有限要素法と伝達マトリックス法を利用した
翼・ディスク・軸連成ねじり振動解析*金子康智*¹, 桃尾孝史*², 岡田幸正*³Torsional Vibration Analysis of Blade-Disk-Shaft System
by the Finite-Element Method and the Transfer Matrix Method

Yasutomo KANEKO, Takashi MOMOO and Yukimasa OKADA

One of the most important items for turbine reliability is the torsional vibration of the blade-disk-shaft system. In this paper, an effective method for calculating the torsional vibration of the blade-disk-shaft system is proposed by applying the substructure synthesis method. In this method, at first natural frequencies and mode shapes of blade-disk systems are calculated by the finite-element method, and then the torsional vibration of the blade-disk-shaft system is analyzed by the transfer matrix method using the calculated results of blade-disk systems. Because the actual turbine rotor includes many identical blade-disk systems, the torsional vibration of the whole system can be analyzed effectively using this method. In order to verify the validity of the analytical method proposed here, the results calculated using the substructure synthesis method are compared with the results calculated using the direct finite-element method. Also, a verification test is carried out and the experimental data are compared with the numerical results.

Key Words: Vibration of Rotating Body, Transfer Matrix, Substructure Synthesis Method, Turbine Blade

1. 結 言

タービンの発電機軸系には三相不平衡に起因する加振トルクが常時作用しており、加振トルクの大きさは定格出力の数%に達することがあるといわれている。この加振トルクの周波数は系統周波数の2倍であり、タービン翼を設計する場合には高圧タービンから発電機まで結合した軸系において、翼・ディスク・軸連成ねじり振動数が系統周波数の2倍成分との共振を確実に回避するようにしなければならない。このような翼・ディスク・軸系のねじり振動解析については従来より数多くの研究がなされており^{(1)~(5)}、特に肥爪・田中らが開発した解析法⁽⁶⁾⁽⁷⁾は、翼・ディスク・軸系の特性を巧妙に利用している。肥爪・田中らの解析法では、まず第1段階で翼だけの解析をはり理論に基づく伝達マトリックス法で行い、その結果を用いて第2段階で翼・ディスク系の解析を行い、さらにその結果を用いて第3段階で翼・ディスク・軸系の解析を行うという方法を採用しており、単独翼構造や綴り翼構造に対しては

非常に解析精度が高いことが示されている⁽⁸⁾⁽⁹⁾。

ところで、最近の蒸気タービン翼やガスタービン翼では信頼性を向上させるためにシュラウド翼などのダンパ翼が採用され始めているが⁽¹⁰⁾、これらの翼構造を精度よく解析するにはシュラウド部の接合条件を正確にモデル化しなければならないため、従来の伝達マトリックス法(はり理論)を適用することが困難になってきている。さらに計算機能力が年々増加している背景もあり、最近のタービン翼の解析ではシェル要素やソリッド要素を使用した有限要素法解析が主流になってきている。このため本論文では、翼・ディスク系の解析を有限要素法で詳細に行い、その結果を用いて翼・ディスク・軸系のねじり振動解析を伝達マトリックス法で効率よく行う方法を提案する。次に、提案した解析法の妥当性を検証するため、翼・ディスク・軸系を一度に有限要素法で解析した場合との比較や、実験値との比較を行う。

