積層複合非円筒殻の定常応答*

鹿内 元 治^{*1}, 鈴木 勝 義^{*1}, Arthur William LEISSA^{*2}

Steady-State Responses of Laminated Composite Noncircular Cylindrical Shells

Genji SHIKANAI, Katsuyoshi SUZUKI and Arthur William LEISSA

This paper deals with the vibration and steady-state response problems for laminated composite noncircular cylindrical shells. Based on the classical lamination shell theory, equations of motion and boundary conditions are obtained from the stationary condition of the Lagrangian. The equations of motion are solved exactly by means of a power series expansion for symmetrically laminated, cross-ply shells having both ends freely supported and a load distributed uniformly in the circumferential direction and sinusoidally in the axial direction. The effects of the number of laminae and stacking sequences upon the steady-state responses of displacement and bending moment are discussed.

Key Words: Steady-State Responses, Exact Solution, Classical Lamination Theory, Composite, Noncircular Cylindrical Shells

1. 結 言

最近、積層複合シェルは航空宇宙機をはじめ多くの機器に用いられており、その振動解明はますます重要になっている。積層複合円筒殻、円すい殻、浅い殻などの振動についてはこれまでも多くの報告がなされている^{(1)~(5)}。また非円筒殻の振動については著者らの報告がある⁽⁶⁾⁽⁷⁾。しかしながら、これらは自由振動についての報告であり、固有振動数や振動モードが議論の中心である。外力を受けた場合の殻の強さや剛さを論じた定常振動についての報告はまだないようである。

本報では、強化繊維を同一方向に配向した積層複合非円筒殻が殻の中央面に垂直に分布外力を受ける場合の定常応答を考える。解析では古典積層理論に基づき、ラグランジュアンの停留条件から基礎方程式を求める。運動方程式は、両端が自由支持された、クロスプライ対称積層構造シェルが長さ方向に正弦波的、周方向に一樣に分布する周期外力を受ける場合について、級数解を用いて厳密に解析する。数値計算はグラフィ

ット繊維/エポキシ樹脂(G/E)の複合材料からなるだ円筒殻について行い、変位、曲げモーメントの定常応答を求め、積層数および積層順序の違いによる影響を明らかにする。

2. 解 析

2・1 運動方程式と境界条件式 中央面に対して対称な N 個のラミナからなる積層複合薄肉非円筒殻に、中央面に垂直に分布外力 q が作用する場合の定常応答を考える。横断面と中央面との交線は一樣な平面曲線とし、殻の長さを l 、厚さを h とする。中央面上の下端の一点を原点とし、 x' 軸を母線方向に、これと直交する横断面の周に沿って測った長さを s 、中央面の法線方向、外側向きを正として z 軸をとる(図1参照)。ただし、 z 軸の原点はシェルの横断面の中央面上にとる。 h_k および h_{k-1} は中央面($z=0$)から k 番めのラミナの上面および下面までの距離とする(図2参照)。代表半径を r_0 として、無次元座標 $x=x'/r_0$ を導入する。 x' , s , z 方向変位を $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{w}$ とする。

次のような変数変換を考える。

$$\frac{d\theta}{ds} = \frac{1}{\rho} = \frac{G}{r_0} \phi(\theta) \dots\dots\dots (1)$$

ここに $1/\rho$ は中心線の任意点における曲率であり、 θ

* 原稿受付 平成6年8月12日。

^{*1} 正員、山形大学工学部 (〒992 米沢市城南4-3-16)。^{*2} Ohio State University, Boyd Laboratory (Columbus, Ohio 43210-2731, U. S. A.)

図 1 座標系

図 2 殻の横断面

は s の原点における中心線への接線と任意点における接線とのなす角を表す変数である。また、 G は曲線の形状によって定まる定数、 Φ は θ の関数である。

殻は十分に薄肉とし、キルヒホフ・ラブの仮定が成り立つものとして変位 $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{w}$ を次のようにおく⁽⁸⁾。

$$\bar{u} = u + \frac{z}{r_0} \Psi_x, \bar{v} = v + \frac{z}{r_0} \Psi_\theta, \bar{w} = w \dots \dots (2)$$

