明度画像を用いたエッジを含む三次元物体形状推定アルゴリズム*

塩山 忠義^{*1}, 奥村 晃^{*2}, 安田 武^{*2}

Numerical Inference of 3-D Shape with Edge from Image Brightness

Tadayoshi SHIOYAMA, Akira OKUMURA and Takeshi YASUDA

A conventional method to reconstruct a 3-D shape involves the design of an objective functional $H(X)$ over surface norm distribution X , which is a weighted average of the prior constraints (regularization terms) and posterior constraints (data terms); the reconstruction is then the surface norm distribution X , which minimizes H . In the Ikeuchi-Horn algorithm with a quadratic-type regularization term, a prominent weakness is the difficulty in recovering discontinuities in surface norms at edges. In order to overcome this drawback, we therefore examine an algorithm with concave-type regularization term for reconstructing a 3-D shape with edges, since it is suggested by Geman and Reynolds in their study on image reconstruction that such a regularization term is effective in the recovery of discontinuities. We theoretically consider the convergence of the algorithm and a condition for coordinate-wise minimization of H , and derive an upper bound of the relative weight λ of the data term to the regularization term, as a function of other model parameters, such as noise variance and partial derivatives of the reflectance map.

Key Words: 3-Dimensional Shape, Image Brightness, Regularization Term, Concavity, Discontinuity-Recovery

1. 緒 論

画像の明度は Horn⁽¹⁾ が指摘したように三次元物体の表面方位に関連した情報を含んでいる。この明度と三次元物体表面方位の間の制約(データ項)と正則化項の重み付き和で表される評価関数 H を構成し、この H を最小化することにより三次元物体表面方位を求めることができる。例えば Ikeuchi-Horn アルゴリズム⁽²⁾ においては正則化項として滑らかさを表す二次関数を用いている。しかし、このような正則化項を用いるとき、表面方位が不連続に変化するエッジ部分を正確に復元できない弱点がある。

Geman と Reynolds⁽³⁾ は画像復元問題において明度における不連続部分を復元するために、concave な関数を正則化項として用いると有効であることを示している。本論文では、この考え方を応用して、エッジを含む三次元物体の形状推定を行うためのアルゴリズム(以下、エッジ復元 3-D 形状推定アルゴリズムと呼ぶことにする)を提案し、その収束性について理論的に

考察する。さらに、解が評価関数 H の coordinate-wise minimum となるための条件を理論的に考察し、 H におけるデータ項の正則化項に対する相対的重み λ の上界をノイズの分散や reflectance map の偏微分などのモデルパラメータの関数として導く。

2. エッジ復元 3-D 形状
推定アルゴリズム

物体の画像を観測するとき、正射影を仮定し、視線と z 軸を平行にすれば、物体の三次元物体は画像面の座標 (x, y) における高さ z により表現される。物体表面の法線の単位ベクトルを $\mathbf{n}$ で表し、光源方向の単位ベクトルを $\mathbf{n}_s$ で表す。これらの $\mathbf{n}$ と $\mathbf{n}_s$ はガウス球面と呼ばれる単位球面上の点で表される。Stereographic Projection⁽²⁾ (立体射影)では、ガウス球面上の点は南極を中心として北極での接平面上に投影される。この投影面である Stereographic Plane⁽²⁾ での座標 (f, g) は次式で与えられる。

$$f = 2p[\sqrt{1+p^2+q^2}-1]/(p^2+q^2) \quad \cdots \cdots \cdots (1)$$

$$g = 2q[\sqrt{1+p^2+q^2}-1]/(p^2+q^2) \quad \cdots \cdots \cdots (2)$$

ただし、

$$p \equiv \frac{\partial z}{\partial x}, q \equiv \frac{\partial z}{\partial y} \quad \cdots \cdots \cdots (3)$$

* 原稿受付 平成 6 年 6 月 23 日。

^{*1} 正員, 京都工芸繊維大学工学部 (〒606 京都市左京区松ヶ崎御所海道町)。

^{*2} 京都工芸繊維大学大学院。

(f, g) を用いて単位ベクトル $\mathbf{n}$ と $\mathbf{n}_s$ は次のように表される。

$$\begin{aligned}\mathbf{n} &= [-4f, -4g, 4-f^2-g^2]/(4+f^2+g^2) \cdots (4) \\ \mathbf{n}_s &= [-4f_s, -4g_s, 4-f_s^2-g_s^2]/(4+f_s^2+g_s^2) \\ &\cdots \cdots \cdots (5)\end{aligned}$$

ここに、 (f_s, g_s) は光源方向に対応する Stereographic Plane の座標を表す。

視線はガウス球面の北極に一致するものとし、また、ガウス球面の北半球のみを考慮するものとする。したがって、考察の対象となる (f, g) 、 (f_s, g_s) の領域は $f^2 + g^2 \leq 4$ 、 $f_s^2 + g_s^2 \leq 4$ である。物体表面の材質は Lambertian⁽²⁾ であると仮定する。このとき、明度は

$$\begin{aligned}\max [0, \mathbf{n} \bullet \mathbf{n}_s], \\ \mathbf{n} \bullet \mathbf{n}_s = \frac{16(f_s f + g_s g) + (4 - f^2 - g^2)(4 - f_s^2 - g_s^2)}{(4 + f^2 + g^2)(4 + f_s^2 + g_s^2)} \\ \cdots \cdots \cdots (6)\end{aligned}$$

で与えられる。ここに、 $\bullet$ は内積を表す。式(6)の右辺を reflectance map⁽²⁾ といい $R(f, g; f_s, g_s)$ または単に $R(f, g)$ で表す。

