ふれまわりの危険速度を通過する
回転軸のねじり振動*加藤正義^{*1}, 太田 博^{*2}, 中村 慎一郎^{*2}Torsional Vibration of a Rotating Shaft in Passing through
the Critical Speed of Whirling Vibration

Masayoshi KATO, Hiroshi OTA and Shin-ichiro NAKAMURA

When a flexible shaft carrying a rotor passes through the critical speed of shaft whirling, the flexible shaft experiences not only bending but also torsional vibration. The torsional vibration may resonate at a certain rotational speed. Analyses for the precise torsional vibration require equations of motion with an accuracy to the second-order of shaft deformations, shaft deflection, angle of deflection, and torsion. The shaft is assumed to be driven with a constant angular acceleration. The present numerical solutions demonstrate that a torsional vibration occurs immediately after the rotating shaft passes through the critical speed of shaft whirling. The rotational speed where the torsional vibration grows is nearly equal to the sum or difference of the natural angular frequency for whirling and that for torsion.

Key Words: Vibration of Rotating Body, Passage through Critical Speed, Constant Angular Acceleration, Torsional Vibration, Whirling, Symmetrical Rotor, Numerical Solution

1. 緒 言

回転軸系においてねじり振動が問題となるのは、通常、歯車や自在継手など、ねじり振動をひきおこすものが構成要素として含まれている場合である^{(1)~(3)}。これに比べると、ここで扱う回転軸系は、両端が固定支持された真円弾性軸の中間に一つの対称回転体を取り付けられた単純なものである。このような回転軸系を対象として軸のねじりあるいは駆動トルクと曲げの問題を扱った研究もいくつかある。たとえば、Tondl⁽⁴⁾は、一定の速度で回転する軸の曲げとねじりの連成による安定性の問題を扱っている。Gash および Pfützner⁽⁵⁾は、ロータの共振点通過に必要なトルクを、角加速度が零となる条件下で求めているが、軸のねじり振動は考慮していない。また、小野⁽⁶⁾は、一定の回転角速度 ω で回転しているロータ系の駆動トルクを振動数 ν で変動させると、不釣合いに起因する曲げ振動は、 ω 以外に $\omega \pm \nu$ の振動数の振動成分も持つようになることを明らかにしている。

危険速度を通過する回転軸など、一般に、角速度が変化する回転軸においては、軸の角速度と異なる角振

動数を持ったふれまわり振動が発生するので、軸材料に繰返し応力が生ずる。これにねじり振動が加わると、軸の疲労破壊に対する危険性が増すことになる。この意味からも、危険速度通過時に実際にねじり振動が発生するのかどうか、発生するとしたらその大きさはどの程度のものであるのかを知ることは重要である。

本研究では、回転軸が一定の角加速度でふれまわりの危険速度を通過するときに、ねじり振動も発生することを解析的に示し、このねじり振動が、角加速度の大きさあるいは減衰係数の大きさによりどのような影響を受けるのかを明らかにした。さらに、ねじり振動の発生機構についても考察した。

2. 回転軸系

図1に本研究の対象とした回転体-軸系を示す。回転軸 S_h は長さ l の一樣な円形断面の弾性軸で、両端A、Bにおいて固定支持されている。回転軸の中間の点Sには、質量 m の対称回転体Dが取り付けられている。B端においては、摩擦力によるモーメントや負荷トルクは作用しないものとする。静止直交座標系 $O-xyz$ およびこれに平行な運動座標系 $G-XYZ$ を図1のように設定する。Gは回転体の重心、 $\overline{SG} = e$ は偏心、角 τ は動不釣合いである。GTは軸 S_h のたわみ曲線の点Sにおける接線に平行な直線である。軸の駆動端Aにお

* 原稿受付 平成6年7月25日。

*¹ 正員、愛知教育大学教育学部 (☎448 刈谷市井ヶ谷町広沢1)。*² 正員、名古屋大学工学部 (☎464-01 名古屋市中種区不老町)。

式(7), (8)の右辺を零とおいた系の固有角振動数は4個存在し, これらを p_k ($k=1, \dots, 4$; $p_1 > p_2 > p_3 > p_4$) とおく。