$u, v, w, \Psi_x, \Psi_\theta$ は x と θ および t (時間) の関数である。任意点における垂直およびせん断ひずみは、

$$\begin{aligned} \epsilon_{xx} &= \frac{1}{r_0} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x}, \epsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{\rho+z} \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial \theta} + \bar{w} \right), \\ \epsilon_{zz} &= \frac{\partial \bar{w}}{\partial z}, \epsilon_{x\theta} = \frac{1}{r_0} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \frac{1}{\rho+z} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \theta}, \\ \epsilon_{xz} &= \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} + \frac{1}{r_0} \frac{\partial \bar{w}}{\partial x}, \\ \epsilon_{\theta z} &= \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} + \frac{1}{\rho+z} \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial \theta} - \bar{v} \right) \dots \dots (3) \end{aligned}$$

となる。

式(2), (3)より $\epsilon_{zz} = 0$ となる。また、薄肉殻の場合、せん断変形および回転慣性の影響は無視できる。したがって $\epsilon_{xz} = \epsilon_{\theta z} = 0$ より

$$\Psi_x = -\frac{\partial w}{\partial x}, \Psi_\theta = G\Phi \left(-\frac{\partial w}{\partial \theta} + v \right) \dots \dots (4)$$

となる。

k 番めのラミナにおける応力とひずみの関係は二次

元の式を用いて次のように表す⁽⁹⁾⁽¹⁰⁾。

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{\theta\theta} \\ \sigma_{x\theta} \end{bmatrix}_k = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}_k \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{\theta\theta} \\ \epsilon_{x\theta} \end{bmatrix}_k \dots \dots (5)$$

ここに $\bar{Q}_{ij}$ は繊維やマトリックスの弾性特性、繊維の体積含有率などによって決定される弾性係数である。 k 番めのラミナのひずみエネルギー式を U_k とすると、

$$U_k = \frac{1}{2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_{r_{k-1}}^{r_k} \int_0^{l/r_0} [\sigma_{xx}\epsilon_{xx} + \sigma_{\theta\theta}\epsilon_{\theta\theta} + \sigma_{x\theta}\epsilon_{x\theta}] r_0(\rho+z) dx d\theta dz \dots \dots (6)$$

運動エネルギー式を T_k とすると、

$$T_k = \frac{1}{2} \iiint \rho^{(k)} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right] r_0(\rho+z) dx d\theta dz \dots \dots (7)$$

ここに $\rho^{(k)}$ は k 番めのラミナの密度である。

外力の仕事を考慮したシェル全体のラグランジュアンは次式で与えられる。

$$L = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_0^{l/r_0} qwr_0 \rho dx d\theta + \sum_{k=1}^N (T_k - U_k) \dots \dots (8)$$

ここに N はラミナの総数である。

ハミルトンの原理 $\delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = 0$ を適用し、ラグランジュアンの停留条件を求めると、任意の積層構造に適用できる運動方程式と境界条件式が求まるがここでは、クロスプライ対称積層構造の場合を考えることにする。

運動方程式は⁽⁶⁾

$$\begin{aligned} & -\lambda^4 \bar{\rho}_1 \frac{\partial^2 (u/\Phi)}{\partial t^2} + \beta^2 \left[A_{11} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{u}{\Phi} \right) \right. \\ & \quad + G(A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial \theta} + A_{12} G \frac{\partial w}{\partial x} \\ & \quad + A_{66} G^2 \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\Phi \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) \left. - D_{11} G \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \right. \\ & \quad \left. + D_{66} G^3 \frac{\partial}{\partial \theta} \left\{ \Phi^2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \theta} + G \Phi \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) \right\} \right] = 0, \\ & -\lambda^4 \bar{\rho}_1 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \beta^2 \left[G\Phi(A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial \theta} \right. \\ & \quad + G^2 \Phi A_{22} \frac{\partial}{\partial \theta} \left\{ \Phi \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} + w \right) \right\} + A_{66} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \left. \right] \\ & \quad + D_{22} G^4 \Phi^2 \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \left[\Phi \left(w + \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) + \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \left(\frac{\partial w}{\partial \theta} - v \right) \right] \\ & \quad - G^2 \Phi^2 (D_{12} + 3D_{66}) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial \theta} + 3D_{66} G^2 \Phi^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0, \\ & -\lambda^4 \bar{\rho}_1 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \beta^2 \left[A_{12} G \Phi \frac{\partial u}{\partial x} \right. \\ & \quad \left. + A_{22} G^2 \Phi^2 \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} + w \right) \right] - D_{11} \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - G\Phi \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -D_{12}G^2\Phi\frac{\partial}{\partial\theta}\left\{\Phi\left(2\frac{\partial^3w}{\partial x^2\partial\theta}-\frac{\partial^2v}{\partial x^2}\right)\right\} \\
& -D_{22}G^4\left(\Phi^2+\frac{1}{2}\frac{\partial\Phi^2}{\partial\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}+\Phi^2\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right) \\
& \times\left[\Phi\frac{\partial}{\partial\theta}\left\{\Phi\left(\frac{\partial w}{\partial\theta}-v\right)\right\}+\Phi^2\left(\frac{\partial v}{\partial\theta}+w\right)\right] \\
& -D_{66}\left[G^2\Phi\frac{\partial}{\partial\theta}\left\{\Phi\left(4\frac{\partial^3w}{\partial x^2\partial\theta}-3\frac{\partial^2v}{\partial x^2}\right.\right.\right. \\
& \left.\left.\left.+G\Phi\frac{\partial^2u}{\partial x\partial\theta}\right)\right\}\right]=-\frac{qr_0^4}{E_0h^3}\cdots\cdots(9)
\end{aligned}$$

