新しい複素定式を用いた, 境界要素法による Helmholtz 方程式の固有値解析* (第2報, 応用)

安藤 英司*¹, 野替 一義*¹, 神谷 紀生*²

Boundary Element Eigenvalue Analysis of the Helmholtz Equation by New Complex-Valued Formulation (2nd Report, Applications)

Eiji ANDOH, Kazuyoshi NOGAE and Norio KAMIYA

In the previous paper, the authors presented a new complex-valued formulation using integral equation and a scheme for the eigenvalue determination by boundary element method for the scalar-valued Helmholtz equation. The method is further applied to the multi-domain eigenvalue problems and to the construction of adaptive boundary elements. Because of its higher stability and reliability compared with the schemes developed earlier, it can deal with problems with more degrees-of-freedom and with adaptive iteration process easily. These applications exhibit effectiveness of the proposed formulation and the scheme.

Key Words: Boundary Element Method, Eigenvalue, Helmholtz Equation, Adaptive Method

1. はじめに

前報⁽¹⁾では, Helmholtz 方程式の固有値を境界要素法によって決定するための, 新しい複素定式化を示し, これによって係数行列の行列式の最小値を反復法によって求めた. この定式化は, 多重相反法(MRM)による定式化と密接な関連をもつことから, 係数行列が未知固有値の多項式によって表されるので, 反復計算における再計算の効率が低い. しかも, 著者らが前に行った実数による別の定式化⁽²⁾では, 行列成分の入れ換えを必要とし, それが固有値の決定に影響を及ぼすことがあった⁽³⁾のに対し, そのような恐れのないものとなった.

そこで, 本論文では前報の方法を, 境界要素解析において, 自由度がより増加する多重領域の問題に応用し, さらにアダプティブ要素の構成とそれを用いた計算例を示す. その結果, これらに対しても新しい定式化とその固有値決定法が有効であることを確認することができた.

2. 多重領域に対する定式化

以下では, 図1に示すような二次元の2領域 Ω^1 , Ω^2 が内部境界 Γ_{12} で結合された閉領域を考える. なお, 領域 Ω^1 , Ω^2 の Γ_{12} 以外の境界を Γ^1 , Γ^2 とする.

領域 Ω^1 , Ω^2 について, 次の Helmholtz 方程式が成り立つものとする.

$$\nabla^2 u + k_1^2 u = 0 \quad (\text{in } \Omega^1) \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$\nabla^2 u + k_2^2 u = 0 \quad (\text{in } \Omega^2) \quad \dots\dots\dots (2)$$

ただし, 係数 α を用いて

$$k_2 = \alpha k_1 \quad \dots\dots\dots (3)$$

のようにおく.

領域 Ω^t ($t=1, 2$)について, 二次元 Helmholtz 方程式の基本解

$$u_i^* = -\frac{i}{4} H_0^{(2)}(k_i r) \quad \dots\dots\dots (4)$$

の実部および虚部を用いて, 式(1), (2)を積分方程式に変換し, 各領域の境界にとった境界要素を用いて離散化すれば, 次の式を得る(詳細は前報⁽¹⁾を参照. ただし, これは形式的には通常の定式化になっているが, 以下に現れる係数行列の計算はMRMとの対応を考えることにより, 効率的に行われる).

$$H_{re}^t u_{re}^t = G_{re}^t q_{re}^t \quad \dots\dots\dots (5)$$

* 原稿受付 平成6年5月16日.

*¹ 名古屋大学大学院.

