多連結ベルト系の駆動時における動特性の解析*

(第2報, 多連結ベルト系の起動時の過渡特性)

岩 壺 卓 三^{*1}, 有 井 士 郎^{*2}
長 谷 川 圭^{*3}, 塩 幡 宏 規^{*4}

Analysis of Dynamic Characteristics of Multiple Belt Systems (2nd Report, Start Up Transient Response of Multiple Belt Systems)

Takuzo IWATSUBO, Shiro ARII,
Kei HASEGAWA, Koki SHIOHATA

This paper deals with the theoretical and experimental analysis of the dynamic characteristics of a multi-coupled belt system driven by an induction motor. The equations of motion of the belt system are easily derived by using the computer algorithm presented in the first report. In order to investigate the transient response exactly, the output torque of the motor is considered in two cases. In case 1, the torque is approximated by a speed characteristics curve which shows steady-state torque against rotational speed of a motor. In case 2, the torque is precisely calculated by using the equations of the relationship between voltages and currents of an equivalent two-phase induction motor. The vibratory response of the belt system and the oscillation of the current in the motor interact each other, and the response of the motor torque differs from the steady-state torque. In order to investigate the transient response, it is necessary to consider the transmission of the energy between mechanical systems and electrical systems.

Key Words: Transient Response, Multi-Degree-of-Freedom System, Vibration of Belt System, Induction Motor, Coupled Vibration, Simulation

1. 緒 言

紙幣搬送機構には, 多くのベルトとプーリの組み合わせによる複雑なベルト系が用いられている。この機械はその用途の性質上, 始動と停止が多く, さらに即応性の点から急加速と急停止の性能が重要となるが, これまでこの問題を取り扱った研究は少ない。

本論文は, 第1報⁽¹⁾において提案した, 複数のベルトとプーリからなる系の起動時における過渡特性を解析するためのモデル化の手法を実践し, その妥当性を実験により実証する。

まず, 第1報に従い, 任意のベルト系について運動方程式を導出するアルゴリズムを用いて, ベルトとプーリの諸元を入力すれば運動方程式を自動的に作成し系の起動時の過渡応答が求められるプログラムを開発した。ここで, 実験において駆動源として用いられるインダクションモータについても二通りの数学的モデル化を行っている。すなわち, (1) モータ出力トルクをそのモータの等

価回路から得られる速度特性曲線で近似したモデル化, (2) モータの電気回路における電圧と電流の関係式を用いて電気系の過渡現象を考慮したモデル化である。次に, この解析プログラムを用いた計算結果と実験結果との比較を行い本手法の有効性を検証するとともに, 多連結ベルト系の過渡現象を考察する。

2. ベルト系の運動方程式導出アルゴリズム

本研究においては, ベルト系の運動方程式導出に際して以下の仮定をおく。

- (1) 図1に示すように, ベルトは張力方向にばね定数 k のばねと, 減衰 c のダンパによってモデル化できる。
- (2) ベルトの質量および体積は無視する。
- (3) ベルトとプーリとの間にはすべりはしない。

複数のベルトからなるベルト系を個々のベルトに着目してみると, 系全体は一本のベルトで駆動されるプーリからなる系の組み合わせで構成されていることがわかる。したがって, 基本となる一本のベルトからなる系の運動方程式を導き, これらを組み合わせて系全体の運動方程式を導出する。