となる。ここに、 h はシエルの全厚、 ρ_0 、 E_0 は材料の代表密度および弾性定数である。また、

$$\begin{aligned}
\lambda^4 &= \frac{\rho_0 r_0^4}{E_0 h^2}, \quad \beta = \frac{r_0}{h}, \quad \bar{\rho}_1 = \sum_{k=1}^N \frac{\rho^{(k)}}{\rho_0} (h_k - h_{k-1})/h, \\
A_{ij} &= \sum_{k=1}^N \frac{\bar{Q}_{ij}^{(k)}}{E_0} (h_k - h_{k-1})/h, \\
D_{ij} &= \sum_{k=1}^N \frac{1}{3} \frac{\bar{Q}_{ij}^{(k)}}{E_0} (h_k^3 - h_{k-1}^3)/h^3 \cdots\cdots(10)
\end{aligned}$$

$x=0$, $\mu(l/r_0)$ における境界条件式は

$$T_1\delta u = T_2\delta v = T_3\delta w = M_1\delta\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right) = 0 \cdots\cdots(11)$$

$\theta = \theta_1, \theta_2$ における境界条件式は

$$T_4\delta u = T_5\delta v = T_6\delta w = M_2\delta\left(\frac{\partial w}{\partial\theta}\right) = 0 \cdots\cdots(12)$$

$x=0, \mu, \theta = \theta_1, \theta_2$ において満足すべき条件として、

$$T_7\delta w = 0 \cdots\cdots(13)$$

ここに、

$$\begin{aligned}
T_1 &= \beta^2 \left[A_{11} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u}{\Phi} \right) + A_{12} G \left(\frac{\partial v}{\partial\theta} + w \right) \right. \\
& \quad \left. - D_{11} G \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \right. \\
\Phi T_2 &= \beta^2 A_{66} \left(G \Phi \frac{\partial u}{\partial\theta} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\
& \quad + 3 D_{66} G^2 \Phi^2 \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial\theta} \right), \\
-\Phi T_3 &= D_{11} \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - G \Phi \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) \\
& \quad + D_{12} G^2 \Phi \frac{\partial}{\partial\theta} \left\{ \Phi \left(-\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial\theta} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right\} \\
& \quad + D_{66} G^2 \Phi \frac{\partial}{\partial\theta} \left\{ \Phi \left(4 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial\theta} - 3 \frac{\partial v}{\partial x} + G \Phi \frac{\partial u}{\partial\theta} \right) \right\}, \\
T_4 &= \beta^2 A_{66} G \left(G \Phi \frac{\partial u}{\partial\theta} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\
& \quad + D_{66} G^3 \Phi^2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial\theta} + G \Phi \frac{\partial u}{\partial\theta} \right), \\
T_5 &= \beta^2 \left[A_{12} G \frac{\partial u}{\partial x} + A_{22} G^2 \Phi \left(\frac{\partial v}{\partial\theta} + w \right) \right. \\
& \quad \left. - D_{12} G^2 \Phi \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \right. \\
& \quad \left. - T_6 = D_{12} G^2 \Phi \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial\theta} \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + D_{22} G^4 \Phi \frac{\partial}{\partial\theta} \left[\Phi^2 \left(\frac{\partial v}{\partial\theta} + w \right) \right. \\
& \quad \left. + \Phi \frac{\partial}{\partial\theta} \left\{ \Phi \left(\frac{\partial w}{\partial\theta} - v \right) \right\} \right] \\
& + D_{66} G^2 \Phi \left(4 \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial\theta} - 3 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + G \Phi \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial\theta} \right),
\end{aligned}$$