2. 解 析 方 法

2・1 座標系と記号 使用する座標系と諸量の関係を図1, 2に示す。おもな記号を以下に要約する。

ρ : 密度

I_p : 極慣性モーメント

* 平成6年7月13日 1994 Dynamics and Design Conferenceにおいて講演, 原稿受付 平成6年8月1日。

*¹ 正員, 三菱重工業(株) (〒676 高砂市荒井町新浜2-1-1)。

*² 三菱重工業(株)。

*³ 正員, 三菱重工業(株) (〒851-03 長崎市深堀町5-717-1)。

- ω : 翼・ディスク・軸系の固有振動数
 ω_i : 翼・ディスク系の固有振動数(i 次モード)
 ϕ, T : ねじり角, ねじりモーメント
 GJ : ねじり剛性
 r, θ, z : 座標
 u, v, w : r, θ, z 方向の変位
 X_i : i 点の状態量ベクトル, $\{\phi T\}_i^T$
 ΔZ_i : i 点と $i+1$ 点間の距離
 E_k : 翼・ディスク部の運動エネルギー
 E_P : 翼・ディスク部のひずみエネルギー
 W : 軸部が翼・ディスク部になす仕事
 N : 1 列当たりの翼枚数
 β_i : 翼・ディスク・軸系の振動モードにおいて, 翼・ディスク系の振動モードが占める割合を表す係数
 $\{\phi_d\}$: 翼・ディスク系のディスク部のモード
 $\{\phi_b\}$: 翼・ディスク系の翼部のモード
 $\{\phi_b^*\}$: $\{\phi_b\}$ において, θ 方向の変位, および z 軸回りの回転成分を零にしたベクトル
 $\{v_b\}$: $\{\phi_b\}$ において, θ 方向の変位成分以外を零にしたベクトル
 $\{\theta_{bz}\}$: $\{\phi_b\}$ において, z 軸回りの回転成分以外を零にしたベクトル, $\{\phi_b\} = \{\phi_b^*\} + \{v_b\} + \{\theta_{bz}\}$
 $\{I_z\}$: $\{\phi_b\}$ において, z 軸回りの回転成分の要素を 1, 他を零にしたベクトル
 $\{r_b\}, \{r_d\}$: 翼部, ディスク部の節点座標(r 座標)からなるベクトル
 $[M_b], [M_d]$: 翼部, ディスク部の質量マトリックス
 $[M_b^z], [M_d^z]$: $[M_b], [M_d]$ から θ 方向の並進成分に対応する項を抽出したマトリックス
 $[M_b^{\theta z}]$: $[M_b]$ から z 軸回りの回転成分に対応する項を抽出したマトリックス

2.2 解析上の仮定 翼・ディスク系の零節直径モード(全翼が同相で振動するモード)が軸のねじり振動

図 1 翼・ディスク・軸系

に連成し, 翼・ディスク・軸連成ねじり振動を引き起こすが, 図 1 に示す翼・ディスク・軸系のねじり振動を解析する場合, 翼・ディスク系の零節直径モードの固有振動数や振動モードは遠心力の効果等を考慮してあらかじめ有限要素法計算から求められているものとする。また, 肥爪・田中⁽⁶⁾⁽⁷⁾らの仮定と同様に翼・ディスク・軸系のねじり振動においては, 翼・ディスク部の振動モードは翼・ディスク系の解析から得られる振動モードを使用して図 2 のように表せると仮定する。以上の仮定に基づき, 翼・ディスク・軸系のねじり振動の振動数方程式を導出する。

2.3 軸部の伝達マトリックス 軸部(図 1 の $i, i+1$ 間)については, ねじり振動の運動方程式を次式で表すことができる。

$$\frac{dX_i}{dz} = A_i X_i$$

$$A_i = \begin{bmatrix} 0 & -(\rho I_P)_i \omega^2 \\ \left(\frac{1}{GJ}\right)_i & 0 \end{bmatrix} \dots\dots\dots (1)$$

式(1)より, i 点と $i+1$ 点の状態量ベクトルを関係づける式として, 式(2)が得られる。

$$X_{i+1} = \exp(A_i \Delta Z_i) X_i \dots\dots\dots (2)$$

式(2)を ΔZ_i についてテーラー級数に展開し, 適当な項数で打切ると式(3)が得られる。

$$X_{i+1} = B_i X_i \dots\dots\dots (3)$$

ここで B_i は 2 行 2 列の伝達マトリックスであり,

図 2 翼・ディスク系と翼・ディスク・軸系の関係

B_i の各要素は、軸の断面特性 (I_P, GJ など) から計算することができる。

2.4 翼・ディスク部のねじりモーメントとねじり角の関係 2.1 節で述べた仮定に基づき、翼・ディスク・軸系の翼・ディスク部 (図 1 の斜線部) の運動エネルギーを式 (4) のように表す。

$$E_k = \frac{N}{2} \sum_i \left\{ \{\phi_d\}^T [M_d] \{\phi_d\}_i \dot{\beta}_i^2 + \{\phi_b^*\}^T [M_b] \{\phi_b^*\}_i \dot{\beta}_i^2 + \{r_d\}^T [M_d^v] \{r_d\}_i \dot{\psi}^2 + \{\{v_b\}_i \dot{\beta}_i - \{r_b\} \dot{\psi}\}^T [M_b^v] \{\{v_b\}_i \dot{\beta}_i - \{r_b\} \dot{\psi}\} + \{\{\theta_{bz}\}_i \dot{\beta}_i - \{I_z\} \dot{\psi}\}^T [M_b^{vz}] \{\{\theta_{bz}\}_i \dot{\beta}_i - \{I_z\} \dot{\psi}\} \right\} \quad (4)$$