* 平成5年7月22日 Dynamics and Design Conference 1993において講演, 原稿受付 平成6年6月27日。

^{*1} 正員, 神戸大学工学部 (〒657 神戸市灘区六甲台町1-1)。

^{*2} 正員, 鳥取大学工学部 (〒680 鳥取市湖山町南4-101)。

^{*3} 学生員, 神戸大学大学院 [現: (株)クボタ]。

^{*4} 正員, (株)日立製作所機械研究所 (〒300 土浦市神立町502)。

2.1 一本のベルトからなる系の運動方程式 図2に示すような n 個のプーリが一本のベルトによって駆動されている系について考える。これらのプーリに並んでいる順に $1, 2, \dots, n$ と番号をつけ、プーリ i の回転角を θ_i 、半径を r_i 、慣性モーメントを I_i とする。また、プーリに作用する駆動または負荷トルクを T_i とする。ここで、図2のように、プーリ i と隣り合うプーリを h, j とすれば、プーリ i についての運動方程式は式(1)となる。

$$I_i \ddot{\theta}_i - c_{hi} r_h r_i \dot{\theta}_h + (c_{hi} + c_{ij}) r_i^2 \dot{\theta}_i - c_{ij} r_i r_j \dot{\theta}_j - k_{hi} r_h r_i \theta_h + (k_{hi} + k_{ij}) r_i^2 \theta_i - k_{ij} r_i r_j \theta_j = T_i \quad (1)$$

ここで、 k_{ij} および c_{ij} はとなり合うプーリ i, j 間のベルトのばね定数および減衰係数である。

全てのプーリについて運動方程式を導出し、プーリの番号順にマトリックス表示すると、式(2)となる。

$$I \ddot{\theta} + C \dot{\theta} + K \theta = T \quad (2)$$

ここで、

$$\theta = \{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n\}^T, \quad T = \{T_1, T_2, \dots, T_n\}^T$$

式(2)においてプーリ i に関する運動方程式はマトリックス I, C, K の i 行目に現れる。したがって I は I_i が対角要素となる行列である。また剛性マトリックス K および減衰マトリックス C の要素配列は図3の斜線部分

図1 ベルト系モデル

図2 一本のベルトによって駆動される系

のような規則的な配列となる。

2.2 系全体の運動方程式 系全体の運動方程式は、前節で導出した一本のベルトで駆動されるプーリからなる系(以下ループと呼ぶ)の運動方程式を組み合わせる導出する。

図4に示すように、二つのループが一個のプーリ m を介して組み合わせられた系で考える。プーリ m は一方のループでプーリ l, n と、他方のループではプーリ l', n' とつながっていると看做する。このときプーリ m についての運動方程式を求めると式(3)となる。

$$I_m \ddot{\theta}_m - c_{lm} r_l r_m \dot{\theta}_l + (c_{lm} + c_{mn}) r_m^2 \dot{\theta}_m - c_{mn} r_m r_n \dot{\theta}_n - c_{l'm'} r_{l'} r_m \dot{\theta}_{l'} + (c_{l'm'} + c_{m'n'}) r_m^2 \dot{\theta}_m - c_{m'n'} r_m r_{n'} \dot{\theta}_{n'} - k_{lm} r_l r_m \theta_l + (k_{lm} + k_{mn}) r_m^2 \theta_m - k_{mn} r_m r_n \theta_n - k_{l'm'} r_{l'} r_m \theta_{l'} + (k_{l'm'} + k_{m'n'}) r_m^2 \theta_m - k_{m'n'} r_m r_{n'} \theta_{n'} = T_m \quad (3)$$

この式の剛性項および減衰項の係数はそれぞれのループ毎に導出した m についての運動方程式の剛性項および減衰項をたし合わせたものとなっている。したがって、ループ毎に求めた剛性および減衰マトリックスは両ループに共有されるプーリ m についての剛性項、減衰項をたし合わせることでマトリックスの重ね合わせができる。これにより系全体の運動方程式の剛性および減衰マトリックスを求めることができる。

図3 剛性および減衰マトリックスの要素配列

図4 プーリ m で連結された系

3. 速度特性曲線によるモータのモデル化

前章のアルゴリズムに基づく解析プログラムを用いたシミュレーション結果と実験結果とを比較するためには、駆動源として用いたインダクションモータのモデル化が必要となる。ここでは、まず、実験に用いたモータの出力トルクがインダクションモータの等価回路から得られる速度特性曲線であらわされるものとして、モータ出力トルクをモータ回転数の関数として与える電気系を簡略化したモデルで解析を行う。