4. ねじり角

式(9)によると, ねじり角 θ_t は, 時間とともに直線的に変化する部分と回転軸のふれまわり振動によって周期的に変動する部分とからなると考えられる。前者を θ_{t1} , 後者を θ_{t2} とおく。

$$\theta_t = \theta_{t1} + \theta_{t2} \quad \dots\dots\dots (11)$$

すなわち, θ_{t1} は

$$\delta_t \theta_{t1} = -I_p \lambda - c_3 (\lambda t + \omega_{a0} + \dot{\theta}_{t1}) \quad \dots\dots\dots (12)$$

の特解であり,

$$\theta_{t1} = -\frac{1}{\delta_t} \left\{ I_p \lambda + c_3 \left(\omega_{a0} + \lambda t - \frac{c_3 \lambda}{\delta_t} \right) \right\} \quad \dots\dots\dots (13)$$

で与えられるものとする。このとき, 式(9)は

$$\begin{aligned} I_p \ddot{\theta}_{t2} + \delta_t \dot{\theta}_{t2} = & -c_3 \dot{\theta}_{t2} - \delta_t (y \theta_x - x \theta_y) \\ & - \frac{1}{2} I_p (\ddot{\theta}_x \theta_y - \ddot{\theta}_y \theta_x) \\ & + \tau (I - I_p) \{ \ddot{\theta}_x \sin \Theta - \ddot{\theta}_y \cos \Theta \} \\ & + e \{ \ddot{x} \sin(\Theta + \xi) - \ddot{y} \cos(\Theta + \xi) \} \quad \dots\dots (14) \end{aligned}$$

となる。

回転軸がふれまわりの危険速度を通過する過程において, 式(14)の右辺がねじりの固有角振動数 $p_t = \sqrt{\delta_t / I_p}$ に近い振動数で変動するようになると, 回転軸はねじりの共振を起し, 比較的大きなねじり振動を生ずるものと考えられる。

なお, ねじり角と同様に, 式(10)で与えられる駆動トルク T_r についても, 時間とともに直線的に変化する部分 T_{r1} と周期的に変動する部分 T_{r2} とに分けて, T_{r1} , T_{r2} をそれぞれ次のようにおく。

$$\left. \begin{aligned} T_{r1} &= -\delta_t \theta_{t1} \\ T_{r2} &= -\delta_t \theta_{t2} - \delta_t (y \theta_x - x \theta_y) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (15)$$

5. 数値計算結果

運動方程式(7), (8), (14)を数値積分し, ふれまわりの危険速度通過時における, ふれまわり振動とねじり振動の大きさの関係や, これらの振動の振動数と回転角速度の関係などを明らかにする。ここでは, 以下の無次元パラメータ値を用いた。

$$\left. \begin{aligned} e &= 1 \times 10^{-4}, \quad \tau = 4 \times 10^{-4}, \quad \xi = 0^\circ, \\ I_p &= 0.1034, \quad I = 0.0534, \quad \gamma = -0.0923, \\ \delta &= 0.0164, \quad \delta_t = 0.00256 \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (16)$$

このほかの無次元パラメータ λ , c_1 , c_2 , c_3 の値については, 必要に応じて示す。式(16)のパラメータの値に

対して, ふれまわり振動の危険速度 ω_c とねじりの固有角振動数 p_t を計算すると, $\omega_c = 0.925$, $p_t = 0.157$ となる。数値積分に際しては, 加速あるいは減速の開始時における定常解を初期値とした。

5.1 加速の場合 図2(a), (b) は, それぞれ, 駆動端の角速度を $\omega_a = 0.7 \sim 1.4$ まで加速した場合の,

(a) ふれまわり振幅

(b) ねじり振動

(c) 駆動トルク

図2 加速時のふれまわりの振幅変化とねじり振動 ($\lambda = 0.2 \times 10^{-3}$, $c_1 = c_2 = 1.0 \times 10^{-3}$, $c_3 = 0.5 \times 10^{-3}$)

たわみの振幅 $A = |z|$ およびねじり角 θ_{t2} の変化の様子を示したものである。角加速度は $\lambda = 0.2 \times 10^{-3}$ である。

たわみの振幅は、危険速度を通過した直後で最大値をとり、その後、増加、減少を周期的に繰り返しながら小さくなっている。これらの振幅変化の特徴は、周知のことからである。なお、たわみ角の振幅は、図には示していないが、大きさがたわみのおよそ1.5倍で、図2(a)と同様に变化する。