画像面の点 (i, j) で観測された明度を最大値が 1 となるように規格化したものを E_{ij} で表せば次式が成り立つ。

$$R(f_{ij}, g_{ij}; f_s, g_s) = E_{ij} \cdots \cdots (7)$$

ただし、 (f_{ij}, g_{ij}) は画像面の点 (i, j) における物体表面の方位を表す。式(7)を満たす (f_{ij}, g_{ij}) を求めるために (f_{ij}, g_{ij}) の推定誤差に伴う式(7)の誤差評価 $[R(f_{ij}, g_{ij}) - E_{ij}]^2$ と、 (f_{ij}, g_{ij}) の不連続性を復元するための正則化項の重み付き和で与えられる次式の評価関数 H を考える。

$$\begin{aligned}H &\equiv \sum_{i,j} \left[\phi \left(\frac{f_{i+1,j} - f_{ij}}{\Delta} \right) + \phi \left(\frac{f_{i,j+1} - f_{ij}}{\Delta} \right) \right. \\ &\quad + \phi \left(\frac{g_{i+1,j} - g_{ij}}{\Delta} \right) + \phi \left(\frac{g_{i,j+1} - g_{ij}}{\Delta} \right) \\ &\quad \left. + \lambda_{ij} \{ E_{ij} - R(f_{ij}, g_{ij}) \}^2 \right] \cdots \cdots (8)\end{aligned}$$

ここに、 λ_{ij} は重み係数である。また、 Δ はスケールパラメータで、 $\phi(\bullet)$ はエッジ復元のための関数で次の三つの条件を満たすものとする。

- (1) $\phi(x)$ は concave 関数である。
- (2) $\phi(-x) = \phi(x)$, $x \neq 0$
- (3) $\phi(x)$ は $x \geq 0$ で単調増加関数である。

このような関数 $\phi(\bullet)$ が明度の不連続部分を復元するのに有効なことが Geman と Reynolds⁽³⁾ によって示されたが、我々は三次元形状の不連続部分(すなわちエッジ)の復元のためにこの $\phi(\bullet)$ を応用する。 $\phi(\bullet)$ がエッジ復元に有効なことは以下のとおりである。説明の便宜上、 ϕ は解 $\mathbf{f} \equiv \{f_i, i=1, \dots, N\}$ の関数

であるとする。真の解 $\mathbf{f}^*$ のときは $i=i_0$ で高さ δ のステップエッジが存在するものとする。すなわち、 $f_{i_0+1}^* - f_{i_0}^* = \delta$, $f_{i+1}^* - f_i^* = 0$, $i \neq i_0$ とする。 $\mathbf{f}^*$ 以外のエッジのボケた解で、例えば $f_{i_0} - f_{i_0-1} = \delta_1$, $f_{i_0+1} - f_{i_0} = \delta_2$, $f_{i_0+2} - f_{i_0+1} = \delta_3$, $f_{i+1} - f_i = 0$, $i \neq i_0 - 1, i_0, i_0 + 1$, $\delta = \delta_1 + \delta_2 + \delta_3$ の解を $\mathbf{f}$ とする。このとき、次の関係が成り立つ。

$$\begin{aligned}\phi(\mathbf{f}) &\equiv \sum_{i=1}^{N-1} \phi(f_{i+1} - f_i) \\ &= \phi(\delta_1) + \phi(\delta_2) + \phi(\delta_3) + (N-4)\phi(0) \\ &= \{\phi(\delta_1) - \phi(0)\} + \{\phi(\delta_2) - \phi(0)\} \\ &\quad + \{\phi(\delta_3) - \phi(0)\} + (N-1)\phi(0) \\ &= \delta_1 \phi'(\bar{\delta}_1) + \delta_2 \phi'(\bar{\delta}_2) + \delta_3 \phi'(\bar{\delta}_3) + (N-1)\phi(0) \\ &\geq (\delta_1 + \delta_2 + \delta_3) \phi'(\bar{\delta}) + (N-1)\phi(0) \\ &= \phi(\delta) + (N-2)\phi(0) = \phi(\mathbf{f}^*)\end{aligned}$$

ここに、 $\phi'(\bullet)$ は 1 階微分で、 $\bar{\delta}$ は平均値の定理 $\phi(\delta) - \phi(0) = \delta \phi'(\bar{\delta})$ において定義されるものである。これより、concave な ϕ より構成される $\phi(\mathbf{f})$ を最小化することによりステップエッジの解が求められることがわかる。また、ステップの位置は H のデータ項の寄与により定まる。この評価関数 H を最小とする (f_{ij}, g_{ij}) を求めるときの k 回めの反復における推定値 $f_{ij}^{(k)}$ および $g_{ij}^{(k)}$ が真の f_{ij}^* および g_{ij}^* と次のように関係づけられるものとする。

$$f_{ij}^* = f_{ij}^{(k)} + \Delta f_{ij}^{(k)} \cdots \cdots (9)$$

$$g_{ij}^* = g_{ij}^{(k)} + \Delta g_{ij}^{(k)} \cdots \cdots (10)$$

すなわち、 $\Delta f_{ij}^{(k)}$ と $\Delta g_{ij}^{(k)}$ は k 回めにおける解の修正量である。 Δf_{ij} と Δg_{ij} は微小という仮定のもとで H を最小にする修正量 Δf_{ij} と Δg_{ij} を求めるための次の評価関数 e_{ij} を導入する。

$$e_{ij} \equiv \Delta f_{ij}^2 + \Delta g_{ij}^2 + \nu H \cdots \cdots (11)$$

ここに、 ν は重み係数である。 Δf_{ij} と Δg_{ij} が微小であることから 2 次以上の項を無視すると、 e_{ij} を最小にする Δf_{ij} と Δg_{ij} は $\frac{\partial e_{ij}}{\partial \Delta f_{ij}} = 0$, $\frac{\partial e_{ij}}{\partial \Delta g_{ij}} = 0$ から次式を満たさねばならない。

$$\begin{aligned}\Delta f_{ij}^{(k)} + \nu [-\phi_{ij}'(k) + \lambda_{ij} \{ R(f_{ij}^{(k)}, g_{ij}^{(k)}) \\ + R_f(f_{ij}^{(k)}, g_{ij}^{(k)}) \Delta f_{ij}^{(k)} + R_g(f_{ij}^{(k)}, g_{ij}^{(k)}) \Delta g_{ij}^{(k)} \\ - E_{ij} \} R_f(f_{ij}^{(k)}, g_{ij}^{(k)})] = 0 \cdots \cdots (12)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta g_{ij}^{(k)} + \nu [-\phi_{ij}'(k) + \lambda_{ij} \{ R(f_{ij}^{(k)}, g_{ij}^{(k)}) \\ + R_f(f_{ij}^{(k)}, g_{ij}^{(k)}) \Delta f_{ij}^{(k)} + R_g(f_{ij}^{(k)}, g_{ij}^{(k)}) \Delta g_{ij}^{(k)} \\ - E_{ij} \} R_g(f_{ij}^{(k)}, g_{ij}^{(k)})] = 0 \cdots \cdots (13)\end{aligned}$$