$$T_7 = D_{66} G^2 \Phi \left(4 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial\theta} - 3 \frac{\partial v}{\partial x} + G \Phi \frac{\partial u}{\partial\theta} \right),$$

$$\Phi M_1 = D_{11} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - G \Phi \frac{\partial u}{\partial x} \right)$$

$$+ D_{12} G^2 \Phi \frac{\partial}{\partial\theta} \left\{ \Phi \left(\frac{\partial w}{\partial\theta} - v \right) \right\},$$

$$\begin{aligned}
M_2 &= G^2 \Phi \left[D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + D_{22} G^2 \Phi^2 \left(\frac{\partial v}{\partial\theta} + w \right) \right. \\
& \quad \left. + D_{22} G^2 \Phi \frac{\partial}{\partial\theta} \left\{ \left(\Phi \frac{\partial w}{\partial\theta} - v \right) \right\} \right] \cdots\cdots(14)
\end{aligned}$$

2.2 運動方程式の解(自由支持) 図3に示され

る断面をもつた円筒殻が両端で自由支持され、長さ方向に正弦波状、周方向に一様に分布する周期荷重

$$q = q_0 \sin Kx \sin \omega t \cdots\cdots(15)$$

を中央面に垂直に受ける場合を考える。ここに、 $K = m\pi/\mu$, m は整数、 ω は円振動数である。

両端自由支持の境界条件は式(11)より

$$T_1 = v = w = M_1 = 0 \cdots\cdots(16)$$

となる。式(16)を満足する定常応答解は

$$\begin{cases} u = u_m(\theta) \cos Kx \sin \omega t \\ v = v_m(\theta) \sin Kx \sin \omega t \\ w = w_m(\theta) \sin Kx \sin \omega t \end{cases} \cdots\cdots(17)$$

で表される。式(15)、(17)を式(9)に代入すると次のような変数係数の非同次連立常微分方程式が得られる。

$$\begin{aligned}
& (\alpha_0^4 \bar{\rho}_1 - K^2 \beta^2 A_{11}) u_m / \Phi + KG(\beta^2 A_{12} + K^2 D_{11}) w_m \\
& + \beta^2 KG(A_{12} + A_{66}) \frac{dv_m}{d\theta} \\
& + \beta^2 G^2 A_{66} \frac{d}{d\theta} \left(\Phi \frac{du_m}{d\theta} \right) \\
& + G^3 D_{66} \frac{d}{d\theta} \left\{ \Phi^2 \left(K \frac{dw_m}{d\theta} + G \Phi \frac{du_m}{d\theta} \right) \right\} = 0,
\end{aligned}$$

図3 だ円筒殻

$$\begin{aligned}
& (\alpha_0^4 \bar{\rho}_1 - K^2 \beta^2 A_{66}) v_m - K \beta^2 G \Phi (A_{12} + A_{66}) \frac{du_m}{d\theta} \\
& + \beta^2 G^2 \Phi A_{22} \frac{d}{d\theta} \left\{ \Phi \left(\frac{dv_m}{d\theta} + w_m \right) \right\} \\
& + G^4 \Phi^2 D_{22} \left\{ \frac{1}{2} \frac{d\Phi^2}{d\theta} \left(w_m + \frac{d^2 w_m}{d\theta^2} \right) \right. \\
& \left. + \left(\frac{d\Phi}{d\theta} \right)^2 \left(\frac{dw_m}{d\theta} - v_m \right) \right\} \\
& + K^2 G^2 \Phi^2 \left\{ (D_{12} + 3D_{66}) \frac{dw_m}{d\theta} - 3D_{66} v_m \right\} = 0, \\
& (\alpha_0^4 \bar{\rho}_1 - K^4 D_{11}) w_m + KG \Phi (\beta^2 A_{12} + K^2 D_{11}) u_m \\
& - \beta^2 G^2 \Phi^2 A_{22} \left(\frac{dv_m}{d\theta} + w_m \right) \\
& - D_{12} K^2 G^2 \Phi \frac{d}{d\theta} \left\{ \Phi \left(v_m - 2 \frac{dw_m}{d\theta} \right) \right\} \\
& - D_{66} K G^2 \Phi \frac{d}{d\theta} \left\{ \Phi \left(3K v_m - 4K \frac{dv_m}{d\theta} \right. \right. \\
& \left. \left. - G \Phi \frac{du_m}{d\theta} \right) \right\} - D_{22} G^4 \left(\Phi^2 + \frac{1}{2} \frac{d\Phi^2}{d\theta} \frac{d}{d\theta} \right. \\
& \left. + \Phi^2 \frac{d^2}{d\theta^2} \right) \left[\Phi \frac{d}{d\theta} \left\{ \Phi \left(\frac{dw_m}{d\theta} - v_m \right) \right\} \right. \\
& \left. + \Phi^2 \left(\frac{dv_m}{d\theta} + w_m \right) \right] = - \frac{q_0 r_0^4}{E_0 h^3} \dots \dots \dots (18)
\end{aligned}$$

