 バンドアトラクタ→1 バンドアトラクタ→2B6→周期倍分岐→6 バンドアトラクタ→3 バンドアトラクタ→1 バンドアトラクタと遷移する。

[周期倍分岐→2B4→3B4]

2B4→3B4 に至る解曲線は図 9 の㉔の拡大図に示されている。この二つの 2B4 と 3B4 の安定な周期解が同時に存在する ω の範囲では, 2B4 から 3B4 の遷

図 8 3 周期解の解曲線における㉔, ㉕の family

図 6 5 周期解の解曲線における㉔, ㉕の family

図 9 4 周期解の解曲線における㉔, ㉕の family

図 7 9 周期解の解曲線における㉔の family

図 10 6 周期解の解曲線における㉔の family

移過程は ω の増減によって、図9の①の拡大図に示した矢印のような跳躍現象を示す。

[3B4→周期倍分岐→4バンドアトラクタ→

1バンドアトラクタ→2B6]

3B4 から生じる4バンドアトラクタが1バンドアトラクタとなり、図8における⑩の family の1B3が周期倍分岐した2B6になる過程を図11(a), (b)の不变曲線によって説明する。なお、完全な不变曲線を求めるには長大な計算時間を要するので、以下説明に必要な不变曲線のみ図に示している。図11(a)は $\omega=0.970$ [図5(a)の①に相当] における不变曲線である。この図には矢印で示した4バンドアトラクタとともに図8の解曲線の1B3の ${}^1D^3$ の ω 枝を実線、1周期の逆不安定不動点 ${}^2I^1$ の ω 枝を点線で示してある。さらに、4バンドアトラクタの一つとその ω 枝を拡大して示している。この図で斜線で表した ${}^1S^6$ を含む領域が ${}^1S^6$ の解になる吸引領域である。拡大図からわかるように $\omega=0.970$ で4バンドアトラクタは ${}^2I^1$ の ω 枝に接触しようとしている。さらに ω が増加して $\omega=0.9703$ [図5(a)の②に相当] で4バンドアトラクタが ${}^2I^1$ の

ω 枝に接触する、すなわちヘテロクリニック点が存在することになり、1バンドアトラクタになる。しかし、1バンドアトラクタは約200周期を要して、図11(b)の ${}^1S^6$ の吸引領域(${}^1D^3$ の ω 枝が境界)に入り、 ${}^1S^6$ の解に収束することになる。さらに ω が大きくなると、(1B3が周期倍分岐した)2B6は周期倍分岐の後、6バンドアトラクタから3バンドアトラクタに遷移する。

[3バンドアトラクタ→1バンドアトラクタ]

$\omega=0.99746$ [図5(a)の③に相当] になると、この3バンドアトラクタが拡大して図11(c)の不变曲線が示すように ${}^1D^3$ の ω 枝と接触するようになり、ヘテロクリニック構造を生じる。したがって、さらに $\omega=0.9975$ [図5(a)の④に相当] になると、図11(d)に示すように完全に1バンドのカオスアトラクタになる。いわゆる内部カストロフィを生じ、第1報⁽¹⁾の「BA-2」の過程によって、1バンドアトラクタになる。

[①領域におけるカオスアトラクタの拡大]

図1からわかるように、①領域でカオスアトラクタが拡大している。図12は図1における①部分($\omega=1.18$

図11 ⑩の family における種々の ω に対する不变曲線(実線: ${}^1D^3$ の ω 枝, 点線: ${}^2I^1$ の ω 枝, 点: ポアンカレ点, ●: 安定不動点, ○: 不安定不動点)

～1.24)について詳しく調べたものである。図12(a)は図1の①部分の分岐図の拡大図である。この分岐図ではカオスアトラクタのみ生じている。しかし、 $\omega=1.18$ 付近では、図12(c)に不変曲線を示すように1B4の4周期解(図9の $^2S^4$ の解)とカオスアトラクタが共存している。 $^2D^4$ の ω 枝で囲まれた領域が4周期解 $^2S^4$ の吸引領域であり、それ以外はカオスアトラクタの吸引領域である。そこで、1B4の吸引領域を初期値としたときの分岐図を計算した。その結果を図12(b)に示す。この図をみると、4周期解→周期倍分岐→…→8バンドアトラクタ→4バンドアトラクタになってから、 $\omega=1.2196$ 付近で4バンドアトラクタが共存している1バンドカオスアトラクタに突発的に遷移している。このときの遷移状態を $\omega=1.218$ [図12(b)の⑥に相当]、1.2196[図12(b)の⑦に相当]における不変曲線によって明らかにする。 $^2D^4$ の ω 枝を図12(d)、(e)、(f)に実線で示した。 $\omega=1.218$ では、図12(d)とその拡大図[図12(e)]が示すように4バンドア

