対称積層されたクロスプライ厚肉長方形板の三次元振動解析*

成田 吉 弘^{*1}, 太田 佳 樹^{*1}, 森 賀 茂 樹^{*2}Three-Dimensional Vibration Analysis of Symmetrically Laminated,
Cross-Ply Thick Rectangular Plates

Yoshihiro NARITA, Yoshiki OHTA and Shigeki MORIKA

Three-dimensional vibration analysis is proposed for determining the natural frequencies of a symmetrically laminated, cross-ply thick rectangular plate with any set of boundary conditions along the edges. For this purpose, the Ritz method is used with displacement functions containing boundary indices. Numerical results are given for cross-ply laminated graphite/epoxy plates having different thickness ratios, and the validity of the solutions is established by convergence tests and comparison with other results. The range of applicability of the present three-dimensional and various two-dimensional plate theories is discussed.

Key Words: Vibration of Continuous System, Three-Dimensional Analysis, Ritz Method, Laminated Plate, Composite Material, Thick Plate, Natural Frequency, Plate Theory

1. は じ め に

工業分野で広く用いられている繊維強化プラスチック(FRP)材料は, その特徴である高い比強度と比剛性により構造物の軽量化に大きく貢献している. このFRPを積層した積層板は, 繊維配向角や積層順序を変えることにより, さまざまな特性を作り出すことができる. しかし従来の金属など等方性材料の構造特性とは異なるため, 構造設計に際してもその力学的特性の相違を考慮しなくてはならない.

基本的な構造要素であるFRP積層平板の振動については活発な研究がなされ, 海外や国内での研究状況も紹介されている⁽¹⁾⁻⁽³⁾. その文献の多くは古典板理論(CPT)に基づくもので, 板厚方向のせん断変形が無視されている. しかしFRP材料は, せん断弾性率が繊維方向の縦弾性率に比してかなり小さく, 厚さが増すほど面外のせん断変形が無視できなくなる. このため面外のせん断変形も考慮する一次せん断変形理論(FSDT)⁽⁴⁾や高次せん断変形理論(HSDT)⁽⁵⁾などの理論も使われている.

他方, かなり厚いFRP構造物の問題については三次元弾性論に従った解析をするのが順当であり, かつ一般性がある. また有限要素法による数値解や, 二次元板理論を用いた解析結果の妥当性を検証するためにも, 三次元理論に基づく解析法は重要である.

本論文では三次元異方性弾性論に従って, 対称にクロスプライ積層されたFRP厚肉長方形板の自由振動をリッツ法を用いて解析する. はじめにラミナー一枚の応力-ひずみ関係から, 板全体のひずみエネルギー式を変位により表す. この最大ひずみエネルギー式と最大運動エネルギーよりはん関数を表し, 変分原理を適用することにより積層された六面体の振動数方程式を導出する. このはん関数の極小化の過程で, 六面体の各境界面の幾何学的境界条件を任意に選択可能なように, 変位関数に境界条件インデックス⁽⁶⁾⁽⁷⁾の考え方を導入する. その関数中の未定係数によりはん関数を極小化して, 振動数方程式を与える. この変位関数の導入により, 3方向の変位に関する境界条件の任意の組合せが各境界面に沿って可能となる. この振動数方程式を用いて, 炭素繊維で強化されたCFRP厚板の固有振動数を計算し, CPT, FSDTによる結果と比較検討を行い, 各平板理論の適用範囲などを考察する.

* 原稿受付 平成6年9月12日.

*¹ 正員, 北海道工業大学 (〒006 札幌市手稲区前田 7-15).*² 学生員, 北海道工業大学大学院 [現: 藤倉ゴム].

2. 解析方法

2・1 三次元理論によるエネルギー式 図1のように直方体の中心に原点O、辺に平行に x, y, z 軸をとり、各方向の寸法を a, b, c とする。 x 軸または y 軸に平行に強化繊維(材料主軸)をもつFRPのラミナが、 z 方向に全体で L 枚、 xy 平面に関して対称に積層されている。

k 層めのラミナに着目し、その材料主軸を1, 2, 3軸(本論文ではクロスプライ積層のため、1軸は x または y 軸、2軸も同様、3軸は z 軸に一致する)とすると、そのラミナ内部での応力-ひずみ関係式は、

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \end{Bmatrix}^{(k)} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} \\ & Q_{22} & Q_{23} \\ \text{sym.} & & Q_{33} \end{bmatrix}^{(k)} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \end{Bmatrix} \quad \cdots \cdots (1)$$

$$\begin{Bmatrix} \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}^{(k)} = \begin{bmatrix} Q_{44} & 0 & 0 \\ & Q_{55} & 0 \\ \text{sym.} & & Q_{66} \end{bmatrix}^{(k)} \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad \cdots \cdots (2)$$