一方、ねじり角 θ_{t2} は、ふれまわりの危険速度 $\omega_a = \omega_c (= 0.925)$ の付近から急に減少し始め、負のピーク値に達した後に振動的に変化している。すなわち、ここでねじり振動が発生し始めている。そして、 $\omega_a = 1.12$ 付近でねじり振動の振幅は最大となり、その後、周期的に変動しながら減衰していく。この振幅変化の様子は、振動系が共振点を通過するときの振幅応答に類似している。

式(15)で与えられる駆動トルク T_{r2} は図2(c)のようになる。 T_{r2} は、図2(b)の θ_{t2} とちょうど逆位相のかた

図3 減速時のふれまわりの振幅変化とねじり振動 ($\lambda = -0.2 \times 10^{-3}$, $c_1 = c_2 = 1.0 \times 10^{-3}$, $c_3 = 0.5 \times 10^{-3}$)

ちで変化しており、その大きさが θ_{t2} のおよそ $-\delta_t (= -0.00256)$ 倍であることが確認できる。すなわち、式(15)の第2式の右辺第2項 $-\delta_t(y\theta_x - x\theta_y)$ は、実質的には θ_{t2} にほとんど影響していない。

5.2 減速の場合 図3(a), (b)に、 $\lambda = -0.2 \times 10^{-3}$ で危険速度を通過させた際のたわみの振幅 A とねじり角 θ_{t2} の変化を示す。減速の場合は、振幅 A については、危険速度 ω_c の通過直後の最大値は加速の場合に比べわずかに小さいが、その後に現れる周期的な変動の大きさは加速の場合よりも速く小さくなっている。そして、加速の場合と同様、たわみおよびたわみ角の振幅が増加する $\omega_a = \omega_c$ の付近からねじり振動が始まっている。ねじり振動の振幅は、 $\omega_a = 0.7$ 付近で最大となり、その最大値は、加速の場合の図2(b)と比べると、およそ $1/2$ 程度である。

図2および図3には、ふれまわりの振幅とねじり振動の振幅の変化の典型的な形を示したが、ふれまわりの危険速度 $\omega_a = \omega_c (= 0.925)$ の付近で生ずるねじり角のピーク値は、後に示すように、加速の場合は $\omega_a = 1.12$ 付近での最大値よりも大きくなることもあり、また、減速の場合は $\omega_a = 0.7$ 付近での最大値よりも大きくなることもある。ここでは、後者の最大値を θ_{t2max} において、これが全体的に見て前者のピーク値よりも小さくなくても最大値と呼ぶことにする。

5.3 角加速度の影響 図4に、角加速度に対するねじり振動 θ_{t2} の振幅の最大値 θ_{t2max} の変化の様子を示す。

黒三角および白三角の印は、それぞれ加速および減速の場合のふれまわりの危険速度 $\omega_a = \omega_c$ において、ふれまわりの振幅が急に増加する時に生ずるねじり角の変動の最初のピークの大きさを示す。これらのピーク値は、加速の場合、減速の場合ともにほぼ同じであり、角加速度の絶対値 $|\lambda|$ の増加とともに減少する。特に $|\lambda|$ の小さい範囲でピーク値の減少の割合が大きい。

図4 角加速度の影響 ($c_1 = c_2 = 1.0 \times 10^{-3}$, $c_3 = 0.5 \times 10^{-3}$)

黒丸および白丸の印は、ふれまわりの危険速度を通過した後に生ずるねじり振動の振幅の最大値 θ_{t2max} を示す。加速の場合、減速の場合ともに、角加速度の絶対値 $|\lambda|$ の増加に対する θ_{t2max} の変化は、 $|\lambda|$ の非常に小さい範囲では比較的急に増加し、 $|\lambda|$ のある値で最大となり、その後ゆるやかに減少する。 θ_{t2max} は、加速の場合は $\lambda \doteq 0.23 \times 10^{-3}$ 、減速の場合は $\lambda \doteq -0.40 \times 10^{-3}$ において最大となる。図4に示した範囲では、 θ_{t2max} の大きさは、加速の場合の方が減速の場合よりも大きい。

