多自由度系の振動絶縁の LQG 制御と H^∞ 制御*吉田 和夫^{*1}, 姜 聲 国^{*2}, 金 泰 林^{*3}LQG Control and H^∞ Control of Vibration Isolation
for Multi-Degrees-of-Freedom Systems

Kazuo YOSHIDA, Sungkook KANG and Taerim KIM

This paper deals with a problem of vibration isolation control for multi-degrees-of-freedom systems by applying the optimal control theory using a Kalman filter and H^∞ control theory. A four-degrees-of-freedom system for an experimental model is reduced into a two-degrees-of-freedom system in order to control vibrations of the fundamental and second modes. As a result of numerical calculations and experiments, it is shown that the spillover problem occurring from the model reduction does not affect the vibration isolation performance for multi-degrees-of-freedom systems and it is important to determine how to reduce the vibrations of low modes of which vibration levels are high. Furthermore, it is demonstrated that the control characteristics depend on the adopted objective functions and the vibrations of the low modes are effectively reduced by introducing a frequency-shaped function in H^∞ control theory.

Key Words: Vibration Isolation, Optimal Control, Observer, H^∞ Control Theory, Feedforward Control, Model Reduction

1. まえがき

免震と振動絶縁は建物と除振台などにおいて重要なテーマのひとつになっている。建物において免震の手法は積層ゴム⁽¹⁾などを用いたパッシブ制御が主であったが、最近になって可変摩擦ダンパ⁽²⁾などを用いたアクティブ制御が注目を集めている。また、除振台における振動絶縁に対してアクティブ制御に関する研究が行われ、空気圧を用いた例⁽³⁾⁽⁴⁾や磁気浮上系⁽⁵⁾⁽⁶⁾を用いた例がある。このほか免震と振動絶縁の分野で制御理論の面から見ると、最適制御を用いてフィードバック制御⁽²⁾⁽³⁾⁽⁵⁾、フィードフォワード制御を行った例⁽⁶⁾がある。しかし、いままで免震と振動絶縁において主に1自由度系に対して行われ、多自由度系の振動絶縁制御が考察された例は少ない。蔭山⁽⁷⁾は多自由度系の振動絶縁においてフィードフォワード制御を用いた全状態量出力最適制御を行い、目的関数による制御特性の考察を行った。しかし、多自由度の場合は高次モードを有するため高次モードを打ち切った低次元モデル作成が不可欠であるが、一般に高次モードを打ち切った低次元モデルを作成

して制御すれば、スピルオーバー不安定と呼ばれる振動問題が発生する。また、実用化に際しては、低次元化誤差のみならずモデル化の段階での誤差にもロバストな制御系の設計を行う必要がある。ところが、多自由度系の振動絶縁において低次元化の問題やロバスト性が考察された例は著者らの調べた限りではほとんど見受けられない。

本研究では多自由度系に対して観測量が限られている実用的な問題に対して、一手法として低次元化モデルを対象にカルマンフィルタを用いたフィードフォワード併合最適制御を行う。さらに、多自由度系の振動絶縁に適した評価基準として物理変数に基づく周波数成形重み値基準を提案し、 H^∞ 制御によるフィードフォワード併合振動絶縁制御の適用を試みる。特に、多自由度系の振動絶縁に適した評価基準や、多自由度系の振動絶縁における低次元化問題について考察する。

2. 多自由度系の振動絶縁モデル

本研究においては、図1に示されるように床からの水平方向の外乱が想定され、それを絶縁するために1階にアクチュエータを設けた4自由度系の振動絶縁制御モデルについて考える。物理座標系を用いて、システムの状態ベクトルを

$$x_f = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4 \ \dot{x}_1 \ \dot{x}_2 \ \dot{x}_3 \ \dot{x}_4]^T \dots\dots\dots(1)$$

* 原稿受付 平成5年12月8日。

^{*1} 正員, 慶應義塾大学理工学部 (〒223 横浜市港北区日吉3-14-1)。^{*2} 正員, 慶應義塾大学大学院。^{*3} 学生員, 慶應義塾大学大学院。