3.1 誘導電動機の等価回路 図5に、定常状態における一相当りの等価回路をあらわすT型等価回路を示す。⁽²⁾⁽³⁾これは誘導機を電気回路に等価に置き換えたものである。 R_1, L_1' は固定子の抵抗および漏れインダクタンス、 R_2, L_2' は一次側から見た(一次側に換算した)回転子の抵抗および漏れインダクタンス、 L_m は固定子と回転子の相互インダクタンス、 s はモータ回転子の滑りである。固定子の自己インダクタンスは、 $L_1 = L_m + L_1'$ 、回転子の自己インダクタンスは、 $L_2 = L_m + L_2'$ となる。

これらの回路定数は、抵抗測定試験、無負荷試験、拘束試験によって求められる。これらの試験によって求めた本研究に用いたモータの諸元を表1に示す。

3.2 モータ出力トルクを速度特性曲線で近似した場合のシミュレーション 図5の等価回路より機械出力は次式で与えられる。

図5 誘導電動機の等価回路

図6 速度特性曲線図

$$P_o = \frac{3V^2 R_2/s}{(R_1 + R_2/s)^2 + (\omega L_1' + \omega L_2')^2} \quad (4)$$

ここで ω は電源角周波数で $\omega = 2\pi f$ (rad/s)である。回転機械の出力は角速度とトルクの積で表されるから、誘導機のトルクは次式で表される。

$$T_e = \frac{P_o}{\omega_m} = \frac{3V^2}{\omega_m} \frac{R_2/s}{(R_1 + R_2/s)^2 + (\omega L_1' + \omega L_2')^2} \quad (5)$$

式(5)に表1の値を代入し、モータの回転数 ω_m と出力トルク T_e の関係を図示すると図6のようになる。この図は速度特性曲線図と呼ばれるもので、電動機の回転速度が一定で電源投入から十分時間が経過した後の定常値を表している。

シミュレーション計算では、モータの出力トルクがこの図に従うものとして計算を行う。すなわち、先に述べたアルゴリズムによって得られた運動方程式を数値積分を用いて解くために、各刻み時間における駆動プーリの回転数に応じて式(5)で得られるモータトルクを与える。また、実験結果から定常状態においてモータのトルクは零とならずほぼ一定の値となることがわかったので、この値を定常負荷として計算の際考慮した。定常負荷の値は系を定常運転した状態に得られるモータトルクの平均値で、本実験装置では0.0423 Nmであった。

4. 電気系の過渡現象を考慮したモータのモデル化

前章ではモータの出力トルクをモータの回転速度のみの関数である速度特性曲線で与えた。しかし実際のモータの出力は、それによって駆動される機械系、すなわち本研究においてはベルト系の振動の影響を受けて複雑に変化する。なぜなら、モータによって駆動される機械系の振動は回転子の速度変動というかたちで電気系にフィードバックされ、電気系と機械系は相互に干渉し合って振動するからである。これは、電気エネルギーを機械エネルギーに

表1. 誘導電動機の諸元

primary resistance R_1	35.8 Ω
secondary resistance R_2	33.4 Ω
primary self-inductance L_1	1.016 H
secondary self-inductance L_2	1.016 H
mutual inductance L_m	0.944 H
moment of inertia I_{mot}	7.33×10^{-4} Kg $\cdot$ m ²
effective voltage V	200 V
number of poles p	4
frequency of alternating-current power line f	60 Hz

変換する電動機の構造, すなわち磁界の中で巻線を運動させる構造は, 逆に機械エネルギーを電気エネルギーに変換する発電機の構造と同じであることに起因している. 回転機械の駆動に電動機を使用する以上はこの問題を避けられず, したがって振動を解析する際に電気系と機械系を別々に独立したものとして取り扱うことはできない. そこで電気系の電圧と電流の瞬間値に関する微分方程式である電圧と電流の方程式を考慮して, モータとベルト系の過渡応答を解析する.