と表される。ただし、 $Q_{ij}(i, j=1, 2, \dots, 6)$ は弾性定数

$$\left. \begin{aligned} Q_{11} &= (1 - \nu_{32}\nu_{23})E_1/\Delta \\ Q_{12} &= (\nu_{21} + \nu_{31}\nu_{23})E_1/\Delta \\ Q_{13} &= (\nu_{31} + \nu_{21}\nu_{32})E_1/\Delta \\ Q_{22} &= (1 - \nu_{31}\nu_{13})E_2/\Delta \\ Q_{23} &= (\nu_{32} + \nu_{31}\nu_{12})E_2/\Delta \\ Q_{33} &= (1 - \nu_{21}\nu_{12})E_3/\Delta \\ Q_{44} &= G_{23} \\ Q_{55} &= G_{31} \\ Q_{66} &= G_{12} \end{aligned} \right\} \quad \cdots \cdots (3)$$

ただし

$$\Delta = 1 - \nu_{21}\nu_{13}\nu_{32} - \nu_{12}\nu_{23}\nu_{31} - \nu_{13}\nu_{31} - \nu_{32}\nu_{23} - \nu_{21}\nu_{12}$$

となる(添字 k は省略)。ここで、 E_1, E_2, E_3 は k 層めラミナの1, 2, 3軸方向の縦弾性係数、 G_{23}, G_{31}, G_{12} はせん断弾性係数、 $\nu_{12}, \nu_{23}, \nu_{31}, \nu_{21}, \nu_{32}, \nu_{13}$ はポアソン比である。

自由振動における、 x, y, z 方向の最大変位(振幅)を、 $u(x, y, z), v(x, y, z), w(x, y, z)$ とする。 x, y, z に関する偏微分を、それぞれ $(\cdot), (\cdot), (\cdot)$ により示すと、 k 層めのラミナでは、微小変形の範囲内でひずみ-変位関係式は

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \dot{u}, \quad \varepsilon_y = \dot{v}, \quad \varepsilon_z = \dot{w} \\ \gamma_{yz} &= \dot{w} + \dot{v}, \quad \gamma_{zx} = \dot{u} + \dot{w}, \quad \gamma_{xy} = \dot{v} + \dot{u} \end{aligned} \right\} \quad \cdots \cdots (4)$$

で与えられる。式(1), (2), (4)より、最大ひずみエネルギー式は

$$U_{\max} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^L \int_{V_k} \{\mathbf{x}\}^T [\mathbf{Q}]^{(k)} \{\mathbf{x}\} dV_k \quad \cdots \cdots (5)$$

(a) 板の座標系と境界面の番号

(b) 板厚方向の積層状態

図1 クロスプライ厚肉長方形板

となる。ただし V_k は、 k 層めのラミナの体積を示し、 $\{\mathbf{x}\}$ はひずみを変位で表したベクトル

$$\{\mathbf{x}\} = \{\dot{u} \quad \dot{v} \quad \dot{w} \quad \dot{w} + \dot{v} \quad \dot{u} + \dot{w} \quad \dot{v} + \dot{u}\}^T \quad \cdots \cdots (6)$$

また $[\mathbf{Q}]^{(k)}$ は式(1), (2)の係数行列を小行列とする 6×6 行列である。

最大運動エネルギーは、 ω を自由振動の角振動数、 ρ_k は k 層めのラミナの密度と考えると

$$T_{\max} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^L \rho_k \omega^2 \int_{V_k} \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} dV_k \quad \cdots \cdots (7)$$

である。

2・2 リッツ法による振動数方程式 2・1節のエネルギー式の最大値より得られるはん関数から、系の振動数方程式を導く。この際に、変位関数中の未定係数について極小化する方法は、リッツ法として知られている。以降の解析を簡単化するため、以下の無次元量を導入する。

$$\xi = 2x/a, \quad \eta = 2y/b, \quad \delta = 2z/c$$

(無次元座標),

$$\alpha = a/b, \quad \beta = a/c$$

(寸法比),

$$\Omega = \omega a^2 (\rho_0 c / D_0)^{1/2}$$

(無次元振動数パラメータ),

$$D_0 = \frac{E_2 c^3}{12(1 - \nu_{12}\nu_{21})}$$

(基準剛性),

.....(8)