図1 多自由度系の振動絶縁モデル

とすると、このフルオーダーモデルの状態方程式は、アクチュエータとして用いているリニアモータの特性を考慮して、以下のように表わすことができる。

$$\begin{aligned} \dot{x}_f &= A_f x_f + B_f u + D_f z \\ y_f &= C_f x_f \end{aligned} \quad (2)$$

ただし、

$$A_f = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{k_2}{m_1} & -\frac{k_2}{m_1} & 0 & 0 & -\frac{(c_1+c_2)}{m_1} & \frac{c_2}{m_1} & 0 & 0 & \frac{K_f}{m_1} \\ \frac{k_2}{m_2} & -\frac{k_2+k_3}{m_2} & \frac{k_3}{m_2} & 0 & \frac{c_2}{m_2} & -\frac{(c_2+c_3)}{m_2} & \frac{c_3}{m_2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{k_3}{m_3} & -\frac{k_3+k_4}{m_3} & \frac{k_4}{m_3} & 0 & \frac{c_3}{m_3} & -\frac{(c_3+c_4)}{m_3} & \frac{c_4}{m_3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{k_4}{m_4} & -\frac{k_4}{m_4} & 0 & 0 & \frac{c_4}{m_4} & -\frac{c_4}{m_4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{K_f}{L_a} & 0 & 0 & 0 & -\frac{R_a}{L_a} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} B_f &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{L_a} \end{bmatrix}^T \\ D_f &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}^T \\ C_f &= [1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0] \end{aligned} \quad (3)$$

ここで、モード座標を導入してモード変換をした後、2次モードまでを採用して低次元化を行う。さらに、モード低次元化状態方程式を逆モード変換し、物理状態における低次元化状態方程式を作成する。その状態方程式は次の状態ベクトルを用いて

$$x_r = [x_1 \ x_2 \ \dot{x}_1 \ \dot{x}_2 \ i]^T \quad (4)$$

以下のように表わされる。

$$\begin{aligned} \dot{x}_r &= A_r x_r + B_r u + D_r z \\ y_r &= C_r x_r \end{aligned} \quad (5)$$

また、外乱は周波数領域を限定し、その周波数領域においてはパワースペクトルが白色雑音の特性と同等なものと

仮定する。これは、その周波数領域においては外乱の特性についてスペクトルの特徴を特には仮定しないことを意味する。すなわち、外乱は白色雑音を入力としてローパス特性の伝達関数を有する成形フィルタによって生成される有色雑音であると仮定する。その有色雑音を白色雑音から生成するための成形フィルタの伝達関数は次式とする。

$$\frac{sZ(s)}{W(s)} = \frac{\omega_d^2}{s^2 + 2\zeta_d \omega_d s + \omega_d^2} \quad (6)$$

従って、入力外乱の状態方程式は以下のように表される。

$$\dot{z} = A_z z + dw \quad (7)$$

ただし、

$$\begin{aligned} A_z &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\omega_z^2 & -2\zeta_z \omega_z \end{bmatrix} \\ d &= [0 \ 0 \ \omega_z^2]^T \\ \zeta_z &= c_z / 2\sqrt{m_z k_z} \quad \omega_z = \sqrt{k_z / m_z} \end{aligned} \quad (8)$$

したがって、式(5)と式(7)を結合すれば拡大系の状態方程式は次のようになる。

$$\begin{aligned} \dot{x}_p &= A_p x_p + B_{up} u + B_{wp} w \\ x_p &= [x_r \ z]^T \quad A_p = \begin{bmatrix} A_r & D_r \\ 0 & A_z \end{bmatrix} \\ B_{up} &= [B_r \ 0]^T \quad B_{wp} = [0 \ d]^T \end{aligned} \quad (9)$$