ただし、

$$\begin{aligned}\phi_{ij}'(k) &\equiv \frac{1}{2\Delta} \left\{ \phi' \left(\frac{f_{i+1,j}^{(k)} - f_{ij}^{(k)}}{\Delta} \right) - \phi' \left(\frac{f_{i,j}^{(k)} - f_{i-1,j}^{(k)}}{\Delta} \right) \right. \\ &\quad \left. + \phi' \left(\frac{f_{i,j+1}^{(k)} - f_{ij}^{(k)}}{\Delta} \right) - \phi' \left(\frac{f_{i,j}^{(k)} - f_{i,j-1}^{(k)}}{\Delta} \right) \right\} \cdots (14)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi_{ij}^2(k) \equiv & \frac{1}{2\Delta} \left\{ \phi' \left(\frac{g_{i,j+1}^{(k)} - g_{i,j}^{(k)}}{\Delta} \right) - \phi' \left(\frac{g_{i,j}^{(k)} - g_{i,j-1}^{(k)}}{\Delta} \right) \right. \\ & \left. + \phi' \left(\frac{g_{i,j+1}^{(k)} - g_{i,j}^{(k)}}{\Delta} \right) - \phi' \left(\frac{g_{i,j}^{(k)} - g_{i,j-1}^{(k)}}{\Delta} \right) \right\} \\ & \dots\dots\dots (15) \end{aligned}$$

$$R_f \equiv \frac{\partial R}{\partial f_{ij}}, R_g \equiv \frac{\partial R}{\partial g_{ij}}, \phi'(x) \equiv \frac{d}{dx} \phi(x) \dots\dots (16)$$

式(12), (13)の解は次のように与えられる.

$$\begin{aligned} \Delta f_{ij}^{(k)} = & \nu \{ [1 + \nu \lambda_{ij} R_g(f_{ij}^{(k)}, g_{ij}^{(k)})^2] \varphi_{ij}^1(k) \\ & - \nu \lambda_{ij} R_f(f_{ij}^{(k)}, g_{ij}^{(k)}) R_g(f_{ij}^{(k)}, g_{ij}^{(k)}) \varphi_{ij}^2(k) \\ & + \lambda_{ij} \{ E_{ij} - R(f_{ij}^{(k)}, g_{ij}^{(k)}) \} R_f(f_{ij}^{(k)}, g_{ij}^{(k)}) \} \\ & / [1 + \nu \lambda_{ij} \{ R_f(f_{ij}^{(k)}, g_{ij}^{(k)})^2 + R_g(f_{ij}^{(k)}, g_{ij}^{(k)})^2 \}] \\ & \dots\dots\dots (17) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta g_{ij}^{(k)} = & \nu \{ [1 + \nu \lambda_{ij} R_f(f_{ij}^{(k)}, g_{ij}^{(k)})^2] \varphi_{ij}^2(k) \\ & - \nu \lambda_{ij} R_f(f_{ij}^{(k)}, g_{ij}^{(k)}) R_g(f_{ij}^{(k)}, g_{ij}^{(k)}) \varphi_{ij}^1(k) \\ & + \lambda_{ij} \{ E_{ij} - R(f_{ij}^{(k)}, g_{ij}^{(k)}) \} R_g(f_{ij}^{(k)}, g_{ij}^{(k)}) \} \\ & / [1 + \nu \lambda_{ij} \{ R_f(f_{ij}^{(k)}, g_{ij}^{(k)})^2 + R_g(f_{ij}^{(k)}, g_{ij}^{(k)})^2 \}] \\ & \dots\dots\dots (18) \end{aligned}$$

したがって, エッジ復元 3-D 形状推定の反復アルゴリズムは次のように与えられる.

$$f_{ij}^{k+1} = f_{ij}^{(k)} + \Delta f_{ij}^{(k)} \dots\dots\dots (19)$$

$$g_{ij}^{k+1} = g_{ij}^{(k)} + \Delta g_{ij}^{(k)} \dots\dots\dots (20)$$

ここに, $\Delta f_{ij}^{(k)}$ と $\Delta g_{ij}^{(k)}$ は式(17), (18)により与えられる.

3. エッジ復元 3-D 形状 推定アルゴリズムの収束性

2章で述べた反復アルゴリズムの収束性について理論的に考察する. 式(8)の評価関数 H において観測データ E_{ij} への適合度を表す項の重み λ_{ij} について考えると, もし, E_{ij} がノイズを含むとき, 解が H の極小となるためには λ_{ij} に対する制約が必要となる. この λ_{ij} に対する制約については4章において考察がなされ, ノイズのないときにはこの制約はなくなることも示される. 本章においては, この λ_{ij} への制約を考慮しながら反復アルゴリズムの収束性を保証するために式(11)の評価関数 e_{ij} における H の重み ν への制約について考察する. ベクトル $X^{(k)}$ を次のように定義する.

$$\begin{aligned} X^{(k)} & \equiv [(f_{ij}^{(k)}, g_{ij}^{(k)}), (i, j) \in \Omega]^T \\ & \equiv [(X_{ij}^{(k)}, Y_{ij}^{(k)}), (i, j) \in \Omega]^T \dots\dots\dots (21) \end{aligned}$$

ここに, T は転置を表し, Ω は物体表面全体に対応する画像上の点 (i, j) の集合を表す. 式(8)の評価関数 $H(X)$ を最小にするための必要条件式を $FX=0$ とすると FX は次式で与えられる.

$$FX = [(FX)_{i1}, (FX)_{i2}], (i, j) \in \Omega]^T \dots\dots (22)$$

ただし,

$$(FX)_{i1} \equiv \varphi_{ij}^1 + \lambda_{ij} [E_{ij} - R(f_{ij}, g_{ij})] R_f(f_{ij}, g_{ij}) \dots\dots\dots (23)$$

$$(FX)_{i2} \equiv \varphi_{ij}^2 + \lambda_{ij} [E_{ij} - R(f_{ij}, g_{ij})] R_g(f_{ij}, g_{ij}) \dots\dots\dots (24)$$

真の解 X^* では $FX^*=0$ である. したがって, 反復アルゴリズムは次のように表される.