振動数パラメータには種々の定義が考えられるが、ここでは平板理論の結果との比較が容易なように、平板

の曲げ剛性 D_0 と平均密度 ρ_0 を用いて Ω を定めた。

平板のような連続体の自由振動解析には、べき級数を用いるリッツ法が精度良い近似解を与えることがわかっている⁽⁶⁾⁽⁷⁾。そこで変位関数を

$$\left. \begin{aligned} u(\xi, \eta, \delta) &= \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^J \sum_{k=0}^K A_{ijk} X_i(\xi) Y_j(\eta) Z_k(\delta) \\ v(\xi, \eta, \delta) &= \sum_{l=0}^L \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N B_{lmn} X_l(\xi) Y_m(\eta) Z_n(\delta) \\ w(\xi, \eta, \delta) &= \sum_{p=0}^P \sum_{q=0}^Q \sum_{r=0}^R C_{pqr} X_p(\xi) Y_q(\eta) Z_r(\delta) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (9)$$

とする。ここで A_{ijk} , B_{lmn} , C_{pqr} は未定係数, X , Y , Z は、以下のべき関数である。

$$\left. \begin{aligned} X_i(\xi) &= \xi^i (\xi+1)^{B_{11}} (\xi-1)^{B_{31}} \\ X_l(\xi) &= \xi^l (\xi+1)^{B_{12}} (\xi-1)^{B_{32}} \\ X_p(\xi) &= \xi^p (\xi+1)^{B_{13}} (\xi-1)^{B_{33}} \\ Y_j(\eta) &= \eta^j (\eta+1)^{B_{21}} (\eta-1)^{B_{41}} \\ Y_m(\eta) &= \eta^m (\eta+1)^{B_{22}} (\eta-1)^{B_{42}} \\ Y_q(\eta) &= \eta^q (\eta+1)^{B_{23}} (\eta-1)^{B_{43}} \\ Z_k(\delta) &= \delta^k (\delta+1)^{B_{51}} (\delta-1)^{B_{61}} \\ Z_n(\delta) &= \delta^n (\delta+1)^{B_{52}} (\delta-1)^{B_{62}} \\ Z_r(\delta) &= \delta^r (\delta+1)^{B_{53}} (\delta-1)^{B_{63}} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (10)$$

式(10)中の B_{ij} は図1に示した各境界面での拘束条件を表す境界条件インデックスであり、これに適切な値(整数)を代入することで任意の幾何学的境界条件を満足させることが可能になる。ここで、1番目の添字 i は図1の直方体の面の番号を表し($i=1, 2, \dots, 6$)、2番目の添字 j は各変位の拘束される方向($j=1, 2, 3$: それぞれ x, y, z 方向)を表し、自由(無拘束)な場合は0、剛に拘束する場合は1を与える。平板の場合には、その上下面($z=\pm c/2$)では変位を拘束しないので、 $B_{51}=B_{52}=B_{53}=B_{61}=B_{62}=B_{63}=0$ とおけばよい。

次に最大ひずみエネルギーと最大運動エネルギーからつくられるはん関数 $F = T_{\max} - U_{\max}$ を極小化する。

$$\frac{\partial F}{\partial A_{ijk}} = \frac{\partial F}{\partial B_{lmn}} = \frac{\partial F}{\partial C_{pqr}} = 0 \quad (\bar{i}=0, 1, 2, \dots, I; \bar{j}=0, 1, 2, \dots, J; \dots) \dots\dots\dots (11)$$

その結果、固有振動数に関するパラメータ Ω を含む、連立一次方程式

$$\left[\begin{array}{ccc} E_{i\bar{i}j\bar{j}k\bar{k}} & E_{i\bar{i}l\bar{l}m\bar{m}n\bar{n}} & E_{i\bar{i}p\bar{p}q\bar{q}r\bar{r}} \\ & E_{l\bar{l}m\bar{m}n\bar{n}} & E_{l\bar{l}p\bar{p}m\bar{m}q\bar{q}n\bar{n}} \\ \text{sym.} & & E_{p\bar{p}q\bar{q}r\bar{r}} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} A_{ijk} \\ B_{lmn} \\ C_{pqr} \end{array} \right\} = 0 \quad \dots\dots\dots (12)$$