トラクタと1バンドアトラクタが共存している(斜線部が4バンドアトラクタの吸引領域)。両アトラクタともに $^2D^4$ の ω 枝に接触していない。しかし、 $\omega=1.2196$ [図12(f)]になると、4バンドアトラクタが $^2D^4$ の ω 枝に接触すると同時に×印のように1バンドカオスアトラクタに遷移する。すなわち ω が1.2196より大きくなると、アトラクタはすべての初期値に対して1バンドアトラクタとなる。したがって、分岐図は図12(a)の分岐図と同じになる。このようにして、4バンドのカオスアトラクタが、位相平面上において異なる位置にある1バンドカオスアトラクタに遷移する。すなわち、「ヒステリシス」⁽⁵⁾⁽⁶⁾的な遷移を行う。

さらに ω が大きくなると[図12(g), $\omega=1.23$ (図12(b)の⑧に相当)], 1バンドアトラクタが $^2D^4$ の ω 枝に再び接触してヘテロクリニック構造を生じ、アトラクタが $\omega=1.235$ [図12(b)の⑨に相当, 図12(h)]になると拡大する、いわゆる内部カタストロフィが起きる。図12(b)の分岐に対する大域的な構造の変化を

図12 図1①付近の分岐図および不変曲線(実線: $^2D^4$ の ω 枝, 点: ポアンカレ点, ●: 安定不動点, ○: 不安定不動点)

図13に模式的に示す。この図で斜線部分が実際に分岐図に現れているアトラクタを示す。 $\omega=1.2196$ のとき、境界を形成する ${}^2D^4$ の ω 枝に対して、図中の左の太い矢印が示すように、あらゆる領域の初期値は、一方向に1バンドアトラクタへと吸引される。 $\omega=1.23$ になると、右の太い矢印のように、二つのアトラクタは ${}^2D^4$ の ω 枝に対していずれの向きにも通過できるようになる。したがって、 ${}^2D^4$ の ω 枝の境界は消滅して、4バンドアトラクタと1バンドアトラクタがともに生じるため、新しい1バンドアトラクタとして拡大する。

[M領域におけるカオスアトラクタの拡大]

図1のMの部分もLの部分とまったく同じ大域的構造をたどる。図14(a), (b)はカオスアトラクタの拡

大前後の ${}^1D^5$ (図6のLのfamilyの1B5)の ω 枝(実線)とアトラクタを示している。この場合、 $\omega=1.64$ (図1のLに相当)で、 ${}^1D^5$ の ω 枝と1バンドアトラクタが接触してヘテロクリニック構造が生じ、アトラクタ

図13 二つのアトラクタの安定性を示す模式図

図14 図1L付近の不变曲線(実線： ${}^1D^5$ の ω 枝、点：ポアンカレ点、●：安定不動点、○：不安定不動点)

図15 図1L付近の分岐図および不变曲線(実線： ${}^2D^6$ の ω 枝、破線： ${}^2I^1$ の ω 枝、点線： ${}^1I^2$ の ω 枝、点：ポアンカレ点、●：安定不動点、○：不安定不動点)

が拡大することを示している。

[㊦領域におけるカオス→2B2→1B1]