3. フィードフォワード併合最適制御理論

3.1 最適ゲイン 式(9)の拡大システムに対して最適制御理論を用い、次の評価関数を最小にする最適ゲインを求める。ここでは、入力が不規則な場合を想定しているので評価関数は期待値で評価することにする。

$$\begin{aligned} J(u) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} E \left\{ \int_0^T [x_p^T Q x_p + ru^2] dt \right\} \\ Q &= \begin{bmatrix} Q_1 & G \\ G^T & Q_2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (10)$$

ただし、 $E\{\cdot\}$ は数学的期待値を意味する。

この最適制御問題から導かれるRiccati方程式の一意正定解 P を

$$P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{12}^T & P_{22} \end{bmatrix}$$

と分割すると、Riccati方程式は次のようになる。

$$0 = PA_p + A_p^T P - PB_{up} r^{-1} B_{up}^T P + Q \quad (11)$$

ここで、

$$\begin{aligned} 0 &= P_{11}A_r + A_r^T P_{11} - P_{11}B_r r^{-1} B_r^T P_{11} + Q_1 \\ 0 &= P_{11}D_r + A_r^T P_{12} - P_{11}B_r r^{-1} B_r^T P_{12} + G + P_{12}A_z \\ 0 &= P_{12}^T D_r + D_r^T P_{12} - P_{12}^T B_r r^{-1} B_r^T P_{12} + Q_2 + P_{22}A_z + A_z^T P_{22} \end{aligned}$$

のようになる。したがって、最適制御ゲインは次式で与えられる。

$$F = r^{-1}[B_r^T \quad 0]P \quad F_b = r^{-1}B_r^T P_{11}, F_f = r^{-1}B_r^T P_{12} \quad (12)$$

ここで、 F_b はフィードバックゲイン、 F_f はフィードフォワードゲインである。

3.2 カルマンフィルタの設計 実際の振動絶縁システムにおいて、直接検出できる外乱とシステムの状態量が限られている場合が多く全状態量を検出して振動絶縁を行うことは困難なことが多い。そこで本研究では、カルマンフィルタを用いたフィードフォワード併合最適制御を行う。以下にカルマンフィルタの設計法を示す。

制御システムの状態方程式、および出力方程式

$$\begin{aligned} \dot{x}_p(t) &= A_p x_p(t) + B_{up} u + B_{wp} w(t) \\ y_o(t) &= C_p x_p(t) + v(t) \\ E[w(t)] &= 0, \quad E[w(t)w(t)] = W\delta(t-\tau) \\ E[v(t)] &= 0, \quad E[v(t)v(t)] = V\delta(t-\tau) \end{aligned} \quad (13)$$

ここで、 W は入力雑音 w のインテンシティ、 V は観測雑音 v のインテンシティである。上式に対するフィルタ方程式は

$$\dot{\hat{x}}_k(t) = (A_p - K C_p) \hat{x}_k(t) + K y_o(t) \quad (14)$$

で与えられ、フィルタゲイン K は

$$K = P_k C_p^T V^{-1} \quad (15)$$

となる。ここで P_k は以下のリカッティ方程式の解として与えられる。

$$0 = A_p P_k + P_k A_p - P_k C_p V^{-1} C_p P_k + B_{up} W B_{up} \quad (16)$$

以上のように最適レギュレータとカルマンフィルタを別々に設計して、分離定理に基づき、最適レギュレータとカルマンフィルタを接続すると図2のようになる。

図2 カルマンフィルタを用いた最適制御系のブロック線図

3.3 実験の方法 本実験に用いた実験装置の概略図を図3に示す。実験装置は4自由度系で構成されて、1階とベース（地面に相当）の間にはリニアベアリングを介して摩擦が少ない構造になっている。また、1階とベースの間にアクチュエータとしてリニアモータを設けて振動絶縁の制御ができるようになっている。本実験では、外乱として0~20Hzのバンド幅をもつ白色雑音を加え、絶対座標系において外乱の変位に対する構造物の1階の絶対変位の周波数応答を求めた。そのとき目的関数としては1階の絶対変位、絶対速度、絶対加速度の3つが選定された。また、観測量として床と構造物の1階との相対変位と外乱の加速度を検出して制御を行った。制御器はサンプリングタイム0.2msで離散化してDSP内で実現した。