が得られる。式(12)の固有値問題を解くことで、系の固有振動数、固有振動モードを決定することができ

表1 変位関数における対称性の分類
(S: 対称分布, A: 逆対称分布)

u			v			w		
i	j	k	l	m	n	p	q	r
A	S	A	S	A	A	<u>S</u>	<u>S</u>	<u>S</u>
A	S	S	S	A	S	<u>S</u>	<u>S</u>	<u>A</u>
A	A	A	S	S	A	<u>S</u>	<u>A</u>	<u>S</u>
A	A	S	S	S	S	<u>S</u>	<u>A</u>	<u>A</u>
S	S	A	A	A	A	<u>A</u>	<u>S</u>	<u>S</u>
S	S	S	A	A	S	<u>A</u>	<u>S</u>	<u>A</u>
S	A	A	A	S	A	<u>A</u>	<u>A</u>	<u>S</u>
S	A	S	A	S	S	<u>A</u>	<u>A</u>	<u>A</u>

る。式(12)中の係数の詳細は紙面の関係で省略する。

2.3 振動モード形の分類 対象とする積層板の形状、材料異方性、境界条件に对称性が存在する場合、変位関数(9)に对称性の仮定が導入でき、振動数方程式(12)の固有値計算の規模を減じることができる。変位関数が三重級数で表される本三次元解析では、一方向自由度の三乗に比例して計算規模が拡大するため、対称性の利用が特に重要である。

本報では、クロスプライ対称積層の正六面弾性体を扱っており、境界条件に对称性があれば図1に示す yz , xz , xy の3平面に関して変形の対称性が仮定できる。式(9)の級数において、変位の対称分布を表す偶数のべき次数を S (対称)、逆対称分布を表す奇数のべき次数を A (逆対称) で表すと、その組合せは三次元弾性論に基づく考察から、表1に示す8種類に分類される。このモード形の表示に、下線を付した3文字を用いる。したがって、始めの2文字は yz , xz 面に関する w の対称、逆対称分布を意味する。最後の1文字の S は、対応する u , v の z 方向分布が逆対称となるため曲げの卓越する変形(bending mode), A では u , v の分布が対称となり xy 面内の伸縮が卓越する変形(stretching mode)を示す。

3. 数値計算と考察

以上の三次元理論に基づく解析方法を用いて、上下面を除く4面(長方形の4辺)での3方向の変位 u , v , w の拘束条件(剛に拘束または自由)を指定可能な積層厚板の固有振動数の計算プログラムを作成した。積層板は単一の複合材料からなり、各層の厚さは等しいとした。以下の計算例では、対称積層のクロスプライ積層厚板を扱い、強い異方性($E_1/E_2=15.4$)を示す CFRP 材料の定数⁽⁸⁾ Graphite/Epoxy

$$\left. \begin{aligned} E_1 &= 138 \text{ GPa}, E_2 = 8.96 \text{ GPa} \\ G_{12} &= 7.1 \text{ GPa}, \nu_{12} = 0.3 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (13)$$

を用い、式(3)に使われる他の定数はラミナが一方方向強化材であることから面外等方性も仮定して

$$\left. \begin{aligned} E_3 &= E_2, G_{31} = G_{12}, \\ G_{23} &= E_2/[2(1+\nu_{23})], \nu_{13} = \nu_{12}, \\ \nu_{21} &= \nu_{31} = \nu_{12}E_2/E_1, \nu_{23} = \nu_{32} = 0.3 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (14)$$

とにおいて計算を行った。

境界条件については、平板で使われる固定(C)、単純支持(S)、自由(F)を含め、拘束条件の任意の組合せが可能である。例えば、全周固定(CCCC)、単純支持(SSSS)、片持ち(CFFF)など代表的な支持方法に対応して式(10)中の境界条件インデックスの採り方は、全周単純支持板(SSSS plate)

$$B_{ij}=0 (i=1, 3; j=1) \quad (\text{face 1, 3 の変位 } u \text{ を自由})$$

$$B_{ij}=1 (i=1, 3; j=2, 3)$$

(face 1, 3 の変位 v, w を拘束)

$$B_{ij}=0 (i=2, 4; j=2) \quad (\text{face 2, 4 の変位 } v \text{ を自由})$$

$$B_{ij}=1 (i=2, 4; j=1, 3)$$

(face 2, 4 の変位 u, w を拘束)

全周固定板(CCCC plate)

$$B_{ij}=1 (i=1, 2, 3, 4; j=1, 2, 3) \quad (\text{全変位を拘束})$$

片持ち板(CFFF plate)

$$B_{ij}=0 (i=2, 3, 4; j=1, 2, 3)$$

(face 2, 3, 4 の全変位を自由)

$$B_{ij}=1 (i=1; j=1, 2, 3)$$

(face 1 の x, y, z 方向変位を拘束)