式(18)の一般解は、式(18)の最後の式の右辺を零とおいたときの連立同次方程式の解 $(u_{mi}, v_{mi}, w_{mi}) (i=1 \sim 4)$ と特解 (u_m^*, v_m^*, w_m^*) の線形結合で次のように与えられる。

$$\begin{aligned}
u_m &= \sum_{i=1}^4 \lambda_i u_{mi} + u_m^*, \quad v_m = \sum_{i=1}^4 \lambda_i v_{mi} + v_m^* \\
w_m &= \sum_{i=1}^4 \lambda_i w_{mi} + w_m^* \dots \dots \dots (19)
\end{aligned}$$

ただし $\lambda_1 \sim \lambda_4$ は任意定数である。同次方程式の解(対称振動)についてはすでに自由振動の解析⁽⁶⁾のときに求められており、ここでは省略する。特解は次のように求められる。まず、特解を

$$\begin{aligned}
u_m^*/\Phi &= \sum_{n=0}^{\infty} A_n^* \theta^{2n}, \quad v_m^* = \sum_{n=0}^{\infty} B_n^* \theta^{2n+1} \\
w_m^* &= \sum_{n=0}^{\infty} C_n^* \theta^{2n} \dots \dots \dots (20)
\end{aligned}$$

とおく。式(20)を式(18)に代入すると、

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=0}^{\infty} [G^2 \Phi_0 \zeta_0 (2n+1)(2n+2) \\
& \times (\beta^2 A_{66} + G^2 \Phi_0 \zeta_0 D_{66}) A_{n+1}^* + f_{na}^*] \theta^{2n} = 0, \\
& \sum_{n=0}^{\infty} [\beta^2 G^2 \Phi_0 \zeta_0 (2n+2)(2n+3) A_{22} B_{n+1}^* \\
& + f_{nb}^*] \theta^{2n+1} = 0, \\
& \left[24 G^4 \Phi_0^2 \zeta_0^2 D_{22} C_2^* + f_{nc}^* - \frac{q_0 r_0^4}{E_0 h^3} \right] \\
& + \sum_{n=1}^{\infty} [G^4 \Phi_0^2 \zeta_0^2 D_{22} (2n+1)(2n+2)(2n+3) \\
& \times (2n+4) C_{n+2}^* + f_{nc}^*] \theta^{2n} = 0 \dots \dots \dots (21)
\end{aligned}$$

式(21)が θ の任意の値に対して成り立つためには式

(21)の各式の [ ] 内が零となる必要がある。これより

$$\begin{aligned}
A_0^* &= B_0^* = C_0^* = C_1^* = 0, \\
A_1^* &= B_1^* = 0, \quad C_2^* = \left(\frac{q_0 r_0^4}{E_0 h^3} \right) / 24 G^4 \Phi_0^2 \zeta_0^2 D_{22} \\
&\dots \dots \dots (22)
\end{aligned}$$

となり、以下 $B_{n+1}^*, A_{n+1}^*, C_{n+2}^* (n \geq 1)$ が順に求まる。なお $f_{na}^*, f_{nb}^*, f_{nc}^*$ は係数 $A_m^*, B_m^*, C_m^* (m=0 \sim n)$ を含む式で自由振動の場合と同じ形の式となる⁽⁶⁾。また ζ_n は関数 $\Phi^2(\theta)$ を θ のべき級数で展開したときの係数で、次式で与えられる。

$$\Phi^2 = \Phi_0 \sum_{n=0}^{\infty} \zeta_n \theta^{2n} \dots \dots \dots (23)$$