$$X^{(k+1)} = GX^{(k)} \dots\dots\dots (25)$$

$$GX = X + B(X)^{-1}FX \dots\dots\dots (26)$$

$$B(X)^{-1} = \text{block-diag}[D_{ij}, (i, j) \in \Omega] \dots\dots (27)$$

$$D_{ij} \equiv \alpha_{ij} \begin{pmatrix} 1 + \nu \lambda_{ij} R_g^2 & -\nu \lambda_{ij} R_f R_g \\ -\nu \lambda_{ij} R_f R_g & 1 + \nu \lambda_{ij} R_f^2 \end{pmatrix} \dots\dots\dots (28)$$

$$\alpha_{ij} \equiv \frac{\nu}{1 + \nu \lambda_{ij} [R_f^2 + R_g^2]}$$

ここに, block-diag はブロック対角行列を表し, R_f , R_g は

$$R_f \equiv R_f(f_{ij}, g_{ij})$$

$$R_g \equiv R_g(f_{ij}, g_{ij})$$

である. 式(27)で表される matrix-valued mapping $B: S_0 \rightarrow L(R^{2n}, R^{2n})$ ($R^{2n} \rightarrow R^{2n}$ の linear mapping の集合)が $FX^*=0$ の解 X^* の近傍 S_0 で定義され, X^* において連続で, $B(X^*)$ が正則とする. ただし, n は Ω の位数 $|\Omega|$ である. $\beta = \|B(X^*)^{-1}\|$ とおき, ε を $0 < \varepsilon < (2\beta)^{-1}$ を満たすようにし, δ を次の関係が成り立つように選ぶ.

$$\|B(X) - B(X^*)\| \leq \varepsilon, \forall X \in S = \bar{S}(X^*, \delta) \dots\dots\dots (29)$$

ここに, $\bar{S}(X^*, \delta)$ は開近傍 $S(X^*, \delta) = \{X \in R^{2n} \mid \|X - X^*\| < \delta\}$ の閉包(closure)である. このとき, 摂動に関する補題⁽⁴⁾により, $B(X)^{-1}$ が $X \in S$ において存在し, 次の関係が成り立つ.

$$\|B(X)^{-1}\| \leq \beta / (1 - \beta\varepsilon) < 2\beta, \forall X \in S \dots\dots\dots (30)$$

したがって, 式(26)の写像 G は S において well-defined である.

F が X^* において F-differentiable⁽⁴⁾ であるので, 次式を満たすように十分小さい δ を選べる.

$$\begin{aligned} \|FX - FX^* - F'(X^*)(X - X^*)\| \\ \leq \varepsilon \|X - X^*\|, \forall X \in S \dots\dots\dots (31) \end{aligned}$$

ここに, $F'(X^*)$ は F の X^* での F-derivative⁽⁴⁾ である. $X^* = GX^*$ であり, 式(29)~(31)を用いて次の関係を導くことができる.

$$\begin{aligned} \|GX - GX^* - [I + B(X^*)^{-1}F'(X^*)](X - X^*)\| \\ \leq 2\beta\varepsilon[1 + \beta\|F'(X^*)\|]\|X - X^*\|, \forall X \in S \\ \dots\dots\dots (32) \end{aligned}$$

ε が任意であり, $\|F'(X^*)\|$ と β が固定値であるため, 式(32)は G が X^* で F-differentiable であり, G の F-derivative は次式で与えられることを示す.

$$G'(X^*) = I + B(X^*)^{-1}F'(X^*) \quad (33)$$

ここに、 I は $2n \times 2n$ の単位行列を表す。 $F'(X^*)$ は式 (22) で与えられる関数ベクトル FX の Jacobian matrix であり、 $E_{ij} = R(f_{ij}^*, g_{ij}^*)$ のため、次のように与えられる。

$$F'(X^*) = [F'_{ijl, i'j'l'}] \quad (34)$$

$$F'_{ijl, i'j'l'} \equiv \frac{\partial (FX)_{ijl}}{\partial X_{i'j'l'}} \Big|_{X=X^*},$$

$$(i, j) \in \Omega, (i', j') \in \Omega, l, l' = 1, 2 \quad (35)$$

$$F'_{ijl, i'j'l'} = \frac{\partial \varphi_{ij}^l}{\partial X_{i'j'l'}} - \lambda_{ij} \delta_{ij, i'j'} R_l(f_{ij}^*, g_{ij}^*) R_{l'}(f_{ij}^*, g_{ij}^*) \quad (36)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_{ij}^l}{\partial X_{i'j'l'}} &= \frac{-1}{2\Delta^2} \left\{ \phi^{(2)} \left(\frac{X_{i+1, j, l} - X_{ijl}}{\Delta} \right) \right. \\ &\quad + \phi^{(2)} \left(\frac{X_{ijl} - X_{i-1, j, l}}{\Delta} \right) \\ &\quad + \phi^{(2)} \left(\frac{X_{i, j+1, l} - X_{ijl}}{\Delta} \right) + \left. \phi^{(2)} \left(\frac{X_{ijl} - X_{i, j-1, l}}{\Delta} \right) \right\} \\ (i' = i, j' = j, l' = l \text{ の場合}) \\ &= \frac{1}{2\Delta^2} \phi^{(2)} \left(\frac{X_{i+1, j, l} - X_{ijl}}{\Delta} \right) \\ (i' = i+1, j' = j, l' = l \text{ の場合}) \\ &= \frac{1}{2\Delta^2} \phi^{(2)} \left(\frac{X_{ijl} - X_{i-1, j, l}}{\Delta} \right) \\ (i' = i-1, j' = j, l' = l \text{ の場合}) \\ &= \frac{1}{2\Delta^2} \phi^{(2)} \left(\frac{X_{i, j+1, l} - X_{ijl}}{\Delta} \right) \\ (i' = i, j' = j+1, l' = l \text{ の場合}) \\ &= \frac{1}{2\Delta^2} \phi^{(2)} \left(\frac{X_{ijl} - X_{i, j-1, l}}{\Delta} \right) \\ (i' = i, j' = j-1, l' = l \text{ の場合}) \\ &= 0 \text{ (ほかの場合)} \quad (37) \end{aligned}$$