となる。

変位関数(9)は級数形であり、数値計算にあたっては有限項で打ち切る必要がある。表2は、3層[0/90/0] (数字は角度を示し、0, 90はそれぞれ0°, 90°を意味する)のクロスプライ積層板の基本次と2次振動数 Ω_1, Ω_2 の収束状況を示す。支持条件は全周で単純支持と固定とした。変位 u, v, w に対して等しい項数($i=l=p, j=m=q, k=n=r$)を採った上で、各変位内の x, y 方向の項数 $i=j$ と z 方向の項数 k を独立に変化させた。

全周単純支持板と固定板は3平面に関して対称性があるため、表1の分類を利用すると行列式の次数は「 $(i/2) \times (j/2) \times (k/2) \times 3$ 」となり、本プログラムでも表3に示す次数で実際の計算を行った。また板厚比は、 $a/c=100, 10, 1$ とおき、それぞれ薄板、厚板、極めて厚い板(立方体)を代表させた。

単純支持板の振動数 Ω を見ると、 $a/c=100, 1$ に対して収束が早く、特に $a/c=1$ の Ω_1 では、 $(4 \times 4 \times 4)$ 解においてすでに4けたで収束している。後に表5で示

すが、他は曲げ変形モード(bending mode)であるのに対し、この Ω_1 は面内変形モード(stretching mode)である。固定板では、逆に面内変形モードの $a/c=1$ の Ω_2 において、 k の項数に対する収束がやや遅くなっている。このように振動次数により相違はあるが、全体的にみて本法による解の収束は良好であり、本論文の以降の計算では $8 \times 8 \times 8$ の項数を用いることとした。

表4は、本理論による振動数 Ω を他の著者により求められた解と比較した。(a)は、等方性($\nu=0.3$)のかなり厚い($a/c=2$)全周自由板について、Hanna⁽⁹⁾らにより、一次せん断変形理論(FSDT)と高次せん断変形理論(HSDT)を用いて求められた結果である。比較的低次の $\Omega_1 \sim \Omega_3$ について本解は、HSDTとよく一致

表2 3層クロスプライ正方形板の無次元振動数 Ω の収束状況($a/b=1, [0/90/0]$)

i x j / k	Ω_1			Ω_2		
	4	6	8	4	6	8
(a) S S S S plate						
$a/c = 100$						
4x4	44.26	44.26	44.25	82.98	82.98	82.97
6x6	44.25	44.24	44.24	72.85	72.85	72.85
8x8	44.25	44.24	44.24	72.70	72.70	72.69
$a/c = 10$						
4x4	39.38	39.23	39.16	72.77	72.63	72.55
6x6	39.38	39.22	39.15	64.71	64.55	64.47
8x8	39.38	39.22	39.15	64.58	64.43	64.35
$a/c = 1$						
4x4	9.659	9.659	9.659	10.30	10.25	10.20
6x6	9.659	9.659	9.659	10.30	10.25	10.20
8x8	9.659	9.659	9.659	10.30	10.25	10.20
(b) C C C C plate						
$a/c = 100$						
4x4	93.48	93.45	93.44	124.7	124.7	124.7
6x6	93.17	93.15	93.14	123.6	123.6	123.5
8x8	93.12	93.10	93.09	123.5	123.5	123.5
$a/c = 10$						
4x4	64.20	63.80	63.54	91.58	91.26	91.04
6x6	64.09	63.68	63.41	90.64	90.30	90.07
8x8	64.06	63.64	63.37	90.57	90.22	89.99
$a/c = 1$						
4x4	11.31	11.22	11.15	15.75	15.56	15.36
6x6	11.30	11.22	11.15	15.75	15.56	15.35
8x8	11.30	11.22	11.15	15.75	15.56	15.35

表3 項数に対する振動数方程式の次数

i x j / k	4	6	8
4x4	24	36	48
6x6	54	81	108
8x8	96	144	192

している。ここで Ω は文献(9)の変位場の仮定に含まれない面内変形モードである。(b)は三次元理論に基づく Srinivas ら⁽¹⁰⁾ による等方性($\nu=0.3$)の全周単純支持板の厳密解であり、本解は一部を除き5けたの精度で一致している。(c)は、4層板 $[0/90/90/0]$ のクロスプライ厚板($a/c=5$)について、HSDT⁽¹¹⁾⁽¹²⁾ と 3DT⁽¹³⁾ による結果の比較である。なお材料定数には、

$$G_{12}/E_2=0.6, G_{23}/E_2=0.5$$

$$\nu_{12}=\nu_{23}=0.25$$

の値と式(14)の関係式を用いている。

以上の表4の比較により本解は、他の3DTとHSDTによる低次振動数とよく一致していることがわかる。また振動数に多少の相違がある場合も、本結果が他より低い数値を与えていることは、板厚方向の変形の自由度をより多く考慮している効果と思われる。

