パラメトリックおよび外部励振を受ける Duffing 系のカオス* (第 1 報, 非摂動セパトリックス近傍におけるホモクリニック挙動)

矢 ケ 崎 一 幸^{*1}

Chaos in the Duffing System Subjected to Parametric and External Excitation (1st Report, Homoclinic Behavior near the Unperturbed Separatrices)

Kazuyuki YAGASAKI

Chaotic dynamics of the Duffing oscillator with parametric and external forcing are studied. The unperturbed system, in which the damping and external forcing terms are removed and the parametric forcing amplitude or frequency is zero, has a hyperbolic saddle with a pair of separatrices. The following two cases are analyzed: (i) the parametric forcing amplitude is small; and (ii) the parametric forcing amplitude is large but the frequency is small. The external forcing amplitude and damping coefficient are assumed to be small for both cases. Using a version of Melnikov's method, we obtain conditions under which the stable and unstable manifolds of a normally hyperbolic invariant torus intersect transversely and chaotic dynamics may occur near the unperturbed separatrices. Such chaotic motions are appropriately characterized by a generalization of the Bernoulli shift. We also describe the influence of parametric forcing on conditions for the occurrence of chaos. Numerical simulation results are given to demonstrate the theoretical results. Sustained chaotic motions wandering near the unperturbed homoclinic orbits are found.

Key Words: Nonlinear Vibration, Chaos, Forced Vibration, Parametric Excitation, Duffing System, Separatrix, Invariant Torus, Homoclinic Motion, Melnikov Method, Simulation

1. 緒 言

周期外力を受ける確定的な系において, カオスと呼ばれる一見不規則な挙動が起こることはよく知られた事実となっている⁽¹⁾⁽²⁾. これらのカオスの挙動は, 多くの場合, 双曲的(hyperbolic)な周期解の安定多様体と不安定多様体が横断的に交差して, 横断的なホモクリニック軌道が存在することによって生じ, また, Smale-Birkhoff のホモクリニック定理⁽¹⁾により, そのカオスの軌道は Bernoulli 試行を用いて特徴づけられる. さらに, Melnikov の方法⁽¹⁾と呼ばれる解析方法を用いると, セパトリックスを有する 1 自由度系に周期的な摂動が加えられた形の系において, 安定多様体と不安定多様体が横断的に交差する条件を近似的に求めることができる.

一方, 現実の機械や構造物では, 複数の振動源が存在したり, あるいは振動源は一つでもその振動波形が複数の振動数成分を有するなど, 作用する外力は周期的なものよりも準周期的なものであると考えるほうが適切である場合が多い. 例えば, 振動数の異なる, 周期的な外部励振力とパラメトリック励振力を同時に受け

る場合, 外力として外部励振力だけではなくパラメトリック励振力を含めて考えることにすると, 二つの振動数成分を有する準周期外力が作用するものとみなすことができる. そこで, 準周期外力の作用する非線形系の動的挙動について, 機械工学の分野においても精力的に研究が行われており, 結合共振や同時共振などの興味深い現象が起こることが示されている⁽³⁾. さらに, カオスの振動が生じると, 一般に, 系の応答は大きくなり, また, その振動波形は連続的なスペクトル分布を有するために他の機械や構造物の振動を誘起しやすくなるので, どのような条件のもとでカオス現象が起こるのかを把握することが必要となる.

Wiggins⁽⁴⁾⁽⁵⁾ は, 準周期的な摂動を受ける場合に対して Melnikov の方法を拡張し, normally hyperbolic な準周期的な軌道の安定多様体と不安定多様体が横断的に交差する条件を近似的に求めるための解析手法を提案した. さらに, これらの多様体が横断的に交差し, 横断的なホモクリニック軌道が存在することによってカオス現象の起こることが, 系の軌道と Bernoulli 試行の対応関係を修正⁽⁶⁾, あるいは Bernoulli 試行の概念を一般化⁽⁷⁾⁻⁽⁹⁾することにより証明されている. これらの理論を用いて, 準周期的な外部励振力の作用する, 二重井戸形ポテンシャルを有する

* 原稿受付 平成 6 年 8 月 30 日.

^{*1} 正員, 岐阜大学工学部 (〒501-11 岐阜市柳戸 1-1).