式 (4) 右辺の各項の物理的意味は、以下のとおりである。

第 1 項：ディスクの運動エネルギー

第 2 項： θ 方向変位成分、および z 軸回りの回転成分を除外した翼の運動エネルギー

第 3 項：ディスクの z 軸回りの回転成分の運動エネルギー

第 4 項：翼の θ 方向変位成分の運動エネルギー

第 5 項：翼の z 軸回りの回転成分の運動エネルギー
すなわち、式 (4) では θ 方向の変位と z 軸回りの回転を介して翼・ディスク系と軸系が連成すると考えている。次に、簡単のため式 (5) を使用して、式 (4) を書き直すと、式 (6) が得られる。

$$\left. \begin{aligned} A_{1i} &= \sum_{k=1}^4 A_{ki}, \quad A_{1i} = N \{\phi_d\}^T [M_d] \{\phi_d\}_i \\ A_{2i} &= N \{\phi_b^*\}^T [M_b] \{\phi_b^*\}_i \\ A_{3i} &= N \{v_b\}^T [M_b^v] \{v_b\}_i \\ A_{4i} &= N \{\theta_{bz}\}^T [M_b^{vz}] \{\theta_{bz}\}_i, \quad B_i = \sum_{k=1}^2 B_{ki} \\ B_{1i} &= \frac{N}{2} (\{r_b\}^T [M_b^v] \{v_b\}_i + \{v_b\}^T [M_b^v] \{r_b\}_i) \\ B_{2i} &= \frac{N}{2} (\{I_z\}^T [M_b^{vz}] \{\theta_{bz}\}_i + \{\theta_{bz}\}^T [M_b^{vz}] \{I_z\}_i) \\ C &= N (\{r_d\}^T [M_d^v] \{r_d\} + \{r_b\}^T [M_b^v] \{r_b\} + \{I_z\}^T [M_b^{vz}] \{I_z\}) \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

$$E_k = \sum_i \left(\frac{1}{2} A_i \dot{\beta}_i^2 - B_i \dot{\beta}_i \dot{\psi} \right) + \frac{C}{2} \dot{\psi}^2 \quad (6)$$

同様に、翼・ディスク部のひずみエネルギー E_P 、軸部が翼・ディスク部になす仕事 W は式 (7) で表せる。

$$\left. \begin{aligned} E_P &= \frac{1}{2} \sum_i \omega_i^2 A_i \beta_i^2 \\ W &= T \psi \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

式 (6), (7) に変分原理

$$\delta \int (E_k - E_P + W) dt = 0 \quad (8)$$

を適用して運動方程式を導出すると、式 (9) が得られる。

$$\left. \begin{aligned} (\omega^2 - \omega_i^2) A_i \beta_i - \omega^2 B_i \psi &= 0 \\ \sum_i B_i \beta_i \omega^2 - C \omega^2 \psi - T &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

式 (9) から β_i を消去すると、翼・ディスク部のねじりモーメントとねじり角の関係式として、式 (10) が得られる。

$$T = \psi \omega^2 \left[-C + \sum_i \frac{\omega^2 B_i^2}{(\omega^2 - \omega_i^2) A_i} \right] \quad (10)$$

2.5 振動数方程式 図 1 の翼・ディスク・軸系において、ディスクと軸の取付部のねじりモーメントとねじり角の関係は、式 (3) の伝達マトリックスを用いると式 (11) のように表せる。

$$\left. \begin{aligned} \begin{Bmatrix} T_{j-0} \\ \psi_j \end{Bmatrix} &= \mathbf{B}_{j-1} \begin{Bmatrix} T_{j-1} \\ \psi_{j-1} \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} T_{j+1} \\ \psi_{j+1} \end{Bmatrix} = \mathbf{B}_j \begin{Bmatrix} T_{j+0} \\ \psi_j \end{Bmatrix} \\ T_{j+0} &= T_{j-0} - \Delta T_j \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