3.4 実験結果および考察 数値計算と実験に用いた値は以下のとおりである。

$$\begin{aligned} m_1 &= 0.828 \text{ kg}, m_2 = 0.842 \text{ kg}, m_3 = 0.842, m_4 = 0.640 \text{ kg}, \\ k_1 &= 400 \text{ N/m}, k_2 = 1160 \text{ N/m}, k_3 = 1302 \text{ N/m}, k_4 = 1600 \text{ N/m}, \\ c_1 &= 7.5 \text{ N}\cdot\text{s/m}, c_2 = c_3 = c_4 = 0.02 \text{ N}\cdot\text{s/m}, \omega_z = 8 \text{ Hz}, \zeta_z = 0.7 \\ L_a &= 0.00072 \text{ H}, R_a = 3.4 \Omega, K_e = 5.0 \text{ V}\cdot\text{s/m}, K_f = 2.6 \text{ N/A} \end{aligned}$$

また、最適レギュレータおよびカルマンフィルタの設計に用いた入力に関するパラメータを表1に示す。

図4は数値計算と実験結果をまとめたものである。ここで外乱の仮定周波数領域はシステムの2次モードつまり8 Hzまで仮定された。周波数応答の結果は横軸が周波数

表1 LQGとカルマンフィルタの入力パラメータ

Objective Function	Optimal Regulator r	Kalman Filter V
Absolute Displacement	$2.0e-6$	$\begin{bmatrix} 1.0e-6 & 0 \\ 0 & 50 \end{bmatrix}$
Absolute Velocity	$5.0e-4$	$\begin{bmatrix} 1.0e-6 & 0 \\ 0 & 20 \end{bmatrix}$
Absolute Acceleration	$3.0e-1$	$\begin{bmatrix} 1.0e-6 & 0 \\ 0 & 20 \end{bmatrix}$

図3 実験装置構成図

[Hz], 縦軸がゲイン[dB]である。その結果を見ると、目的関数が絶対変位の場合は、低周波数領域つまり、1次モードが2次モードに比べて振動絶縁効果がよく現われている。そして、目的関数が絶対加速度の場合は、実験ではいい結果が出ていないが、高周波数領域つまり、2次モードが1次モードに比べて振動絶縁効果がよく現われる。また、目的関数が絶対速度の場合は、絶対変位と絶対加速度の中間の性質を持っていることが分かる。

次に、多自由度系の振動絶縁における低次元化によるスピルオーバー安定性の問題について考察する。各目的関数による結果を見ると、低次元化されていない3次、4次モードは無制御に比べてスピルオーバー不安定になっていない。この事実から多自由度系の振動絶縁において低次元化によるスピルオーバー不安定は起こらないことがわかる。また、1自由度系の振動絶縁において外乱の限定された周波数領域以上で応答レベルが上がる問題⁽⁶⁾も多自由度系の振動絶縁においてはあまり問題にならないことがわかる。さらに、多自由度系の振動絶縁において質量変化によるロバスト安定性も調べた。質量変化としては2階、3階、4階に約50%の質量変動を与えた。図5に目的関数が絶対速度の場合の実験結果を示す。これらの結果を見ると、各階に質量の変化があっても質量変化前と同様の結果が得られ、ロバスト安定になっていることがわかる。目的関数が絶対変位、絶対加速度の場合も同様の質量の変化があってもロバスト安定になっている。

図5 質量変動に対するロバスト安定性の実験結果

以上の結果から、多自由度系の振動絶縁において各目的関数によって各モードの振動絶縁効果が異なるため、モード別つまり周波数領域で目的関数を与えれば、効果的な振動絶縁を行うことができると思われる。

4. H^∞ 制御系の設計

本章では、3章の結果を基に多自由度系の振動絶縁に適した周波数成形評価基準による感度低減を行い、モデル化誤差に対してロバストな制御系設計が可能で、かつ観測量が限られている実用的な問題に応用が可能な H^∞ 制御の出力フィードバック制御理論の応用を試みる。