ただし、

$$\delta_{ij, i'j'} = 1 \quad (i' = i, j' = j \text{ の場合})$$

$$= 0 \quad (\text{ほかの場合}) \quad (38)$$

$$\phi^{(2)}(x) \equiv \frac{d^2 \phi(x)}{dx^2} \quad (39)$$

$$R_1(f_{ij}, g_{ij}) \equiv R_f(f_{ij}, g_{ij}),$$

$$R_2(f_{ij}, g_{ij}) \equiv R_g(f_{ij}, g_{ij}), \quad (40)$$

記述の便宜上、次の記号を定義する。

$$D_{ijl, i'j'l'} \equiv \frac{1}{\nu} (D_{ij})_{ll'} \delta_{ij, i'j'} \quad (41)$$

ただし、 $(D_{ij})_{ll'}$ は行列 D_{ij} の (ll') 要素を表す。このとき、 $G'(X^*)$ の要素 $(G'(X^*))_{ijl, i'j'l'}$ は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} (G'(X^*))_{ijl, i'j'l'} &= \delta_{ijl, i'j'l'} + \nu \sum_l D_{ijl, ij} \bar{F}_{ij} \bar{F}_{i'j'l'} \\ &= \delta_{ijl, i'j'l'} + \nu \sum_l D_{ijl, ij} \bar{F}_{ij} \left\{ \frac{\partial \varphi_{ij}^l}{\partial X_{i'j'l'}} \right. \\ &\quad \left. - \lambda_{ij} \delta_{ij, i'j'} R_l(f_{ij}^*, g_{ij}^*) R_{l'}(f_{ij}^*, g_{ij}^*) \right\} \end{aligned}$$

$$= A_{ijl, i'j'l'} + \delta A_{ijl, i'j'l'} \quad (42)$$

ここに、

$$A_{ijl, i'j'l'} \equiv \delta_{ijl, i'j'l'} - \nu \lambda_{ij} \delta_{ij, i'j'}$$

$$\times \sum_l D_{ijl, ij} \bar{F}_{ij} R_l(f_{ij}^*, g_{ij}^*) R_{l'}(f_{ij}^*, g_{ij}^*) \quad (43)$$

$$\delta A_{ijl, i'j'l'} \equiv \nu \sum_l D_{ijl, ij} \bar{F}_{ij} \frac{\partial \varphi_{ij}^l}{\partial X_{i'j'l'}} \quad (44)$$

$\nu \lambda_{ij}$ に対して ν が小とみなせるとき、 δA は A の摂動とみなせる。以下、 δA が摂動とみなせると仮定する。まず、摂動のないときの $G'(X^*)$ の固有値(すなわち A の固有値)について考察する。行列式 $|A - \mu I|$ は laplace 展開すれば次式のように表される。

$$|A - \mu I| = \prod_{ij} |A_{ij} - \mu I_2|$$

ここに

$$(A_{ij})_{ll'} \equiv \delta_{ll'} - \nu \lambda_{ij} \sum_{l=1}^2 D_{ijl, ij} \bar{F}_{ij} \bar{F}_{ij} R_l$$

$$(i, j) \in \Omega, l, l' = 1, 2, \quad (45)$$

$$I_2 \equiv \text{diag}(1, 1)$$

ゆえに、 A の固有値は次式で与えられる。

$$\frac{1}{2} [\text{tr}(A_{ij}) \pm \sqrt{(\text{tr}(A_{ij}))^2 - 4|A_{ij}|}] \quad (46)$$

光源方向と視線方向が一致する場合 ($f_s = g_s = 0$) について考察する。 R_f と R_g は次式

$$R_1 \equiv R_f(f, g; f_s, g_s)$$

$$= 2 \cdot \frac{8f_s - (4 - f_s^2 - g_s^2)f - (4 + f_s^2 + g_s^2)fR}{(4 + f_s^2 + g_s^2)(4 + f^2 + g^2)}$$

$$R_2 \equiv R_g(f, g; f_s, g_s)$$

$$= 2 \cdot \frac{8g_s - (4 - f_s^2 - g_s^2)g - (4 + f_s^2 + g_s^2)gR}{(4 + f_s^2 + g_s^2)(4 + f^2 + g^2)}$$

で与えられるため、 $f=0$ または $g=0$ に対して $R_f R_g = 0$ のため 2×2 の行列 D_{ij} および A_{ij} は対角行列となる。また、 f -軸、 g -軸に近い (f, g) の領域においては $R_f R_g \approx 0$ と考えられる。議論を簡単にするため、ほとんどの (i, j) において $R_f R_g \approx 0$ であると仮定する。このとき、 A の固有値は近似的に次式で与えられる。

$$1 - \nu \lambda_{ij} D_{ijl, ij} R_l(f_{ij}^*, g_{ij}^*)^2$$

$$= 1 - \nu \lambda_{ij} R_l^2 \frac{1 + \nu \lambda_{ij} R_l^2}{1 + \nu \lambda_{ij} (R_l^2 + R_{l'}^2)}$$

$$= \frac{1 + \nu \lambda_{ij} R_l^2 (1 - \nu \lambda_{ij} R_l^2)}{1 + \nu \lambda_{ij} (R_l^2 + R_{l'}^2)}$$

$$< 1, l' \neq l, l, l' = 1, 2, (i, j) \in \Omega \quad (47)$$

この固有値は $\lambda \equiv \nu \lambda_{ij}$ とし、 $R_l R_{l'}, l \neq l'$ を無視したとき、文献(5)の式(39)、(40)で与えられるものに一致している。式(47)から、摂動 δA がなければ $G'(X^*)$ のスペクトル半径 $\rho[G'(X^*)]$ が

$$0 < \rho[G'(X^*)] < 1 \quad (48)$$

を満たし、真の解 X^* は反復 $X^{(k+1)} = GX^{(k)}$ の収束点であることがわかる⁽⁴⁾。また、 $|f_s|$ と $|g_s|$ が零から増加

する場合, $R_l^2, l=1, 2$, が増加する⁽⁶⁾が条件式(48)を満たすことがわかる。

次に, 摂動 δA が存在するときの $G'(X^*)$ の固有値について考察する。そのために, 次の摂動定理を用いる。

(摂動定理)⁽⁷⁾ A は m 次元対称行列で, 固有値 $\mu_1, \dots, \mu_m$ をもち, これらの固有値に対応する正規直交系を成す固有ベクトルを $(u_1, \dots, u_m)$ とする。もし, A が次式

$$A' = A + \delta A \quad \dots\dots\dots (49)$$

のように摂動されるならば, 各固有値 μ_i は次式のように摂動を受ける。

$$\mu'_i = \mu_i + (u_i, \delta A u_i) + O(\delta A)^2 \quad \dots\dots\dots (50)$$