ここで、 T_{j-0} は要素 $[j-1, j]$ の右端のねじりモーメントを、 T_{j+0} は要素 $[j, j+1]$ の左端のねじりモーメントを表す。また、 ΔT_j は j 点において軸からディスクへ伝わるねじりモーメントであり、式 (10) より式 (12) のように表せる。

$$\left. \begin{aligned} \Delta T_j &= f \psi_j \\ f &= \omega^2 \left[-C + \sum_i \frac{\omega^2 B_i^2}{(\omega^2 - \omega_i^2) A_i} \right] \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

式 (11), (12) より T_{j-0} , T_{j+0} , ΔT_j , ψ_j を消去すると ($j-1$) 点と ($j+1$) 点の状態量ベクトルを関係づける式として、式 (13) が得られる。

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{X}_{j+1} &= \mathbf{B}_j \mathbf{S}_{j-1} \mathbf{X}_{j-1} \\ \mathbf{S}_{j-1} &= \begin{bmatrix} B_{j-1,11} - f B_{j-1,21} & B_{j-1,12} - f B_{j-1,22} \\ B_{j-1,21} & B_{j-1,22} \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

ここで、 $B_{j-1,kl}$ はマトリックス $\mathbf{B}_{j-1}$ の第 k 行第 l 成分である。したがって、図 1 の左端 ($j=0$) から右端 ($j=n$) へ向かって式 (3), および (13) を順次適用していくと、任意の j 点の状態量ベクトルを式 (14) から求めることができる。

$$\mathbf{X}_j = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix} \mathbf{X}_0 \quad (14)$$

なお、ロータの両端ではねじりに対する拘束がないから、次の境界条件が満足されなければならない。

$$T_0 = T_n = 0 \quad (15)$$

式 (14), (15) より翼・ディスク・軸系の振動数方程式として式 (16) が得られる。

$$C_{12,n} = 0 \quad (16)$$

すなわち、翼・ディスク・軸系の固有振動数を求めるた

めには、式(16)を満足する ω の値を求めればよい。また、固有振動数が得られると、固有振動モードは式(14)から計算することができる。

3. 解析結果

3・1 FEMフルモデルとの比較 まず、ここで提案した解析法の有効性を検証するため、図3に示す単段ロータ(L-0 R回転テストロータ)について、本手法による解析結果と翼・ディスク・軸系を一度に有限要素法で解析した結果(以下FEMフルモデルによる解析と呼ぶ)とを比較した。図4にFEMフルモデルを、

図3 L-0 R 単段ロータ (回転テストロータ)

図4 L-0 R 単段ロータのFEMフルモデル

図5, 6に解析結果を示す。

本ロータは単段ロータであり、慣性モーメントをバランスさせるために翼部と軸部が逆相で振動するため(図6)、翼・ディスク・軸系のねじり振動数は翼・ディスク系の振動数(零節直径モード)より高くなっている(図5)。また、本手法による解析結果はFEMフルモデルによる解析結果と高次モードまで1%以内の精度

図5 L-0 R 単段ロータの固有振動数

図6 L-0 R 単段ロータの翼・ディスク・軸連成ねじり振動モード

図7 L-0 R/L-1 R 回転テストロータのねじり加振試験装置

で一致しており、翼・ディスク部と軸部は合理的に結合できていることがわかる。なお、本ロータは回転振動試験用の単段ロータのため、FEMフルモデルによる解析が可能であったが、高圧ロータから発電機まで結合した実機ロータを解析する場合には、有限要素でモデル化しなければならない段数が10段以上になるため、FEMフルモデルでの解析は事実上不可能である。

3・2 ねじり加振試験結果との比較 提案した解析法の精度を検証するため、テストロータや実機ロータのねじり加振試験を実施した。図7に、L-0 R/L-1 R回転テストロータとねじり加振試験装置の概要を示す。本試験装置では、ロータの軸端にねじり加振器(フライホイール)を取付け、フライホイール内の圧力室(図7のA, B)に交互に油圧を作用させることにより、回転中のロータをねじり加振することができるようにになっている。翼の応答は、翼の根元にひずみゲージを貼付し、ひずみゲージの出力をテレメータ装置を利用して回転側から静止側へ取出して計測した。また軸の応答は、静止側に取付けたねじり振動計で計測した。なお、L-0 R, L-1 Rなどの呼び名は、蒸気タービンで一般に使用されている呼称であり、低圧タービンの最