Duffing 系などに対して解析が行われている^{(4)~(6)(8)~(11)}が、準周期外力の作用する系のカオス現象については多くの問題が理論的に解明されないまま残っている。特に、パラメトリック励振力と外部励振力が同時に作用する Duffing 系に対しては、非線形性の弱い場合、平均法と Melnikov の方法を用いた理論解析が行われ、カオス発生メカニズムなどが明らかにされている^{(12)~(14)}ものの、非線形性の強い場合、佐藤ら⁽¹⁵⁾の平均化方程式に対する研究がある程度で、ほとんど研究が行われていない。

本論文では、振動数の異なる、周期的なパラメトリック励振力と外部励振力が同時に作用する、二重井戸形ポテンシャルを有する Duffing 系のカオス的挙動を取上げる。ここで、減衰項と外部励振力項がなく、パラメトリック励振力の振幅あるいは振動数を零とした非摂動系は、一对のセパトリックスが存在するような鞍点を有する。減衰係数および外部励振力の振幅は小さいものと仮定して、(i)パラメトリック励振力の振幅が小さい場合と(ii)パラメトリック励振力の振幅が大きい振動数が低い場合の二つの場合を考える。Melnikov の方法⁽⁴⁾⁽⁵⁾および著者の提案した理論⁽⁸⁾⁽⁹⁾を適用して、非摂動セパトリックス近傍においてカオス現象が生じる条件を近似的に求める。また、パラメトリック励振力の影響により、カオス的挙動の起こる条件がどのように変化するかを明らかにする。さらに、数値シミュレーションを行い、理論結果を検証する。

2. 解析モデル

パラメトリック励振力と外部励振力が同時に作用する、次の形の Duffing 系を考える。

$$\ddot{x} + \delta \dot{x} - [1 + \bar{\beta} \cos(\bar{\nu}t + \phi_0)]x + x^3 = \bar{\gamma} \cos \omega t \quad \dots\dots\dots (1)$$

ここで、 $\delta, \bar{\beta}, \phi_0, \bar{\gamma}, \omega$ は正の定数とし、 ϕ_0 はパラメトリック励振力と外部励振力の位相差を表す。特に、式(1)は、図1に示すような、軸方向と横方向に、振動数の異なる調和的な荷重が作用する、座屈ばりの1次モードの運動方程式となる⁽¹⁶⁾。

式(1)で $\bar{\beta}=0$ とした、周期外力の作用する系のカオス現象に対しては、Holmes や Moon⁽¹⁷⁾⁽¹⁸⁾をはじめ、多くの研究者により研究が行われている⁽¹⁾⁽²⁾。特に、Melnikov の方法⁽¹⁾を用いて、近似的に

$$\frac{4}{3\pi} \delta < \sqrt{2} \omega \gamma \operatorname{sech} \left(\frac{\pi \omega}{2} \right) \quad \dots\dots\dots (2)$$

のときカオス的挙動が起こることが理論的に示されている⁽¹⁾⁽¹⁷⁾。さらに、準周期的な外部励振力が作用する

場合^{(4)(8)~(11)(19)(20)}や準周期的なパラメトリック励振力が作用する場合⁽²¹⁾についても、そのカオス的挙動が理論あるいは実験により調べられている。また、佐藤ら⁽¹⁵⁾は、式(1)と類似の van der Pol-Duffing 系を取扱っているが、用いられた手法は適切であるとはいえず、その系のカオス現象についてもほとんど未知のままである。

次の二つの場合を考える。

(i) パラメトリック励振力の振幅 $\bar{\beta}$ は小さく、 $0 < \varepsilon \ll 1$ を正の微小パラメータとして、 ε のオーダーとなる場合 ($\bar{\beta} = \varepsilon \beta, \bar{\nu} = \nu$ とおく)；

(ii) パラメトリック励振力の振幅 $\bar{\beta}$ は大きい、振動数 $\bar{\nu}$ は小さく、 ε のオーダーの場合 ($\bar{\beta} = \beta, \bar{\nu} = \varepsilon \nu$ とおく)。

両者の場合とも、減衰係数 δ および外部励振力の振幅 $\bar{\gamma}$ は小さく、 ε のオーダーであると仮定し、 $\delta = \varepsilon \delta, \bar{\gamma} = \varepsilon \gamma$ とする。

状態変数 $x_1 = x, x_2 = \dot{x}, \theta = \omega t \bmod 2\pi$ および $\phi = \bar{\nu}t + \phi_0 \bmod 2\pi$ を導入し、式(1)を1階自律微分方程式系として書き直す。

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= (1 + \bar{\beta} \cos \phi)x_1 - x_1^3 + \varepsilon(-\delta x_2 + \gamma \cos \theta), \\ \dot{\theta} &= \omega, \\ \dot{\phi} &= \bar{\nu}. \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (3)$$

θ と ϕ は長さ 2π の円周 $S^1 = R/2\pi$ 上の点と同一視することができる。式(3)に対して Poincaré 写像 P_ε を次のように定義する。

$$\begin{aligned} P_\varepsilon : (x_1(0), x_2(0), \phi_0) \\ \rightarrow \left(x_1 \left(\frac{2\pi}{\omega} \right), x_2 \left(\frac{2\pi}{\omega} \right), \frac{2\pi\bar{\nu}}{\omega} + \phi_0 \right). \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (4)$$