ここに, $(\bullet, \bullet)$ は内積を表す。□

絶対値が最大となる A の固有値に対応する固有ベクトルを u とすると δA の摂動を受けたときの $G'(X^*)$ のスペクトル半径 $\rho[G'(X^*)]$ は

$$\rho[G'(X^*)] = \left| \max_{i,j,l} \frac{1 + \nu \lambda_{ij} R_l^2 (1 - \nu \lambda_{ij} R_l^2)}{1 + \nu \lambda_{ij} (R_1^2 + R_2^2)} + (u, \delta A u) \right|, l' \neq l \quad \dots\dots\dots (51)$$

となり, δA は ν に比例するため, ν が大なるとき, 収束の条件

$$0 < \rho[G'(X^*)] < 1$$

が満たされないことがある。したがって, 反復アルゴリズムを実施する際には ν の大きさに注意する必要がある。

図1に数値実験における三次元形状復元結果を示す。実験においては, エッジ復元の度合のチェックをしやすいように簡単な物体(二つの平面からエッジが構成される図2のような物体)を用いた。図3に断面図を示す。ただし, $\nu=0.009, \lambda_{ij}=10, \Delta=1$ とした。参考

図3 図1の断面図

図4 f の rms error

図5 g の rms error

(a) 本手法

(b) Ikeuchi-Hornの方法

図1 図2の対象に対する三次元形状復元結果

図2 真の三次元形状(ルーフエッジ)

図 6 球に対する復元結果

図 9 図 8 の断面図

図 7 上端が切断された球(真の形状)

(a) 図 7 の対象物に対する復元結果(本手法)

(b) 図 7 の対象物に対する復元結果(Ikeuchi-Horn)

図 8

のため、Ikeuchi-Horn アルゴリズムの結果も併せて示した。アルゴリズムの実行の際、 $z=0$ の物体境界線を面方位既知領域とした。(Occluding Boundary はないが便宜上この処置をとった。)また、 ϕ として式(64)の関数を用いた。式(51)から ν の値が大なるとき収束性が悪くなることが予想されるが、反復回数と f, g の rms エラーの関係を示す図 4, 5 において、 ν が大なるほど、収束性が悪くなることが確かめられる。

エッジ復元アルゴリズムの曲面に対する性能を Ikeuchi-Horn アルゴリズムと比較するため、球を対象物とした結果を図 6 に示す。また、エッジ復元の方

向性のチェックを行う目的で、あらゆる方向のエッジを含む対象物として図 7 のような上端が切断された球を採用したときの結果を図 8 に示す。また、図 8 の断面図を図 9 に示す。

4. λ に対する条件

明度の観測値 $E_{ij}, (i, j) \in \Omega$, がノイズを含むとき、評価関数 H における重み λ_{ij} が大きいとき不都合が生じると考えられる。本章では、このようなノイズが存在するときに解が H の極小となるための重み λ_{ij} への制約について理論的に考察する。

記述の便宜上、次のような記号を定義する。

$$X_{ij} \equiv (X_{ij1}, X_{ij2})^T \equiv (f_{ij}, g_{ij})^T \dots\dots\dots (52)$$

$$u_s \equiv \{ \text{式(21)の } X \text{ と同じ次元のベクトルで, } (ijl) \text{ を辞書的に順序付けしたときの } s \text{ 番目の要素のみ } u \text{ の値をもち, 他の要素はすべて零のベクトル} \}, \dots\dots\dots (53)$$

$$s \in \tilde{\Omega}, \tilde{\Omega} \equiv \{ (i, j, l); (i, j) \in \Omega, l=1, 2 \}$$

式(8)の評価関数 H は次のように表される。

$$H(X) = \sum_{i,j} \left[\sum_{l=1}^2 \left\{ \phi \left(\frac{X_{i+1,j,l} - X_{ijl}}{\Delta} \right) + \phi \left(\frac{X_{i,j+1,l} - X_{ijl}}{\Delta} \right) \right\} + \lambda_{ij} \{ E_{ij} - R(X_{ij}) \}^2 \right] \dots\dots\dots (54)$$

[定義] 任意の $u_s, s \in \tilde{\Omega}, u \neq 0$, に対して次の関係

$$H(X^* + u_s) > H(X^*) \dots\dots\dots (55)$$

が成り立つならば、 X^* は coordinate-wise minimum という。すなわち、このときの X^* は成分ごとに H の変化を見たときに極小となる解を意味する。

□

E_{ij} がノイズ η_{ij} を含むとき、次のように表される。

$$E_{ij} = R(X_{ij}^*) + \eta_{ij} \dots\dots\dots (56)$$

η_{ij} は平均が零, 分散 σ^2 のガウシアンノイズとする。
ベクトル η を $\eta \equiv (\eta_{ij}, (i, j) \in \Omega)^T$ のように定義し,
ノイズが存在するときの H を $H(X^*, \eta)$ と表すこと
にする。 $\delta_{s,u}H(\eta)$ を次式:

$$\delta_{s,u}H(\eta) \equiv H(X^* + u_s, \eta) - H(X^*, \eta) \dots (57)$$

で定義し, 次の事象 Λ を考える。

$$\begin{aligned} \Lambda &\equiv \{ \eta | X^* \text{ が } H(X^*, \eta) \text{ の} \\ &\quad \text{coordinate-wise minimum である} \} \\ &= \{ \eta | \delta_{s,u}H(\eta) > 0, \\ &\quad \forall s \in \tilde{\Omega}, \forall u \neq 0 \} \dots (58) \end{aligned}$$