だ円の場合は $2a, 2b$ を長軸、短軸の長さとして代表半径を r_0 、だ円の偏平度を表すパラメータを μ_0 として次のように表される。

$$\begin{aligned}
r_0 &= \sqrt{(a^2 + b^2)/2}, \quad \mu_0 = (a^2 - b^2)/(a^2 + b^2) \\
\Phi(\theta) &= (1 + \mu_0 \cos 2\theta)^{3/2}, \\
1/G &= 1 - \mu_0^2, \quad \Phi_0 = (1 + \mu_0)^3, \quad \zeta_0 = 1, \\
\zeta_n &= \frac{3\mu_0^3 (-1)^n 2^{2n}}{(1 + \mu_0)^3 (2n)!} \left[\frac{1 + 3^{2n-1}}{4} + \frac{2^{2n-1}}{\mu_0} + \frac{1}{\mu_0^2} \right] \\
&\dots \dots \dots (24)
\end{aligned}$$

式(19)を $\theta = \pm \pi/2$ での境界条件式(ξ_2 軸に対称な振動)

$$T_4 = v = T_6 = \frac{\partial w}{\partial \theta} = 0 \dots \dots \dots (25)$$

に代入すると

$$\begin{bmatrix} T_{4m1} & T_{4m2} & T_{4m3} & T_{4m4} \\ v_{m1} & v_{m2} & v_{m3} & v_{m4} \\ T_{6m1} & T_{6m2} & T_{6m3} & T_{6m4} \\ w'_{m1} & w'_{m2} & w'_{m3} & w'_{m4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} T_{4m}^* \\ v_m^* \\ T_{6m}^* \\ w_m'^* \end{bmatrix} \dots \dots \dots (26)$$

となる。ただし、 w'_m は $dw_m/d\theta$ の略記である。式(26)より係数 $\lambda_1 \sim \lambda_4$ が定まる。この値を式(19)に代入して、曲げ変位、曲げモーメントを求めることができる。

3. 数 値 計 算

数値計算は図3に示すだ円筒殻(クロスプライ対称積層構造)について行った。複合材料としては、グラフアイト繊維強化エポキシ樹脂(G/E)を考えた。材料の弾性係数は文献(10)より引用した。すなわち、 $E_{11} = 138$, $E_{22} = 8.96$, $G_{12} = 7.1$ (GPa), $\nu_{12} = 0.30$ である。また、だ円の偏平度を表すパラメータを $\mu_0 = 0.2$ ($\sim a/b = 1.22$)、厚さ比を $\beta (= r_0/h) = 50$ とした。式(19)の変位関数は $A_{ni}, B_{ni}, C_{ni}, A_n^*, B_n^*, C_n^*$ をそれぞれ70項用いて計算した。なお、同次解の4組の独立解は、 A_0, B_0, C_0, C_1 の一つを1とし、残りを零とする4と

おりから決定した。表1(a), (b)は $K=1, 2, 3$ における1次, 2次, 3次の共振振動数(固有振動数)の値を示したものである。 N は積層数である。表より $(90^\circ, 0^\circ, 90^\circ, \dots)$ の順序で積層した場合が $(0^\circ, 90^\circ, 0^\circ, \dots)$ の順序で積層した場合に比べ共振振動数が高いことがわかる。なお 0° は繊維が軸方向に、 90° は円周方向に配向されていることを表す。また積層数が少ない場合に積層順序の違いによる影響は大きく、積層数が多くなるにつれてその影響は小さくなっていく。このことはすでに自由振動の解析において明らかにしてある⁽⁶⁾。 $K=m\pi/\mu=2$ の場合の定常応答について計算した結果を図4~6に示す。図4, 5は $\theta=\pm\pi/2$ における変位 w_m の定常応答曲線である。横軸は無次元振動数 α_0^4/β^2