次に各理論の板厚比に対する適用範囲を評価するため、同一解析法を用いて解法の相違から生じる影響を除いて計算した結果を示す。表5は、全周単純支持された3層のクロスプライ積層板 $[0/90/0]$ について、古典薄板理論(CPT)⁽⁶⁾ と FSDT⁽⁷⁾、本3DTを用いて求めた振動数 Ω を与える。著者等の既報⁽⁶⁾⁽⁷⁾ は、本3

DTと同様に境界条件インデックスをもつべき級数を変位関数として、リッツ法を適用している。この解析法では採用する項数によって数値が多少異なるため、いずれのCPT, FSDT, 3DTの解においても、一つの級数に関して同一の項数(8項)を採用した。また文献(7)では、 $G_{23}=E_2/2$ としていたが、ここでは式(14)に合せて $G_{23}=E_2/[2(1+\nu_{23})]$ と修正し再計算した。以上の設定から、三次元理論と平板理論(CPT, FSDT)の適用性を公平な条件で比較できると考えられる。

板厚比は $a/c=100, 10, 1$ としたが、CPTでは振動数パラメータ Ω の値に板厚の影響は現れない。FSDTではせん断補正係数 k が必要となるが、よく用いられる三つの値($k=5/6, \pi^2/12, 2/3$)⁽⁷⁾ の内、最大と最小の値 $k=5/6$ と $2/3$ について振動数を求めた。力学的には、 k 値が小さいほどせん断剛性は小さく評価され、

表5 各理論に基づく3層クロスプライ単純支持正方形板の同一解析法による無次元振動数 Ω の比較($a/b=1$, $[0/90/0]$, CPT:古典板理論, FSDT:一次せん断変形理論(せん断補正係数), 3DT:三次元理論)

表4 三次元理論とせん断変形理論に基づく他の文献による振動数 Ω との比較($a/b=1$, FSDT:一次せん断変形理論, HSDT:高次せん断変形理論, 3DT:三次元理論)

(a) Isotropic FFFF plate ($a/c=2$)					
	Ω_1	Ω_2	Ω_3	Ω_4	Ω_5
FSDT ⁽⁹⁾	8.757	12.43	14.83	--	17.50
HSDT ⁽⁹⁾	8.793	12.53	14.99	--	17.69
3DT(Present)	8.780	12.52	14.96	16.07	17.03
(mode)	AAS	SSS	SSS	AAA	SAS
(b) Isotropic SSSS plate					
	Ω				
a/c	2	2	$\sqrt{10}$	$\sqrt{10}$	4
3DT ⁽¹⁰⁾	12.426	18.210	31.065	45.525	49.703
3DT(Present)	12.426	18.210	31.066	45.530	49.703
(mode)	SSS	SSA	SAS, ASS	SAA, ASA	AAS
(c) Cross-ply SSSS plate $[0/90/90/0]$					
	Ω_1 ($a/c=5$, SSS mode)				
E_1/E_2	10	20	30	40	
HSDT ⁽¹¹⁾	28.64	33.01	35.59	37.36	
HSDT ⁽¹²⁾	28.57	32.95	35.55	37.34	
3DT ⁽¹³⁾	28.35	33.07	35.55	37.22	
3DT(Present)	28.55	32.83	35.30	36.96	

SSSS plate					
	Ω				
CPT ⁽⁶⁾	44.31	72.80	129.8	157.4	177.2
<u>a/c = 100</u>					
FSDT(k=5/6)	44.25	72.70	129.5	156.7	176.4
FSDT(k=2/3) ⁽⁷⁾	44.24	72.68	129.5	156.5	176.2
3DT(Present)	44.24	72.69	129.5	156.5	176.2
(mode) [*]	SSS	SAS	SSS	ASS	AAS
(dif.CPT) [#]	(0.2%)	(0.2)	(0.2)	(0.6)	(0.6)
<u>a/c = 10</u>					
FSDT(k=5/6)	39.90	64.84	109.9	113.6	128.5
FSDT(k=2/3)	39.05	63.50	106.9	107.6	122.2
3DT(Present)	39.15	64.35	108.4	110.0	123.7
(mode) [*]	SSS	SAS	ASS	SSS	AAS
(dif.CPT) [#]	(13.2%)	(13.1)	(19.7)	(45.2)	(43.2)
(dif.FSDT) ^{**}	(1.9%)	(0.8)	(1.4)	(3.3)	(3.9)
3DT(Present)	96.59				
(mode) ^{**}	SAA, ASA				
<u>a/c = 1</u>					
FSDT(k=5/6)	10.06	12.47	13.10	15.76	17.25
FSDT(k=2/3)	9.131	11.96	12.49	14.23	15.51
3DT(Present)	10.20	12.29	12.66	15.82	17.05
(mode) [*]	SSS	ASS	SAS	SAS	SSS
(dif.FSDT) ^{**}	(-1.4%)	(1.5)	(3.5)	(-0.4)	(1.2)
3DT(Present)	9.659	13.69			17.17
(mode) ^{**}	SAA, ASA	SSA			SSA