*² 正員, 名古屋大学情報化学部 (〒464-01 名古屋市千種区不老町).

$$H_{im}^t u_{re}^t = G_{im}^t q_{re}^t \quad \dots\dots\dots (6)$$

$$H_{re}^t u_{im}^t = G_{re}^t q_{im}^t \quad \dots\dots\dots (7)$$

$$H_{im}^t u_{im}^t = G_{im}^t q_{im}^t \quad \dots\dots\dots (8)$$

ここで、 u_{re}^t , u_{im}^t は領域 Ω^t の境界節点での u の実部と虚部からなるベクトルであり、境界の外向き法線 n 方向のそれらのこう配が q_{re}^t , q_{im}^t である。 H , G はそれらにかかる係数行列であり、 u , q の内挿関数に対応する基本解を掛けて境界要素上で積分して得られる。

式(5)~(8)はそれぞれ、外部境界 Γ^t と内部境界 Γ_{12} に関する項に分ければ、部分行列によって、

$$\begin{bmatrix} H^t & H_{12}^t \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u^t \\ u_{12}^t \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} G^t & G_{12}^t \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q^t \\ q_{12}^t \end{Bmatrix} \quad \dots\dots\dots (9)$$

のように書ける。上式は、上添字 t だけがついたものは外部境界 Γ^t に関する量であり、下添字 12 がついたものは内部境界 Γ_{12} に関する量である。

与えられた問題の境界条件は次のような同次条件であるとする (u および q が指定される境界を Γ_u , Γ_q とする)。

$$\left. \begin{array}{l} u=0 \quad (\text{on } \Gamma_u) \\ q=0 \quad (\text{on } \Gamma_q) \end{array} \right\} \quad \dots\dots\dots (10)$$

式(10)に従って、式(9)を書き換えれば次のようになる。

$$\begin{bmatrix} A^t & H_{12}^t \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x^t \\ u_{12}^t \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} B^t & G_{12}^t \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ q_{12}^t \end{Bmatrix} \quad \dots\dots\dots (11)$$

ここで、 x^t は Γ^t 上で零にならない u と q からなるベクトルを表す。

内部境界 Γ_{12} では次のような条件が成り立つ。

$$\left. \begin{array}{l} u_{12}^1 = u_{12}^2 \equiv u_{12} \\ q_{12}^1 = -q_{12}^2 \equiv q_{12} \end{array} \right\} \quad \dots\dots\dots (12)$$

この関係を式(11)の $t=1, 2$ について用いれば、両式は次のようにまとめられる。

$$\begin{bmatrix} A^1 & H_{12}^1 & -G_{12}^1 & 0 \\ 0 & -H_{12}^2 & -G_{12}^2 & A^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x^1 \\ u_{12} \\ q_{12} \\ x^2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} B^1 & 0 \\ 0 & B^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \dots\dots\dots (13)$$

これを改めて

図 1 2 領域問題

$$Sx=0 \quad \dots\dots\dots (14)$$

と表す。導出の段階で述べたように、式(14)は式(5)~(8)の各式に対応して合計 4 個構成されるから、具体的には次のようである。

$$S_{re} x_{re} = 0 \quad \dots\dots\dots (15)$$

$$S_{im} x_{re} = 0 \quad \dots\dots\dots (16)$$

$$S_{re} x_{im} = 0 \quad \dots\dots\dots (17)$$

$$S_{im} x_{im} = 0 \quad \dots\dots\dots (18)$$

したがって、これらをまとめれば、次の固有値問題

$$\begin{bmatrix} S_{re} & -S_{im} \\ S_{im} & S_{re} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_{re} \\ x_{im} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \dots\dots\dots (19)$$

となるので、固有方程式は次のようになる。

$$\det A \equiv \det \begin{bmatrix} S_{re} & -S_{im} \\ S_{im} & S_{re} \end{bmatrix} = 0 \quad \dots\dots\dots (20)$$

固有値は、原則的には式(20)のように A の行列式の 0 点で決定されるが、前報⁽¹⁾ ではその代わりに、 A の行列式の極小値を Newton 法によって求める方法を示した。2 領域について式(1)の k_1 を基準にとれば次のようになる。

$$\frac{d}{dk_1} \det A = 0 \quad \dots\dots\dots (21)$$

式(21)に対する Newton の反復法の漸化式の導出とその表示は前報と全く同じであるので、ここではそれを示さない [前報, 式(60)]。

3. 結合 2 領域問題の解析例

全体領域が 2 領域に分けられた例題の計算を行った。 H , G の係数行列の成分の計算は、級数項が十分収束するまでとった。図 2 は単一の長方形領域 ($L_x=1$, $L_y=0.8$) を二つに等分したものであり、まず作製したプログラムの精度をこれにより確認する (例題 3・1)。境界条件は全周にわたり $q=0$ とし、全外周を 36 要素分割して 1 領域として解析した場合、内部境界上に 8 要素をとり合計 44 要素として解析した場合を、解析解と比較してそれぞれの固有値の計算結果を表 1 に示す。解の一致は極めてよいことが確認される。