4.1 誘導電動機モデルの電圧と電流の関係式 誘導機のモデルとしては, 過渡現象の解析に良く用いられている $d-q$ 変換により一般化した, 図7に示すような二相機モデルを考え, このモデルに適応する電圧電流方程式を用いる.⁽²⁾⁽³⁾

図5の等価回路上の誘導機の定数を用いて, 二相機モデルの電圧電流方程式を表すと式(6)のようになる.

$$\mathbf{V} = \mathbf{R}\mathbf{i} + \mathbf{L}\dot{\mathbf{i}} + \frac{p}{2}\omega_m \mathbf{G}\mathbf{i} \quad (6)$$

ここで,

$$\mathbf{i} = \{i_{1d}, i_{1q}, i_{2d}, i_{2q}\}^T, \quad \mathbf{V} = \{V_{1d}, V_{1q}, V_{2d}, V_{2q}\}^T,$$

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} R_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{L} = \begin{bmatrix} L_1 & 0 & L_m & 0 \\ 0 & L_1 & 0 & L_m \\ L_m & 0 & L_2 & 0 \\ 0 & L_m & 0 & L_2 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0 & L_2 & 0 & L_m \\ -L_2 & 0 & -L_m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\mathbf{R}$ は抵抗マトリックス, $\mathbf{L}$ はインダクタンスマトリックス, $\mathbf{G}$ は速度起電力マトリックスあるいはトルクテンソルと呼ばれる. また, p は極数である.

本研究で用いるモータは三相機であるので, この式に電圧値を代入するために, 式(7)の三相を二相に変換する変換行列を用いる.

$$\begin{Bmatrix} V_{1d} \\ V_{1q} \end{Bmatrix} = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} V_a \\ V_b \\ V_c \end{Bmatrix} \quad (7)$$

ここで, V_a, V_b, V_c それぞれは位相が $2\pi/3$ ずつずれた正弦波で表される交流電圧で次式で与えられる.

$$\begin{aligned} V_a &= \sqrt{2}V \sin(\omega t) \\ V_b &= \sqrt{2}V \sin(\omega t - 2\pi/3) \\ V_c &= \sqrt{2}V \sin(\omega t - 4\pi/3) \end{aligned} \quad (8)$$

また, 本実験で用いた誘導機はかご形誘導機なので, 二次側は短絡されており $V_{2d} = V_{2q} = 0$ とする.

式(6)は電圧の次元を持っているので, 左側から電流 $\mathbf{i}$ の転置 $\mathbf{i}^T$ をかけると次式のように電力(仕事率)の次元を持つ式(9)が得られる.

$$\mathbf{i}^T \mathbf{V} = \mathbf{i}^T \mathbf{R}\mathbf{i} + \mathbf{i}^T \mathbf{L}\dot{\mathbf{i}} + \frac{p}{2}\omega_m \mathbf{i}^T \mathbf{G}\mathbf{i} \quad (9)$$

式(9)の左辺は外部電源から供給される電力, 右辺第1項は抵抗中の消費電力, 第2項は磁気エネルギーとして貯蓄される無効電力, 第3項は機械エネルギーに変換されるエネルギーを表している. したがって, 機械系に伝達される駆動トルクは次式となる.

$$T_e = \frac{\frac{p}{2}\omega_m \mathbf{i}^T \mathbf{G}\mathbf{i}}{\omega_m} = \frac{p}{2}L_m(i_{1q}i_{2d} - i_{1d}i_{2q}) \quad (10)$$