(mode)*: bending mode, (mode)**: stretching mode,
 (dif.CPT)*: difference from CPT (%),
 (dif.FSDT)**: difference from FSDT($k=5/6$) (%).

振動数 Ω も小さくなる。

結果を見ると、薄板($a/c=100$)では本3DTはFSDTとほぼ4けたで一致し、CPTとも

$$(\text{dif. CPT}) = \frac{\Omega_{\text{CPT}} - \Omega_{3\text{D}}}{\Omega_{3\text{D}}} \times 100 \quad (\%) \cdots \cdots (15)$$

により求めた表に示す差異は、最大でも Ω_3 の 0.6% である。しかし厚板($a/c=10$)になると、3DTはCPTと13~43%もの差を示し、適用の限界を超えていると言える。式(15)と同様に求めた3DTとFSDT($k=5/6$)との差異は、 $\Omega_1 \sim \Omega_3$ では2%以下であり、実用上十分な精度を与えている。また補正係数 $k=2/3$ を用いた振動数は、全て3DTより小さく、本リッツ法が解の上限値を与えることを考慮すると、せん断剛性を過小評価しているといえる。また $a/c=10$ では曲げ変形モード(モード記号の末尾がS)に加えて、面内の伸縮モード(末尾がA)が一つ現れている。このモードはSAAとASAの二つが、対称性により同一振動数値

を与えた縮退モードである。これらは曲げ変形のみを仮定した解析⁽⁶⁾⁽⁷⁾では求められないため、行を変えて表示した。

上に述べた傾向は、立方体($a/c=1$)ではより顕著になり、FSDT($k=5/6$)は3DTに対し、-2~4%の範囲内の差異を与える。また三つの面内の伸縮モードが現れる。FSDT($k=2/3$)では、過小評価がさらに明白になり、本3DTより Ω_1 で10%以上小さい値を示す。

表6は表5と同様に、全周固定された3層クロスプライ積層板[0/90/0]の振動数 Ω を、CPT⁽⁶⁾、FSDT⁽⁷⁾、本3DTについて与える。全体的には、全周単純支持板と同様の傾向を見せる。薄板($a/c=100$)では3DTはFSDTとCPTとよく一致するが、その差異は表5よりやや大きい。厚板($a/c=10$)では、3DTはCPTと平均60%もの差を示す。FSDT($k=5/6$)との差異は、 $\Omega_1 \sim \Omega_3$ では単純支持板のほぼ2倍だが、逆に Ω_4 、 Ω_5 では単純支持板より小さい差となる。また補正係数 $k=2/3$ を用いた振動数は、単純支持板と同様に全て3DTより小さい。立方体($a/c=1$)ではFSDT($k=5/6$)は3DTに対し、全て低い値を与えている。このようにFSDTでは、 $k=5/6$ においてさえ、せん断剛性に対する過小評価が明白となっている。

4. 結 論

任意の板厚をもつ対称積層されたクロスプライ積層板の自由振動問題の解析法を提案した。このため三次元異方性弾性論により各層の応力-ひずみ関係式を表し、これから積層板全体の最大ひずみエネルギーを求めた。これを最大運動エネルギーとともにはん関数に表し、リッツ法により積層板の振動数方程式を得た。この際、変位関数を境界条件インデックスをもつ3重のべき級数で表し、周辺面上の任意の変位を拘束できるようにした。さらに境界条件に対称性がある場合に振動モード形の分類が可能なことを示し、その利用により計算時間の短縮を可能とした。

数値計算において、比較的強い異方性をもつCFRPからなる対称積層長方形板の固有振動数を求め、以下の結論を得た。

(1) 板厚比 $a/c=100$ から1までの広い範囲の形状に対して、本三次元解析法により固有振動数の計算が可能なこと、また全周単純支持板と固定板に対して級数解の収束性が良好であることを示した。