最後に、図1においてカオスから2周期解を経て1周期解になる㊦部分について調べる。図15(a)は㊦部分を拡大した分岐図である。カオスから突発的に4バンドアトラクタになっている。この部分の解曲線は図9の拡大図㊦部分である。㊦部分には1B1がfold分岐した正不安定不動点は存在しない。したがって第1報の定義によれば、 ω が大きくなるにつれて、1バンドアトラクタ→2バンドアトラクタ→4バンドアトラクタ→…のような「BA-1」のシーケンスになるはずである。しかし、図15(a)の分岐図が示すように、このようなシーケンスとならない。すなわち、図15(b), (c)の $\omega=1.67785$ [図15(a)の㊦に相当], 1.678 [図15(a)の㊧に相当]のポアンカレマップが示すとおり、図15(b)のカオスから急激に図15(c)の4バンドアトラクタになる。この理由も不変曲線によって説明できる。図15(d), (e)は図15(c)の左下の部分の不変曲線およびポアンカレマップを示している。これらの図で破線は $^2I^2$ の ω 枝、点線は $^1I^2$ の ω 枝であり、×印は1400周期後のポアンカレ点を示す。実線は図10の解曲線にある6周期解の正不安定不動点 $^2D^6$ の ω 枝を示している。 $\omega=1.678$ では、4バンドのアトラクタは $^1I^2$ の ω 枝に接触しようとしている。 $\omega=1.67785$ では、1400周期までに4バンドアトラクタは $^1I^2$ の ω 枝と接触し、2バンドアトラクタになっているが、アトラクタは $^2I^1$ の ω 枝とは接触せず、ヘテロクリニック点が存在しないので、1バンドアトラクタとはならない。しかし、1400周期後に×印で示されたポアンカレ点が、 $^1I^2$ の ω 枝と近接して存在する $^2D^6$ の ω 枝に接触してアトラクタは急激に図15(b)のような大きなバンドアトラクタになる。したがって、安定な2バンドアトラクタは存在せず、1バンドアトラクタから4バンドアトラクタに遷移することになる。

このように、fold分岐した正不安定不動点がない場合の通常のシーケンス、……→8バンドアトラクタ→4バンドアトラクタ→2バンドアトラクタ→1バンドアトラクタと異なり、第1報の「BA-2」に相当する分岐を行う。すなわち、 2^n バンドアトラクタが 2^{n-1} 周期の逆不安定不動点 $I^{2^{n-1}}$ の ω 枝に接触して 2^{n-1} バンドアトラクタになる場合を考える。このとき、ある m 周期の正不安定不動点 D^m が $I^{2^{n-1}}$ の ω 枝に近接して存在する場合、 2^{n-1} バンドアトラクタは数千周期を要して、正不安定不動点 D^m の ω 枝に接触して突発的に1バンドアトラクタになる。

4. 結 言

かみあい誤差のある歯車の円周方向振動を表す、非対称復元力を有する強制振動系の1次共振点付近以降における分岐現象について詳細に検討を加えた。その結果、以下のような結論がえられた。

(1) 分岐図、リアプノフ指数、Winding number および不変曲線を数値計算で求めることによって、分岐現象やカオスが発生する過程について解明することが可能である。

(2) 分岐図で、“窓”として不連続に現れる種々の高・超分数調波振動の周期解はすべて連続して一つのfamilyをなし、そのfamilyはI型とII型に分類できる。

I型のfamily: fold分岐(サドルノード分岐)を繰返す、多重巻込み(multi-folding)によって形成される。解曲線は正不安定→fold分岐→完全不安定→逆不安定→完全安定→fold分岐→正不安定のパターンを何回も繰返す。

II型のfamily: 解曲線の両端でのみfold分岐するfamily。

(3) カオスアトラクタの不連続な分岐は、分岐後のカオスアトラクタと分岐前のカオスアトラクタが位相平面上において、同じ位置に含まれるか否かによって、ヒステリシスと内部カストロフィに分類される。また、この二つの分岐現象がともに区分線形な非対称復元力を有する系においても生じることを明らかにした。

(4) fold分岐した正不安定不動点が存在せず、 2^n バンドアトラクタが 2^{n-1} 周期の逆不安定不動点 $I^{2^{n-1}}$ の ω 枝に接触して 2^{n-1} バンドアトラクタになる次の場合、安定な 2^{n-1} バンドアトラクタは生じない。つまり、ある周期の正不安定不動点 $I^{2^{n-1}}$ の ω 枝に近接して存在する場合である。このとき、 2^{n-1} バンドアトラクタは正不安定不動点の ω 枝に接触して突発的に1バンドアトラクタに遷移する。

文 献

- (1) 黒田・ほか2名, (第1報), 機論, 61-583, C(1995), 808.
- (2) 高安編, フラクタル科学, (1987), 72, 朝倉書店.
- (3) Kawakami, H. (ed), *Some Problems on the Theory of Dynamical Systems in Applied Sciences*, (1992), 119, World Scientific.
- (4) 野口・ほか3名, 電子通信学会技術研究報告, NLP88-24 (1988), 37.
- (5) Thompson, J. M. T. and Stewart, H. B. (武者・橋口訳), 非線形力学とカオス, (1988), 275, オーム社.
- (6) 塚本・ほか2名, 電子通信学会技術研究報告, NLP91-12 (1991), 15.