このように、極端にゆっくりとした加速や減速により危険速度を通過するのは、 $\omega_a = \omega_c$ 付近で大きなふれまわり振動を生じてしまうだけでなく、大きなねじりを引き起してしまう。逆に、 $|\lambda|$ をある大きさ以上の値に設定すると、 $\omega_a = \omega_c$ 付近のねじり角のピークは小さく抑えられるが、その後生ずるねじり振動は効果的に抑えることができない。ここで用いたパラメータ値のもとでは、ねじり振動を抑える上での角加速度 λ の適当な値は、加速の場合は $\lambda \doteq 0.07 \times 10^{-3}$ 、減速

の場合は $\lambda \doteq -0.13 \times 10^{-3}$ である。

5.4 ねじりの減衰係数の影響 図5は、ねじりの減衰係数 c_3 を変化させたときの、ねじり振動の振幅の最大値 θ_{t2max} の変化を示したものである。 $\omega_a = \omega_c$ 付近で生ずるねじり角のピーク値は、 c_3 を変えてもほとんど変わっていない。 θ_{t2max} の値は、 c_3 の増加に対して、加速の場合は若干減少した後に増加傾向となり、減速の場合は単調に増加する。このように、ねじり振動の振幅は、 c_3 の増加とともに必ずしも小さくなるわけではない。

5.5 横振動の減衰係数の影響 図6に、軸の横振動の減衰係数 c_1, c_2 に対する θ_{t2max} の変化の様子を示す。 $\omega_a = \omega_c$ 付近で現れるピークの大きさは、 c_1, c_2 を変化させてもほとんど変化しないが、 θ_{t2max} に関しては c_1, c_2 の増加に対するはっきりとした減少傾向が認められる。加速の場合および減速の場合、それぞれ、 c_1, c_2 が 2.5×10^{-3} および 1.5×10^{-3} より大きな値に対して、 θ_{t2max} の値は $\omega_a = \omega_c$ 付近のピーク値よりも小さくなる。なお、 c_1, c_2 が零の場合は、ふれまわり振動が発散してしまうため、除外した⁽⁸⁾。

6. ねじり振動の発生機構

図2(a)あるいは図3(a)を見ても分るように、ふれまわりの危険速度を通過した後の、たわみの振幅 A は周期的に変化し、うなりに似た現象を呈している。このうなり現象は、危険速度を通過した後のふれまわり振動が、不釣合いによる強制振動と自由振動からなっているために生ずるものである。もちろん、不釣合いによる強制振動は、角速度 ω ($\doteq \omega_a$) と同じ角振動数の振動である。自由振動は、危険速度 ω_c を通過した直後では、固有角振動数 p_2 の振動が優勢となる。これは、危険速度 ω_c においては、偏心あるいは動不釣合いによる強制振動の振動数 ω_a が固有角振動数 p_2 と共振するので、この共振により振幅 A が最大値をとったとき、固有角振動数 p_2 の振動モードの振動が大きくなり、このときの軸のたわみの形状がその後の回転軸の自由振動に対する初期外乱となるためである。したがって、ふれまわりの危険速度通過直後の振幅変化の振動数は、およそ、加速の時は $\omega_a - p_2$ 、減速の時は $p_2 - \omega_a$ によって与えられる。

回転軸のふれまわり振動の減衰係数 (c_1, c_2 ではない) に関しては、著者らは前報⁽⁸⁾で次の結論を得ている。すなわち、ふれまわりの減衰係数が c_1, c_2 に比例して増加するのはもちろんであるが、角速度 ω_a によって変化し、また、前向きふれまわりに対する減衰係数は、 λ にも c_3 にも比例して小さくなる。

このことから、図2(a)および図3(a)に見られるように、加速時より減速時の方が、危険速度通過後のふれ

図5 ねじりの減衰係数の影響 ($|\lambda| = 0.2 \times 10^{-3}$, $c_1 = c_2 = 1.0 \times 10^{-3}$)

図6 横振動の減衰係数の影響 ($|\lambda| = 0.2 \times 10^{-3}$, $c_3 = 0.5 \times 10^{-3}$)

図7 加速時のふれまわり振幅と駆動トルクの変化(図2の拡大図)