以下, この事象の確率 $Pr(\Lambda)$ が次式を満たすよう
な $\lambda_{\bar{s}}, \Delta$ に関する条件を R や σ で表す形で求める。

$$Pr(\Lambda) \approx 1 \dots (59)$$

式(54), (56), (57)から η^2 を無視すれば $\delta_{s,u}H(\eta)$
は次のように表される。

$$\delta_{s,u}H(\eta) = f_s(u) + \lambda_{\bar{s}} [(\delta_{s,u}R)^2 - 2\eta_{\bar{s}}\delta_{s,u}R] \dots (60)$$

$$\begin{aligned} f_s(u) &\equiv \sum_{i,j,l} \left\{ \phi \left(\frac{(X_{i+1,j,l} + u_{i+1,j,l}) - (X_{ijl} + u_{ijl})}{\Delta} \right) \right. \\ &\quad \left. + \phi \left(\frac{(X_{i,j+1,l} + u_{i,j+1,l}) - (X_{ijl} + u_{ijl})}{\Delta} \right) \right\} \\ &\quad - \sum_{i,j,l} \left\{ \phi \left(\frac{X_{i+1,j,l} - X_{ijl}}{\Delta} \right) + \phi \left(\frac{X_{i,j+1,l} - X_{ijl}}{\Delta} \right) \right\} \dots (61) \end{aligned}$$

$$\delta_{s,u}R \equiv R(X_{\bar{s}}^* + \bar{u}_{\bar{s}}) - R(X_{\bar{s}}^*) \dots (62)$$

$\bar{s} \equiv s$ に対応する (i, j, l) から定まる (i, j)

$$\begin{aligned} \bar{u}_{\bar{s}} &\equiv (u_{ij1}, u_{ij2})^T \\ &\equiv \{ s \text{ に対応する } (i, j, l) \text{ から定まる } l \text{ 番目の要素} \\ &\quad \text{が } u \text{ でほかは零の二次元ベクトル, } l=1, 2 \} \dots (63) \end{aligned}$$

ここに, 式(61)の u_{ijl} は u_s の要素で, s 番目の要素の
ときは u となり, 他の場合は零となる。concave 関数
として 2 章の三つの条件を満たす最も簡単な次の関数
を考える。

$$\phi(u) \equiv \sqrt{u^2} / [1 + \sqrt{u^2}] \dots (64)$$

偶関数 $\phi(u)$ の非負性, concave 性と $u \geq 0$ における
単調増加性から, 次の関係が Geman と Reynolds⁽³⁾
によって得られている。

$$\phi(u) + \phi(J-u) - \phi(J) \geq 0, \forall u, J > 0$$

ステップ幅 J のステップエッジの $f_s(u)$ について, こ
の関係をを用いて, Geman と Reynolds⁽³⁾ は次の関係を
導出している。

$$f_s(u) \geq 2\phi(u/\Delta), \forall u, s \in \tilde{\Omega} \dots (65)$$

したがって, 次の関係を得る。

$$\begin{aligned} \delta_{s,u}H(\eta) &\geq 2\phi(u/\Delta) + \lambda_{\bar{s}} [(\delta_{s,u}R)^2 - 2\eta_{\bar{s}}\delta_{s,u}R] \\ &= 2\lambda_{\bar{s}} |\delta_{s,u}R| \{ F_s(u) \mp \eta_{\bar{s}} \}, \dots (66) \end{aligned}$$

$$F_s(u) \equiv \frac{1}{2} \left[|\delta_{s,u}R| + \frac{2\phi(u/\Delta)}{\lambda_{\bar{s}} |\delta_{s,u}R|} \right] \dots (67)$$

ただし, 式(66)の複号は $\delta_{s,u}R$ の符号 $\pm$ と同順とす
る。以下において $|u|$ は微小であると仮定する。そのと
き, 次の近似が成り立つ。

$$\delta_{s,u}R \approx u \frac{\partial R}{\partial X_s} \Big|_{X=X^*} \dots (68)$$

$$F_s(u) \approx \frac{1}{2} \left[\left| \frac{\partial R}{\partial X_s} \right| \cdot |u| + \frac{2\phi(u/\Delta)}{\lambda_{\bar{s}} \left| \frac{\partial R}{\partial X_s} \right| \cdot |u|} \right] \dots (69)$$

$u > 0$ と仮定すると,

$$F_s(u) \approx \frac{1}{2} \left| \frac{\partial R}{\partial X_s} \right| u + \frac{1}{\lambda_{\bar{s}} \Delta \left| \frac{\partial R}{\partial X_s} \right| \left(1 + \frac{u}{\Delta} \right)} \dots (70)$$

$$F'_s(u) \equiv \frac{d}{du} F_s(u) \approx \frac{1}{2} \left| \frac{\partial R}{\partial X_s} \right| - \frac{1}{\lambda_{\bar{s}} \Delta^2 \left| \frac{\partial R}{\partial X_s} \right| \left(1 + \frac{u}{\Delta} \right)^2} \dots (71)$$

$F'_s(u)$ は u の単調増加関数だから, 以下のことがい
える。

(a) もし, $F'_s(0) > 0$ ならば, すなわち $\lambda_{\bar{s}} > 2/\Delta^2 \{ |\partial R/\partial X_s| \}^2$ ならば $F_s(u)$ の最小値は $u=0$ で起
こり, 次式で与えられる。

$$\inf F_s(u) = F_s(0) = \frac{1}{\lambda_{\bar{s}} \Delta \left| \frac{\partial R}{\partial X_s} \right|} \dots (72)$$

(b) もし, $F'_s(0) \leq 0$ ならば, すなわち $\lambda_{\bar{s}} \leq 2/\Delta^2 \{ |\partial R/\partial X_s| \}^2$ ならば $F_s(u)$ の最小値は $u = \sqrt{2/\lambda_{\bar{s}}} / \{ |\partial R/\partial X_s| \} - \Delta$ で起こり, 次式で与えられる。

$$\inf F_s(u) = \sqrt{2/\lambda_{\bar{s}}} - \frac{1}{2} \Delta \left| \frac{\partial R}{\partial X_s} \right| \dots (73)$$

事象 Λ_s を次のように定義する。

$$\Lambda_s \equiv \{ \eta | \delta_{s,u}H(\eta) > 0, \forall u \neq 0 \} \dots (74)$$

すなわち, Λ_s は s 番目の X^* の成分に関する mini-
mum を実現する η の集合である。

η の分散が σ^2 であり, η/σ の確率密度関数は $N(0, 1)$ であるため次の関係を得る。

$$\begin{aligned} Pr(\Lambda_s) &> Pr\{ |\eta_{\bar{s}}| < F_s(u) \text{ の下限 } L_s \} \\ &= Pr\left\{ \left| \frac{\eta_{\bar{s}}}{\sigma} \right| < \frac{L_s}{\sigma} \right\} \\ &= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{L_s/\sigma} \exp\{-t^2/2\} dt \dots (75) \end{aligned}$$