4.1 周波数成形評価基準による制御のための周波数重み関数の設計 1次、2次モードで効果的に振動絶縁を行うために、多自由度系の振動絶縁に適した評価関数として1次モードの周波数領域では目的関数を絶対変位、2次モードの周波数領域では目的関数を絶対加速度にする。したがって、図6のように制御システムにかかる周波数重みの設計において、1次モードの周波数領域で目的関数を絶対変位、2次モードの周波数領域で絶対加速度に別々に設定する。この際、変位の目的関数を通るフィルタをローパスフィルタ、加速度の目的関数を通るフィルタをバンドパスフィルタとする。また図7の一般化プラントにおいて入力雑音 w から制御量 z_2 までの制御問題を考慮する場合、入力雑音 w から観測量までに外乱のダイナミクスのモデル誤差とシステムの低次元化によるモデル誤差が含まれるようになる。そこで、制御入力に関する周波数重みを設計するとき、入力雑音 w から観測量までの加法的誤差 ΔP を求め

図4 カルマンフィルタによるフィードフォワード併合最適制御の周波数応答の数値計算および実験結果

図6 周波数成形評価基準による制御のための周波数重み関数

て、図6のようにモデル誤差 ΔP を包むように制御入力に関する周波数重み関数を設計する。ここでモデル誤差 ΔP を見ると、外乱のダイナミクスのモデル誤差と低次元化されなかった3次、4次モードのモデル誤差の影響は少ないので特に低次元化によるロバスト制御を行う必要がないことがわかる。これは3章のカルマンフィルタによる最適制御において実験的に考察された通りである。しかし、ここでは2次モードまで制御を行えばよいので、エネルギー面から図6のように3次モード以降は制御力が通らないように制御入力に関するフィルタを設計する。図6において W_{1d} がローパスフィルタで、 W_{1a} がバンドパスフィルタである。 W_{1d}, W_{1a} は制御システムの重み行列、 W_2 は制御入力の重み行列である。

4.2 H^∞ 制御系の設計 H^∞ 制御系の設計において混合感度問題を適用する。

図7を考慮する場合、混合感度問題の十分条件として

$$\left\| \frac{G_{wz1}}{G_{wz2}} \right\|_\infty < 1 \quad \dots\dots\dots (17)$$

G_{wz1} : 外乱 w から制御量 z_1 までの伝達関数

G_{wz2} : 外乱 w から制御量 z_2 までの伝達関数

を満足する制御器 $C(s)$ を求めればロバスト安定かつ、応答の改善ができる制御系が設計できる。

図7 一般化プラントと制御器

以上より、一般化プラントの状態方程式は次式で表わされる。

$$\begin{aligned} \dot{x}_g &= A x_g + B_1 w + B_2 u \\ z_c &= C_1 x_g + D_{12} u \\ y_o &= C_2 x_g \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (18)$$

ここで、

$$\begin{aligned} x_g &= [x_s \quad x_u \quad z]^T & z_c &= [z_{c1} \quad z_{c2}]^T \\ A &= \begin{bmatrix} A_{w1} & 0 & B_{w1} C_{w0} \\ 0 & A_{w2} & 0 \\ 0 & 0 & A_p \end{bmatrix} \\ B_1 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & B_{wp} \end{bmatrix}^T & B_2 &= \begin{bmatrix} 0 & B_{w2} & B_{up} \end{bmatrix}^T \\ C_1 &= \begin{bmatrix} C_{w1} & 0 & 0 \\ 0 & C_{w2} & 0 \end{bmatrix} \\ C_2 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & C_p \end{bmatrix} & D_{12} &= \begin{bmatrix} 0 & D_{w2} \end{bmatrix}^T \end{aligned}$$