(2) 他の著者による三次元解析解と比較を行った結果、非常に厚い場合でも良好な一致を得た。また高次せん断変形理論の解との比較では、低次振動数でよく一致した。

表6 各理論に基づく3層クロスプライ固定支持正方形板の同一解析法による無次元振動数 Ω の比較($a/b=1$, [0/90/0], CPT:古典板理論, FSDT:一次せん断変形理論(せん断補正係数), 3DT:三次元理論)

C C C C plate		Ω				
CPT ⁽⁶⁾		93.63	124.0	185.3	243.6	264.9
<u>$a/c=100$</u>						
FSDT($k=5/6$) ⁽⁷⁾		93.13	123.4	184.6	240.6	261.7
FSDT($k=2/3$) ⁽⁷⁾		93.00	123.2	184.4	239.9	260.9
3DT(Present)		93.09	123.5	184.9	240.1	261.2
(mode)*		SSS	SAS	SSS	ASS	AAS
(dif.CPT)*		(0.6%)	(0.4)	(0.2)	(1.5)	(1.4)
<u>$a/c=10$</u>						
FSDT($k=5/6$)		65.62	91.20	131.7	135.3	148.7
FSDT($k=2/3$)		62.07	87.08	122.0	129.1	138.9
3DT(Present)		63.37	89.99	126.3	135.5	144.3
(mode)*		SSS	SAS	ASS	SSS	AAS
(dif.CPT)*		(47.8%)	(37.8)	(46.7)	(79.8)	(83.6)
(dif.FSDT)**		(3.6%)	(1.3)	(4.3)	(-0.1)	(3.0)
<u>$a/c=1$</u>						
FSDT($k=5/6$)		10.58	15.49	17.42	18.91	21.06
FSDT($k=2/3$)		9.492	14.14	15.61	18.27	18.97
3DT(Present)		11.15	15.76	17.95	18.37	22.02
(mode)*		SSS	SAS	SAS	ASS	SSS
(dif.FSDT)**		(-5.1%)	(-1.7)	(-3.0)	(-2.9)	(-4.4)
3DT(Present)		15.35	16.99		18.69	20.54
(mode)**		SSA	SAA		SAA	ASA

(mode)* : bending mode, (mode)** : stretching mode,
 (dif.CPT)* : difference from CPT (%),
 (dif.FSDT)** : difference from FSDT($k=5/6$) (%).

(3) 全周単純支持正方形板の本三次元解を、同一のリッツ法を用いた本著者らによる古典板理論、一次せん断変形理論の結果と比較した。その結果、薄板($a/c=100$)では古典板理論が十分な精度を与えること、また厚板($a/c=10$)ではせん断変形理論が必要となることを示した。ただしせん断補正係数の値により結果が異なり、 $k=2/3$ より $5/6$ がより適切な値を与えた。

(4) 全周固定正方形板についても同様の計算を行い、(3)と同様の傾向を得た。ただし全般的に固定板の方が、三次元解と古典板理論、一次せん断変形理論との差異が大きく、境界条件の相違が各種板理論の適用性に及ぼす重要性が示された。

(5) 全周単純支持板では、 $a/c=10$ の比較的低い次数で面内伸縮モードが生じた。さらに立方体では、低次において曲げモードと近い数の面内伸縮モードが生じた。

文 献

- (1) Leissa, A. W., *Proc. 1st Intl. Conf. Compo. Struct.*, (1981), 312.
- (2) 成田, 機論, **59**-565, C(1993), 2593.
- (3) 成田, 第3回 FRP シンポジウム講演論文集, (1994), III-47.
- (4) Yang, P. C., ほか2名, *Int. J. Solids Struct.*, **2**(1966), 665.
- (5) Reddy, J. N., *Trans. ASME, J. Appl. Mech.*, **51**(1984), 745.
- (6) 成田, 日本複合材料学会誌, **18**-3(1992), 113.
- (7) 成田・ほか3名, 機論, **60**-570, C(1994), 406.
- (8) Vinson, J. R. and Sierakowski, R. L., *The Behavior of Structures Composed of Composite Materials*, Martinus Nijhoff, Dordrecht.
- (9) Hanna, N. F. and Leissa, A. W., *J. Sound Vib.*, **170**-4(1994), 545.
- (10) Srinivas, S., ほか2名, *J. Sound Vib.*, **12**-2(1970), 187.
- (11) Khdeir, A. A. and Librescu, L., *Compos. Struct.*, **9**-4(1988), 259.
- (12) Khdeir, A. A., *J. Sound Vib.*, **126**-3(1988), 447.
- (13) Noor, A. K., *AIAA J.*, **11**-7(1973), 1038.