図 3 は例題 3・2 であり、2 領域のパラメータが異なり $\alpha=2$ の場合に相当する。境界条件は前の例と同じであり、結果を表 2 に示した。細長い領域であるから、一次元 (1D) 問題として解析した結果に近いものになっている。いずれも数回の Newton 法の反復計算によって得られた。

例題 3・3 は、図 2 に示す形状で $\alpha=2$ とした場合である。44 要素によって求めた結果を表 3 に示した。2 領域におけるパラメータを変えることにより、全領域同一パラメータの場合よりも多数の固有値が現れてい

る。この形状では一次元解はあまり意味がないが、長手方向単独モードに対する解析解を参考のために同表に示してある。なおこのように多数の固有値が現れることは、行列式の分布から確かめてある。

これらの計算によって、新しい定式化により2領域問題の固有値決定が有効にできることがわかった。

4. アダプティブ要素

実数によるMRM定式化およびそれに基づく固有値解析法⁽²⁾を用いて、境界要素分布の最適化(アダプティブ要素の構成)を行う方法をすでに提案した⁽³⁾。この固有値解析法では、係数行列の列ベクトルの置き換えが必要になる。列ベクトルの選択は理論上は任意であるが、実際の計算では固有値に対応する固有モードによっては、その選択が結果に影響する場合があることがわかった。複数の固有値に対する共通のアダプティブ要素を構成しようとするればこのようなことが一般には避けられないので、ここでは新たに前報⁽¹⁾の定式化と固有値決定の方法によってアダプティブ要素を考

えることにする。

以下では二次元の単一領域について考える。2章の定式化と初期要素分割によって、式(5)~(8)を得るので、これをまとめて次のように表す。

$$Hu = Gq \quad \dots\dots\dots (22)$$

いま、 m 番めの要素だけを細分化したとき、上式は次のように変更される。

$$\bar{H}_m \bar{u}_m = \bar{G}_m \bar{q}_m \quad \dots\dots\dots (23)$$

ここで、

$$\bar{H}_m = \begin{bmatrix} H_{(m-1)} & \bar{H}_{(m-1, m_{rm})} \\ \bar{H}_{(m_{rm}, m-1)} & \bar{H}_{(m_{rm}, m_{rm})} \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (24)$$

$$\bar{G}_m = \begin{bmatrix} G_{(m-1)} & \bar{G}_{(m-1, m_{rm})} \\ \bar{G}_{(m_{rm}, m-1)} & \bar{G}_{(m_{rm}, m_{rm})} \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (25)$$

$H_{(m-1)}$, $G_{(m-1)}$ は初期要素における行列 H , G から m 番めの成分を取り除いた部分行列であり、式(24), (25)のその他の、上にバーをつけた行列は要素 m を細分化することによって新たに得られたものである。また m_{rm} は要素 m での自由度を示している。

式(23)に同次境界条件を適用すれば、2章の式(14)あるいは式(15)~(18)、最終的に式(20)に対応する式を得る。これを次のように表そう。

表 1 例題 3・1 の結果

Anal. Sol.	1 Dom.(36elms.)	2 Doms.(44elms.)
3.14	3.14	3.15
3.93	3.93	3.93
5.03	5.04	5.04
6.28	6.29	6.29
7.41	7.42	7.43
7.85	7.86	7.87
8.46	8.47	8.47
9.42	9.44	9.44