である。この問題について出力フィードバックによる H^∞ 制御解⁹⁾を適用してフィードバックゲインを求めることができる。

4.3 周波数成形評価基準による制御 図8は、LQG制御において目的関数を絶対変位、絶対加速度にする場合と本研究で提案する周波数成形評価基準による H^∞ 制御の数値計算結果の比較である。ここでは評価規範の特徴を明確にするために、図6において W_{1a} と W_2 の遮断周波数を4次モードまで包含するように設定した。周波数応答は入力を外乱の変位、出力を1階の絶対変位として求めた。周波数成形評価基準による結果を見ると、1次モードでは目的関数が絶対変位としての特徴が現われて、2次モード以降では目的関数が絶対加速度としての特徴が現われていることが分かる。従って、多自由度系の振動絶縁において本研究で提案するような周波数重み評価関数を採用すれば、全モードを効果的に抑えることができる。

4.4 制御実験とその結果 実験装置および実験方法は3章のカルマンフィルタによる最適制御の場合と同様である。

また、数値計算と実験に用いた値も3章のカルマンフィルタによる最適制御の場合と同様である。外乱の仮定周波数領域は2次モードつまり8 Hzに設定された。その際、周波数応答は入力を外乱の変位、出力を1階の絶対変位として求めた。また、観測量として床と構造物の1階との相対変位と外乱の加速度を検出して制御を行った。

まず、制御目的関数を1階の絶対変位、絶対速度、絶対加速度にして振動絶縁効果を調べた。図9は数値計算と実験結果をまとめたものである。周波数応答の結果は横軸が周波数[Hz]、縦軸がゲイン[dB]である。その結果を見る

図8 LQG制御と周波数成形評価基準による H^∞ 制御の周波数応答

と、カルマンフィルタによる最適制御の場合と同じように目的関数別の傾向の結果が得られている。

また、図6の各モード別に目的関数を与える周波数成形評価基準による周波数重み関数に基づいた H^∞ 制御の数値計算および実験結果を図10に示す。この結果を見ると、1次モードでは目的関数が絶対変位としての特徴が現われて、2次モードでは目的関数が絶対加速度としての特徴が現われていることがわかる。したがって、多自由度系の振動絶縁において本研究で提案する周波数重み評価関数を採用すれば振動絶縁性能が向上できることが実証された。

5. まとめ

本研究は、水平方向の外乱を受ける多自由度系の振動絶縁に対して最適な評価基準を提案し、低次元化されたモデルを対象にカルマンフィルタによるフィードフォワード併合最適制御と H^∞ 制御によるフィードフォワード併合制御の数値計算および実験を行った。その結果を要約すると次のようになる。

(1) 多自由度系の振動絶縁に適した評価基準として基本モードの固有振動数以下の周波数領域においては絶対変位を採用し、それ以上の周波数領域においては加速度を採用した目的関数は、多自由度系の振動絶縁の評価基準に適している。

(2) 多自由度系の振動絶縁問題は構造的に高次の振動

図9 H^∞ 制御による周波数応答の数値計算および実験結果 図10 周波数成形評価基準による H^∞ 制御の数値計算および実験結果

伝達率が低いので、低次元化によるスピルオーバー不安定の問題は少ない。応答レベルが比較的高い低次モードの制振が重要である。

(3) 周波数成形重みを用いて感度低減を行うことが振動絶縁においては有効であるので、周波数成形が行いやすい H^∞ 制御理論は有効であり、感度低減の振動数領域のロバスト性が問題になるときはこの適用が不可欠になると考えられる。

参考文献

- (1) 鈴木・ほか3名, 機論, 57-536.C (1991), 1129.
- (2) 藤田・ほか7名, 機論, 57-536.C (1991), 1122.
- (3) 岩田・岡田, 機論, 50-458.C (1984), 1955.
- (4) 安田・ほか2名, 機論, 58-552.C (1992), 2381.
- (5) 長屋・荒井, 機論, 56-525 (1990), 1230.
- (6) 安田・池田, 機論, 59-562 (1993), 1694.
- (7) 藤山・ほか4名, 機講論, 900-42 (1990), 251.
- (8) 美・吉田, 機論, 58-552 (1992), 2373.
- (9) 三平・美多, 計測と制御, 29-2 (1990), 19-25.