図8 L-0 R/L-1 R回転テストロータの固有振動数

図9 原子力タービン用低圧ロータ

終段動翼をL-0 R, その1段上流段の動翼をL-1 Rなどと呼んでいる。

図8に、L-0 R/L-1 R回転テストロータについて実施したねじり加振試験結果と解析結果の比較を示す。本ロータは2段ロータであり、単段ロータ(図3)と同様に慣性モーメントをバランスさせるために翼部と軸

図10 低圧タービンロータの固有振動数

図11 低圧タービンロータの翼・ディスク・軸連成ねじり振動モード

部が逆相で振動するため、翼・ディスク・軸系のねじり振動数は翼・ディスク系の振動数(零節直径モード)より高くなっている。図8に示すように、ねじり加振試験結果と解析結果の対応は非常に良好であることが確認できた。

次に、原子力タービン用低圧ロータ(図9)について実施したねじり加振試験結果と解析結果の比較を図10に示す。また図11には、翼・ディスク・軸連成ねじり振動モードの解析例を示す。本ロータの解析においては、L-0 R から L-2 R の最終3段について翼・ディスク系の解析を有限要素法で行い、その結果を使用して翼・ディスク・軸系の解析を実施した。なお、L-3 R 以降の上流段については、翼・ディスク系の振動数が着目する振動数よりはるかに高いため翼・ディスク系を剛体とみなし、慣性モーメントだけを軸に付加した。

図10, 11 からわかるように、実機の低圧ロータはスパン中央に対して両サイドがほぼ対称な構造をしているため、一つの翼・ディスク系振動数(零節直径モード)から二つの翼・ディスク・軸系ねじり振動数(両サイドで逆相のモードと同相のモード)が派生する。このうち両サイドで逆相になるモードは翼部と軸部が同相にねじれるモードであり、翼・ディスク・軸系のねじり振動数は翼・ディスク系の振動数より低くなる。また、両サイドで同相になるモードは上記と反対であり、翼部と軸部が逆相にねじれるため、翼・ディスク・軸系のねじり振動数は翼・ディスク系の振動数より高くなる。図10に示すように、加振試験を実施した150 Hz以下の固有振動数については計測値と解析値は2%以内の精度で一致しており、ここで提案した方法により実機ロータの翼・ディスク・軸連成ねじり振動解析を精度よく行えることを検証できた。なお実際のプラントは、図9に示す低圧ロータが2~3本、さらにその前後に

高・中圧ロータや発電機が直列に結合されるため有限要素法で直接解析することは事実上不可能であるが、本解析法を適用すると実機結合状態での翼・ディスク・軸連成ねじり振動数も効率的に解析することができる。

4. 結 言

本研究では翼・ディスク・軸連成ねじり振動解析精度の向上を図るため、翼・ディスク系の解析部分に有限要素法を適用し、得られたモーダル情報を軸のねじり振動(伝達マトリックス)に連成させる解析法を提案した。次に、提案した解析法の妥当性を検証するため、翼・ディスク・軸系を一度に有限要素法で解析した結果との比較や、ねじり加振試験結果との比較を行った。その結果、本解析法の固有振動数の解析精度は良好であり、実測値と解析値がよく一致することが確認できた。また本解析法の開発により、同一の有限要素モデルを使用して翼・ディスク系から翼・ディスク・軸系までの一貫した解析ができるようになり、翼設計の効率化も図ることができた。

文 献

- (1) 松下・ほか6名, 機論, 54-494, C(1988), 587.
- (2) Matsushita, O., ほか4名, *Proc. Am. Power Conf.*, 51(1989), 81.
- (3) Hurley, J. D. and Welhoelter, S. A., *Proc. Am. Power Conf.*, 51(1989), 87.
- (4) Steigier, K. and Krämer, E., *Proc. Am. Power Conf.*, 51(1989), 94.
- (5) Schaber, U., ほか2名, *ASME Paper*, 93-GT-267(1993).
- (6) 田中, 三菱重工技報, 14-2(1977), 312.
- (7) 肥爪, 東京大学博士論文, (1989).
- (8) 肥爪・ほか4名, 三菱重工技報, 17-2(1980), 116.
- (9) Kawamoto, K. and Sugitani, T., *50th Annual Meeting of the American Power Conference*, (1989), 1.
- (10) 岡田・田中, 機講論, No. 990-40(1990-7), 214.