図 2 例題 3・1 および 3・3

図 3 例題 3・2

表 2 例題 3・2 の結果

Present(46elms.)	1D Anal. Sol.
2.31	2.30
4.00	3.98
6.30	6.28
8.62	8.58

表 3 例題 3・3 の結果

Present(44elms.)	1D Anal. Sol.
2.20	
2.31	2.30
3.78	
3.99	3.98
4.12	
5.06	
5.47	
6.05	
6.29	6.28
6.77	
7.15	
7.55	
7.99	
8.60	8.58
9.10	

$$\det \bar{A}_m = 0 \quad \dots\dots\dots (26)$$

2章での固有値 k の決定は次の関係によった。

$$\frac{d}{dk} \det \bar{A}_m(k) = 0 \quad \dots\dots\dots (27)$$

初期要素分割によって決定された i 番めのモードの固有値を $\hat{k}_i$ とすれば、 m 番めの要素を細分割したあとでは一般に

$$\frac{d}{dk} \det \bar{A}_m(\hat{k}_i) \neq 0 \quad \dots\dots\dots (28)$$

となる。ここで上記の左辺を

$$\gamma_{im} \equiv \frac{d}{dk} \det \bar{A}_m(\hat{k}_i) \quad \dots\dots\dots (29)$$

とおき、これを固有値 $\hat{k}_i$ の誤差に対する要素 m の影響、すなわち要素 m を細分化することによる i 番めの固有値の改善量と考える。したがって、 γ_{im} は誤差指

標のひとつとみなされる。

すべての要素 ($m=1, \dots, M$) について γ_{im} を計算し、

$$\gamma_{i, \text{ave}} \equiv \sum_{j=0}^M |\gamma_{ij}| / M \quad \dots\dots\dots (30)$$

あるいは

$$\gamma_{i, \text{max}} \equiv \text{Max} |\gamma_{ij}| \quad (j=1, \dots, M) \quad \dots\dots\dots (31)$$

を用いて

$$|\gamma_{im}| > \beta \gamma_{i, \text{ave}} \text{ or } \beta \gamma_{i, \text{max}} \quad \dots\dots\dots (32)$$

を満たすとき、要素 m を細分割する。ただし、 β は適当に決められた定数である。

なお、 k をある有限の範囲にとれば、一般にその中に複数個の固有値 k_i が含まれるので、上記の条件は i によって異なる。この点の処理は前の方法⁽³⁾では最大の誤差を生じるモードに着目して上記の判定を行ったので、ここでもそれに従うものとする。以上のようにして、固有値解析のためのアダプティブ要素を構成することができる。

5. アダプティブ解析の例題

ここで示す計算例は、 $L_x=1$, $L_y=0.8$ の長方形領域の境界が剛壁 ($q=0$) の場合であり、用いた境界要素は一定要素で、係数行列 H , G の級数項の数はその成分の絶対値の最大値が 10^{-12} より小さくなるまでとった。また、要素分割の基準としては、式(32)の平均値 $\gamma_{i, \text{ave}}$ を用い、 $\beta=1$ とした。

表 4 例題 5・1 の結果

mode	Anal. Sol.	Initial 16elms.	Present Sol.	No. of Refinement	No. of Final Elms.
1,0	3.14	3.16	3.14	2	32
0,1	3.93	3.94	3.93	2	32
1,1	5.03	5.06	5.03	2	36
2,0	6.28	6.32	6.29	3	44
2,1	7.41	7.48	7.41	4	60
0,2	7.85	7.88	7.85	2	32
1,2	8.46	8.52	8.47	3	48
3,0	9.42	9.50	9.43	2	28