まわり振幅の周期的な変動が速く減衰しているということが理解される。

ここで、たわみの振幅 A の変化と駆動トルク T_{r2} の変化の関係をしてみる。 ω_a が $\omega_c (= 0.925)$ となる付近でふれまわりの振幅 A が増加しつづけているが、 A の立ちあがりの勾配が最も急なところで、駆動トルク T_{r2} のピークが現れており、 A がピーク値に達するまで駆動トルク T_{r2} は正の値をとっている。そして、 A が減少過程に入ると、 T_{r2} は負となっている。このような振幅 A と駆動トルク T_{r2} の変化の位相関係は、回転軸系のふれまわり振動に関する力学的エネルギーを増加・減少させるために、駆動端におけるトルクが最も効率よく仕事を行っている状態を表しているものと考えられる。しかし、このような状態は、ねじり振動の振幅が急に増大する角速度の付近からくずれ始める。

加速の場合を例にとって考察しよう。図7は図2の $\omega_a = 1.06 \sim 1.16$ の範囲を拡大して示したものである。ふれまわりの振幅 A の変動の振動数が増加してねじりの固有角振動数と一致するようになると、軸はねじりの固有角振動数でねじり振動を行うようになるため、振幅 A とトルク T_{r2} との間のそれまでの位相関係が保たれなくなり、ふれまわり振動の振幅変化を生じさせるのに必要な駆動トルクの仕事の効率が悪くなる。このため、より大きなトルク変動が必要となる。そして、この変動トルクに比例した大きなねじり振動が発生するのである。

見方を変えれば、ふれまわりの振幅変化がトルク変動を引き起こし、トルク変動がAS間の回転軸のねじり振動を励起しているのであって、ふれまわりの振幅変化の振動数がねじりの固有角振動数に一致すれば、ねじり振動の共振が起るものと解釈できる。このよう

な条件が成り立つのは、加速の場合は $\omega_a = p_2 + p_t$ のときであり、この回転角速度は、ジャイロモーメントの影響により、 $\omega_c + p_t = 1.082$ よりわずかに大きい。図2(b)を見ても、実際に、この付近の角速度でねじり振動の振幅の増加が最も急峻となっている。

また、減速の場合もまったく同じ理由により、駆動端の角速度が $\omega_a = p_2 - p_t$ となったときに、ねじり振動の共振が起る。この角速度は、 $\omega_c - p_t = 0.768$ よりわずかに小さい。そして、加速の場合に比べてねじり振動の最大振幅が小さいのは、このねじりの共振点付近で、振幅 A の周期的な変化が加速の場合よりも小さくなっているためである。

以上述べたことから、ねじり振動の共振が起る時に、ふれまわり振動の振幅変化が大きいほど、ねじり振動の振幅の最大値 θ_{t2max} は大きくなることがわかり、図4～図6に示した結果が定性的に理解される。

7. 結 言

本研究では、一つの対称回転体を持つ軸系がふれまわりの危険速度を通過する時に、回転軸にねじりの共振が起り、比較的大きなねじり振動が発生することを解析的に明らかにした。

ふれまわりの危険速度を ω_c 、ねじりの固有角振動数を p_t 、駆動端での軸の回転角速度を ω_a とすれば、回転軸にねじりの共振が起るのは、加速の場合には、 $\omega_a \doteq \omega_c + p_t$ となるときであり、減速の場合には $\omega_a \doteq \omega_c - p_t$ となるときである。ねじり振動の原因となるふれまわり振動の振幅変化は、角加速度 λ の絶対値の増加とともに大きくなるので、ねじり振動の防振のために、ふれまわりの危険速度をできるだけ速く通過させようとすることは逆効果となることもある。図4に示した例では、加速時は $\lambda = 0.07 \times 10^{-3}$ 、減速時は $\lambda = -0.13 \times 10^{-3}$ の角加速度に設定するとよい。

文 献

- (1) 飯田・田村・菊地・阿片, 機論, 46-404, C(1980-4), 375.
- (2) 岩倉・有井・川井, 機論, 49-442, C(1983-6), 929.
- (3) 加藤・太田・加藤(利), 機論, 53-495, C(1987-11), 2257.
- (4) Aleš Tondl (前澤成一郎訳), 回転軸の力学(1972), 23-259, コロナ社.
- (5) R. Gasch, H. Pfützner (三輪修三訳), 回転体の力学(1978), 49-56, 森北出版.
- (6) 小野, 機論, 50-458, C(1984-10), 1790.
- (7) Kato, M., Ota, H., Nakamura, S., *Proc. of IMechE, 5th Int. Conf. on Vibrations in Rotating Machinery, Bath(1992-9)*, 469.
- (8) 加藤・太田, 機論, 56-522, C(1990-2), 308.