4.2 電気駆動系の過渡現象を考慮した場合のシミュレーション シミュレーションは4次のルンゲ・クッタ法⁽⁴⁾を用いて電気系の電圧電流方程式(6)とベルト系の運動方程式を同時に数値積分していく. 各時間きざみにおいて式(6), (10)を用いて算出した電気トルク T_e をベルト系の運動方程式のトルクベクトル $\mathbf{T}$ の駆動プーリに対応する項に与える. そして, その時のベルト系の運動方程式より求められる駆動プーリの回転速度 $\dot{\theta} = \omega_m$ を式(6)に与える. このように, 各時間きざみにおいて電気トルク T_e と回転速度 $\dot{\theta} = \omega_m$ を電気系と機械系との間でやりとりし, 時間きざみの間は定数係数の式として扱っている.

5. 実験結果と計算結果の比較および考察

5.1 実験装置 図8に実験装置概略図を示す. プーリ1~9はアルミ製で半径が10mm, プーリ10はステ

図7 2相誘導電動機モデル

ンレス製でベルトをかける部分の半径が 10mm である。表2に実験装置各部の慣性モーメントを示す。各プーリおよびシャフトの慣性モーメントの値は質量および形状から計算した値である。ベルトはゴム質で、ベルト各部のばね定数は図中の k の値で単位は KN/m である。ばね定数は実験により得られたモータトルクの時間応答を用いたシミュレーションにより求めた値で、ベルトの剛性は一定としている。また、ベルトの減衰係数はベルト単体での自由振動の減衰比から求め、 $1.0 \times 10^{-6} \text{Ns/m}$ である。

5.2 実験結果と計算結果の比較および考察 図9の(a)はモータ出力トルク時間応答、(b)はプーリ10の回転数の時間応答、(c)はプーリ6の回転数の時間応答である。各図において、実線は実験結果、破線はモータ出力トルクを速度特性曲線で近似した計算結果(以後簡略モデルと呼ぶ)、一点鎖線は電圧と電流の方程式を用いて機械系と電気系の連成を考慮した計算結果(以後連成モデルと呼ぶ)である。

モータ出力トルクの時間応答の結果、図9(a)では、簡略モデルの結果には実験結果にみられるような大きな振動は現れない。簡略モデルの結果と実験結果の比較から、モータの出力トルクは電源投入直後の過渡時には速度特

図8 実験装置

表2. 実験装置各部の慣性モーメント

pulley 1 ~ 9	$1.34 \times 10^{-6} \text{ Kg m}^2$
pulley 10	$4.36 \times 10^{-4} \text{ Kg m}^2$
motor	$7.33 \times 10^{-4} \text{ Kg m}^2$
torque transducer	$8.12 \times 10^{-6} \text{ Kg m}^2$
shaft	$5.15 \times 10^{-4} \text{ Kg m}^2$

(a) モータトルク時間応答

(b) プーリ10の回転数時間応答

(c) プーリ6の回転数時間応答

図9 実験結果と計算結果の比較

性曲線にしたがわないことがわかる。これに対して、連成モデルの結果には電源投入直後にかなり大きな振動が現れ、実験結果の傾向と一致している。しかし、この振動は急速に小さくなっており、実験結果より減衰がかなり大きく、トルクの振動振幅は実験値のほうが大きい。また、連成モデルの結果と実験結果を比較すると、連成モデルの結果の方が全体的にトルク値が高くなっている。

プーリ10の回転数の時間応答、図9(b)では、簡略モデルの結果に実験結果に見られるような振動がほとんど見られず、また、定常状態に達する時間は少し短い。簡略モデルで加速度が大きく、また振動がほとんど見られないのは、速度特性曲線で近似したモータ出力トルクが実際のモータ出力トルクのように振動せず、また全体に高い値となっていることによると考えられる。連成モデルの結果には、電源投入直後の実験結果において回転速度が変動し一番目との二番目の極大値を持つ時刻に同様の振動が見られるが、実験結果と比べるとかなり小さい。また、モータ出力トルク変動が実験値と比較的よく一致する0.05secまでは加速度が実験値とほぼ一致するが、それ以後は実験値よりも大きくなっており、定常状態では実験結果のような振動は現れていない。この点も計算によるモータ出力トルクが実験値より高い値で変動も小さくなっていることによると考えられる。しかしながら、定常状態に達する時間、および加速時の大まかな傾きは簡略モデルより実験結果により近いものとなっている。