$\tilde{\Omega}$ の位数を $|\tilde{\Omega}|$ で表すとき,

$$\Lambda = \bigcap_{s \in \tilde{\Omega}} \Lambda_s \dots (76)$$

のため, 次の補題 1 を示すことができる。

(補題 1)

$Pr\{\Lambda_s\} > 1 - \frac{\epsilon}{|\bar{Q}|}$ ならば

$$Pr\{\Lambda\} > 1 - \epsilon \quad \dots\dots\dots (77)$$

□

d を次式

$$\frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^d \exp\{-t^2/2\} dt = 1 - \frac{\epsilon}{|\bar{Q}|} \quad \dots\dots\dots (78)$$

によって定義するとき, d を次式

$$d = L_s / \sigma \quad \dots\dots\dots (79)$$

のように設定すれば, 式(75)より補題1の十分条件が得られる。

式(72), (73)より L_s は次のように与えられる。

$$L_s = \frac{1}{\Delta \lambda_s \left| \frac{\partial R}{\partial X_s} \right|} \text{ if } \lambda_s > \frac{2}{\Delta^2 \left| \frac{\partial R}{\partial X_s} \right|^2} \quad \dots\dots\dots (80)$$

$$= \sqrt{2/\lambda_s} - \frac{1}{2} \Delta \left| \frac{\partial R}{\partial X_s} \right| \text{ if } \lambda_s \leq \frac{2}{\Delta^2 \left| \frac{\partial R}{\partial X_s} \right|^2} \quad \dots\dots\dots (81)$$

ゆえに, λ_s の upper bound $\bar{\lambda}_s$ は次のように得られる。ただし, $\bar{\lambda}_s$ は lower bound L_s に対応する λ_s である。関係(79)を用いることにより, もし,

$$L_s = \frac{1}{\Delta \lambda_s \left| \frac{\partial R}{\partial X_s} \right|}$$

ならば

$$\bar{\lambda}_s = \frac{1}{L_s \Delta \left| \frac{\partial R}{\partial X_s} \right|} = \frac{1}{\sigma d \Delta \left| \frac{\partial R}{\partial X_s} \right|}$$

であり, 式(80)の不等式より

$$\bar{\lambda}_s = \frac{1}{\sigma d \Delta \left| \frac{\partial R}{\partial X_s} \right|} > \frac{2}{\Delta^2 \left| \frac{\partial R}{\partial X_s} \right|^2}$$

すなわち,

$$\sigma < \frac{\Delta \left| \frac{\partial R}{\partial X_s} \right|}{2d}$$

が得られる。同様に, もし,

$$L_s = \sqrt{2/\lambda_s} - \frac{1}{2} \Delta \left| \frac{\partial R}{\partial X_s} \right|$$

ならば

$$\bar{\lambda}_s = 2 / \left(\sigma d + \frac{1}{2} \Delta \left| \frac{\partial R}{\partial X_s} \right| \right)^2$$

$$\sigma \geq \frac{\Delta \left| \frac{\partial R}{\partial X_s} \right|}{2d}$$

したがって, 重み λ_{ij} の上界(upper bound)を与える次の命題を得る。

(命題1) X^* がエッジを含む物体の面方位を表す解ベクトルであるとする。また, この X^* が式(64)の ϕ を用いて表される式(54)の評価関数 $H(X)$ の coordinate-wise minimum となるような式(58)で表されるノイズ η の実現値の集合を Λ とする。

もし,

$$\lambda_s \leq \bar{\lambda}_s = \frac{1}{\sigma d \Delta \left| \frac{\partial R}{\partial X_s} \right|} \quad \left(\sigma \leq \frac{\Delta \left| \frac{\partial R}{\partial X_s} \right|}{2d} \text{ の場合} \right)$$

$$= \frac{2}{\left(\sigma d + \frac{1}{2} \Delta \left| \frac{\partial R}{\partial X_s} \right| \right)^2} \quad \left(\sigma > \frac{\Delta \left| \frac{\partial R}{\partial X_s} \right|}{2d} \text{ の場合} \right)$$

ならば

$$Pr(\Lambda) \geq 1 - \epsilon, \forall \epsilon > 0$$

□

命題1は上界 $\bar{\lambda}_{ij}$ 以下の λ_{ij} に対して解が H の coordinate-wise minimum となることを示す。また, ノイズがないときには λ_{ij} への制約はなくなることもわかる。

5. 結 論

明度画像からエッジを含む三次元物体の形状推定を行うために, 評価関数の正則化項として concave な関数を用いるアルゴリズムを検討した。解が式(8)の評価関数 H の coordinate-wise minimum となるための十分条件について考察した結果, データへの適合度を表す項の重み λ_{ij} に対する上界が存在することがわかった。この上界をノイズの分散や reflectance map の偏微分などのモデルパラメータの関数として導いた。その結果, ノイズの分散や reflectance map のこう配が大なるほど, λ_{ij} の上界は減少することがわかった。また, データ項(観測明度)にノイズが含まれないときには λ_{ij} の上界は ∞ となり λ_{ij} への制約はなくなることがわかった。この λ_{ij} への制約を考慮しながら反復アルゴリズムの収束性について理論的に考察した結果, 式(11)における正則化項の重み ν がデータ項の重み λ_{ij} に対して小であるとき, 本アルゴリズムの収束性が保証されることがわかった。

文 献

- (1) Horn, B. K. P., *Artificial Intelligence*, 8 (1977), 201.
- (2) Ikeuchi, K. and Horn, B. K. P., *Artificial Intelligence*, 17 (1981), 141.
- (3) Geman, D. and Reynolds, G., *IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 14-3 (1992), 367.
- (4) Ortega, J. M. and Rheinboldt, W. C., *Iterative Solution of Nonlinear Equations in Several Variables*, (1970), 281, Academic Press.
- (5) 塩山・安田, 機論, 59-568, C (1993), 3792.
- (6) 塩山, 機論, 57-544, C (1991), 4016.
- (7) Kanatani, K., *IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 15-1 (1993), 37.