ラメータ $\alpha_0^4/\beta^2=\rho_0\omega^2 r_0/E_0$ 、縦軸は変位の無次元量 $|w_m|/(q_0 r_0^4/E_0 h^3)$ である。なお、 $E_0=E_{11}/[12(1-\nu_{12}\nu_{21})]$ とした。図4は積層数が $N=3$ で $(0^\circ, 90^\circ, 0^\circ)$ の順序で積層した場合と $(90^\circ, 0^\circ, 90^\circ)$ の順序で積層した場合を比較したものである。図5は積層順序が $(0^\circ, 90^\circ, 0^\circ, \dots)$ の場合について積層数 $N=5, 9$ の場合の変位の応答曲線を示したものである。図6は図4の点A, Bにおける変位 w_m 、周方向曲げモーメント M_θ

表1 共振振動数 α_0^4/β^2 ($\mu_0=0.2, \beta=50$)(a) 積層順序 $(0^\circ, 90^\circ, 0^\circ, \dots)$ の場合

	K=1	K=2	K=3
N=3	0.0250	0.0950	0.1991
	0.0561	0.1324	0.2919
	0.0904	0.2052	0.3320
N=5	0.0375	0.1257	0.2542
	0.0892	0.1867	0.3451
	0.1325	0.4147	0.5454
N=9	0.0465	0.1357	0.2812
	0.0886	0.2390	0.3753
	0.1889	0.4155	0.7251

(b) 積層順序 $(90^\circ, 0^\circ, 90^\circ, \dots)$ の場合

	K=1	K=2	K=3
N=3	0.0738	0.1705	0.3238
	0.0979	0.4041	0.5985
	0.4689	0.5091	0.9169
N=5	0.0727	0.1627	0.1559
	0.0904	0.4059	0.3771
	0.3929	0.4399	0.4166
N=9	0.0677	0.1559	0.3130
	0.0882	0.3771	0.4877
	0.3363	0.4166	0.9151

図4 変位応答曲線($\theta=\pi/2, \beta=50, K=2, N=3$) 図5 変位応答曲線($\theta=\pi/2, \beta=50, K=2$)

図6 図4の点A, Bに対する変位・曲げモーメントの応答曲線

の $\theta=0\sim\pi/2$ の分布を示したものである。なお、曲げモーメントの無次元量は $M_\theta/q_0 r_0^2 = M_2/\{G^2\Phi(q_0 r_0^4/E_0 h^3)\}$ を用いた。図 6 より $(90^\circ, 0^\circ, 90^\circ)$ の順序で積層した場合のほうが $(0^\circ, 90^\circ, 0^\circ)$ の順序で積層した場合に比べ曲げモーメントの値が大きく、曲げ剛性が大きくなることがわかる。また、積層数が少ない場合には積層順序の違いによる影響が大きいことがわかる。

4. 結 論

長さ方向に正弦波状、周方向に一様に分布する周期的面荷重を中央面に垂直に受ける積層複合非円筒殻の定常応答について解析した。数値例としてクロスプライ対称積層構造の両端自由支持だ円筒殻の定常応答を考え、変位、曲げモーメントの応答曲線を求め、積層数および積層順序の違いによる応答の変化を明らかにした。

文 献

- (1) Qatu, M. S. and Leissa, A. W., *Composite Structures*, **17** (1991), 227.
- (2) Singh, A. V., Zhu, L. and Mirza, S., *J. Sound Vib.*, **148** (1991), 265.
- (3) Sivadas, K. R. and Ganesan, N., *J. Sound Vib.*, **148** (1991), 477.
- (4) Narita, Y., Ohta, Y., Yamada, G. and Kobayashi, Y., *AIAA J.*, **30**-3 (1992), 790.
- (5) Narita, Y. and Ohta, Y., *Composite Structures*, **26** (1993), 55.
- (6) Suzuki, K., Shikanai, G. and Leissa, A. W., *Proc. APVC*, '93, **4** (1993), 1527.
- (7) Shikanai, G., Suzuki, K. and Leissa, A. W., *Proc. APVC*, '93, **4** (1993), 1533.
- (8) Love, A. E. H., *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*, (1927), 524, Cambridge University Press.
- (9) Whitney, J. M., *Structural Analysis of Laminated Anisotropic Plates*, (1989), 24, Technomic Publishing Co., Lancaster, Pennsylvania.
- (10) Vinson, J. R. and Sierakowski, R. L., *The Behavior of Structures Composed of Composite Materials*, Dordrecht, The Netherlands, (1977), 48, 303, Martinus Nijhoff Publishers.