図9(c)に示したプーリ6の回転数時間応答の実験結果では、電源投入直後の加速がプーリ10と比べ非常に鈍い。また、プーリ10で見られたモータのトルク変動に一致する速度変動もほとんど見られない。プーリ6と10の速度がほぼ等しくなるのは、電源投入後約0.09sec後であり、両者の速度差は最大で約4Hzもある。この速度差は、ベルトの伸縮で吸収したと考えるには大きすぎる量で、電源投入直後の加速時にプーリとベルトとの間にすべりが発生していると考えられる。一方、計算結果では、すべりを考慮しておらずプーリ6と10は時間遅れなく加速している。

シミュレーション計算では、ベルトとプーリとの間のすべりを考慮していないためモータによりベルト系全体を加速することになる。このためプーリ10の速度変動が実験値より小さくなり、これがモータ出力トルク変動が実験値より小さくまた早く減少することにつながったと考えられる。これに対して、実際のベルト系ではベルトと駆動プーリの間にすべりが発生し、これによりプーリの速度変動が大きくなり、またモータの出力トルク変動も大きくなっていると考えられる。このすべりは、駆動プーリの速度変動とモータのトルク変動を大きくする

が、ベルトで駆動されるプーリにはモータのトルク変動の伝達を減少させる効果をもつと考えられる。

簡略モデルでは、電源投入直後のモータ出力トルクが実験結果と異なることから、過渡的な現象を解析することはできないが、プーリの回転数応答の大まかな傾向を見ることができる。このモデルを用いる利点としては計算の容易さが挙げられる。計算に必要なモータ回路定数も三つの比較的簡単な試験によって得られることから、設計の初期段階での駆動モータの検討などに有効であると考えられる。

一方、連成モデルでは電源投入直後にあらわれるモータ出力トルクの変動とこれに伴うベルト系の振動ををあらわすことができる。過渡的な振動現象が問題となる場合には、モータの電気系と機械系との連成を考慮して解析する必要がある。

6. 結 言

本研究で得られた結果を以下にまとめる。

- (1) 複数のベルトによって構成される複雑な多連結ベルト系の運動方程式を導出するアルゴリズムおよび駆動モータのモデル化により、多連結ベルト系の起動時の過渡特性の解析が可能となった。
- (2) 起動時のモータトルク変動とこれに伴うベルト系の振動を求めるには、電気系と機械系の連成を考慮した解析を行う必要がある。
- (3) モータトルクを速度特性曲線で与えたシミュレーションによりプーリの回転数時間応答などベルト系の応答が容易に計算できる。
- (4) モータによって駆動されるプーリでベルトとの間にすべりが発生すると、プーリの速度変動とこれに伴うモータトルク変動が大きくなる。しかし、これ以外のベルトで駆動されるプーリにはモータトルク変動の伝達を減少させる。

謝 辞

本研究の誘導電動機のモデル化において神戸大学工学部電気工学科、中岡睦雄助教授に貴重な助言を頂いたことに対して感謝の意を表する。

文 献

- (1) 岩壺・ほか3名, 機論, 58-553, C (1992), 2669.
- (2) 上田, 電気機械とエネルギー変換工学, (1972), 昭晃堂.
- (3) 穴山, エネルギー変換工学基礎論, (1977), 丸善.
- (4) 戸川, 有限要素法による振動解析, (1975), サイエンス社.
- (5) 加藤, 西芝レビュー, 31 (1992), 1345.
- (6) 宮入, 電気・機械エネルギー変換工学, (1976), 丸善.