表 5 例題 5・2 の結果

mode	Anal. Sol.	Equal 72elms.	original 4elms.	1st 6elms.	2nd 8elms.	3rd 12elms.	4th 20elms.	5th 28elms.	6th 36elms.	7th 52elms.	8th 64elms.	MRM 11th(124elms.)
1,0	3.14	3.14			3.20	3.15	3.14	3.15	3.14	3.14	3.14	3.14
0,1	3.93	3.93	4.61	3.97	3.97	3.98	3.94	3.94	3.94	3.93	3.93	3.93
1,1	5.03	5.03			5.17	5.12	5.05	5.05	5.05	5.03	5.03	5.03
2,0	6.28	6.28	6.82	6.84	6.89	6.32	6.31	6.29	6.29	6.28	6.28	6.28
2,1	7.41	7.41				7.53	7.47	7.43	7.43	7.41	7.41	7.41
0,2	7.85	7.86					7.88	7.87	7.87	7.86	7.86	7.85
1,2	8.46	8.46		7.99	8.17	8.24	8.52	8.48	8.48	8.47	8.46	8.46
3,0	9.42	9.43	9.95	9.87	9.40	9.49	9.52	9.44	9.44	9.43	9.43	9.43
2,2	10.06	10.06					10.18	10.08	10.08	10.06	10.06	10.06
3,1	10.21	10.22				10.40	10.37	10.24	10.25	10.22	10.22	10.21
0,3	11.78	11.78	11.93	11.70	11.11		11.84	11.78	11.78	11.79	11.78	11.78
1,3	12.19	12.20			12.13	12.03		12.20	12.20	12.20	12.20	12.20
3,2	12.27	12.28					12.31	12.30	12.30	12.28	12.28	
4,0	12.57	12.57		12.67		12.73	12.74	12.59	12.58	12.57	12.57	12.57
4,1	13.17	13.18	13.18		13.26			13.22	13.20	13.18	13.18	13.17
2,3	13.35	13.36				13.65	13.39	13.37	13.36	13.36	13.36	13.36
4,2	14.82	14.83						14.88	14.84	14.83	14.83	14.82

図4 例題5・2のアダプティブ要素

例題5・1 初期要素として、各辺とも4、合計16要素をとり、これに基づいてアダプティブ要素によって単一のモード(x および y 方向のモード)ごとに固有値を決定したものが、表4に示されている。ここに示した結果によれば、初期要素による結果から2~4回のアダプティブイタレーションによって十分精度の高い結果に到達している。なお、反復数が同じであっても、モードによりアダプティブ要素の要素数が異なるのは細分化される要素およびそれらの位置が異なるからである。このように極めて粗い分割としてあらか

じめ与えた要素から、正しい結果に導かれることが示された。

例題5・2 次に同じ問題について、固有値 k の範囲を0~15までとして、各辺を1要素、合計4要素から計算をはじめたアダプティブ計算結果を表5と図4に示す。

表5からわかるように、初期要素から4回反復後くらいまでは、すべての固有値は決定されず、またそれらの結果は解析解と大きい違いが見られる(対応するモードは固有ベクトルの分布から推定したものにはすぎない)。しかし、要素のアダプティブ細分割が進むのに従い、しだいに正しい結果に近づいている。ここで得た8回反復後の結果と同じ精度を得るために、前報⁽⁹⁾の方法では、表の右端にMRMと表示したように、11回の反復で124要素となっており、今回の方法の約2倍の要素数となっている。また、その際得られなかったモード(3, 2)の結果も今回は精度良く得ている。したがって、前回の方法が行列の列ベクトルの交換を必要としていたのに対し、本方法ではそれが不必要になったために、それによる不都合がなくなり、しかも少ない要素数、反復回数で結果を得ることができた。

6. ま と め

前報⁽¹⁾で新たに提示した、Helmholtz方程式の固有値解析のための複素数による定式化と行列の極小値によって固有値を反復的に探索する方法を、2結合領域からなる問題の解析、および固有値のアダプティブ要素による解析に適用した。ここで示した単純な例題について、妥当な結果を得ることができること、および従来法の欠点を補うものであることが示された。さらに実用的な問題への拡張を考える予定である。

計算に協力された宮本哲郎君(現名古屋大学大学院学生)に感謝する。

文 献

- (1) 野替・安藤・神谷, 新しい複素定式を用いた、境界要素法による Helmholtz 方程式の固有値解析(第1報, 定式化), 機論, 60-579, C(1994), 3854-3840.
- (2) 安藤・神谷, Helmholtz 方程式の境界要素法固有値解析, 機論, 57-543, C(1991), 3457-3462.
- (3) 野替・神谷・安藤, 境界要素法による固有値解析のためのアダプティブメッシュ, 機論, 59-568, C(1993), 3785-3791.