ここで、 $(x_1(t), x_2(t), \omega t, \bar{\nu}t, \bar{\nu}t + \phi_0)$ は式(3)の解を表す。周期外力の作用する場合と異なり、式(1)に対する Poincaré 写像は三次元写像となる。

図1 軸方向と横方向に加振される座屈ばり

3. パラメトリック励振力の 振幅が小さい場合

2章で述べた(i)の場合に対して解析を行う。ε=0
のとき、式(3)は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= x_1 - x_1^3, \\ \dot{\theta} &= \omega, \\ \dot{\phi} &= \nu. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (5)$$

図2に示すように、式(5)の (x_1, x_2) 成分は双曲的な鞍点 $(0, 0)$ を有し、鞍点 $(0, 0)$ とその鞍点に対する一対のホモクリニック軌道

$$\begin{aligned} &(\bar{x}_1^\pm(t), \bar{x}_2^\pm(t)) \\ &= (\pm\sqrt{2} \operatorname{sech} t, \mp\sqrt{2} \operatorname{sech} t \tanh t), \end{aligned} \dots\dots\dots (6)$$

を有する。これより、式(5)に対するPoincaré写像 P_0 は、図3に示すように、その安定多様体 $W^s(T_0)$ と不安定多様体 $W^u(T_0)$ が一致するような、normally hyperbolicな一次元不変トーラス $T_0 = \{(0, 0, \phi) | \phi \in S^1\}$ を有することになる。ここで、不変トーラスの法線方向に対するPoincaré写像の拡大率および縮小率が接線方向に対するものよりも大きくなるとき、この不変

図2 式(5)の (x_1, x_2) 成分の位相面軌跡

図3 非摂動Poincaré写像 P_0 の位相空間

トーラスは normally hyperbolic であるという⁽⁴⁾⁽²³⁾。

不変多様体の理論⁽⁴⁾⁽²³⁾により、十分に小さな $\varepsilon > 0$ に対しては、Poincaré写像 P_ε は T_0 の ε 近傍に normally hyperbolicな一次元不変トーラス T_ε を有する。ここで、不変トーラス T_ε 上の P_ε の軌道は、式(1)のある準周期的な軌道に対応する。さらに、Melnikovの方法⁽⁴⁾を用いることによって、 T_ε の安定多様体 $W^s(T_\varepsilon)$ と不安定多様体 $W^u(T_\varepsilon)$ の挙動を調べることができる⁽⁸⁾⁽⁹⁾。

ホモクリニック軌道 $(\bar{x}_1^\pm(t), \bar{x}_2^\pm(t))$ に対するMelnikov関数 $M_\pm(\theta, \phi)$ は、次のようになる。

$$\begin{aligned} M_\pm(\theta, \phi) &= \int_{-\infty}^{\infty} \bar{x}_2^\pm(t) [-\delta \bar{x}_2^\pm(t) + \gamma \cos(\omega t + \theta) \\ &\quad + \beta \bar{x}_1^\pm(t) \cos(\nu t + \phi)] dt \\ &= -\frac{4}{3} \delta \pm \sqrt{2} \pi \omega \gamma \operatorname{sech}\left(\frac{\pi \omega}{2}\right) \sin \theta \\ &\quad - \pi \nu^2 \beta \operatorname{cosech}\left(\frac{\pi \nu}{2}\right) \sin \phi. \end{aligned} \dots\dots\dots (7)$$

もし

$$\begin{aligned} (M1) \quad &M_\pm(\theta_0, \phi_0) = 0 \\ (M2) \quad &\left(\frac{\partial M_\pm}{\partial \theta}, \frac{\partial M_\pm}{\partial \phi}\right)(\theta_0, \phi_0) \neq (0, 0) \end{aligned}$$

ならば、 $W^s(T_\varepsilon)$ と $W^u(T_\varepsilon)$ は点 $(\bar{x}_1^\pm(t - \theta_0/\omega), \bar{x}_2^\pm(t - \theta_0/\omega), \phi_0 - \nu \theta_0/\omega)$ の近傍で横断的に交差する⁽⁴⁾⁽⁸⁾⁽⁹⁾。さらに、もし条件(M1)と

$$(M3) \quad \omega \frac{\partial M_\pm}{\partial \theta}(\theta_0, \phi_0) + \nu \frac{\partial M_\pm}{\partial \phi}(\theta_0, \phi_0) \neq 0$$

がある点 (θ_0, ϕ_0) において成立する、すなわち、

$$\frac{4}{3} \delta < \sqrt{2} \pi \omega \gamma \operatorname{sech}\left(\frac{\pi \omega}{2}\right) + \pi \nu^2 \beta \operatorname{cosech}\left(\frac{\pi \nu}{2}\right) \dots\dots\dots (8)$$

ならば、 $W^s(T_\varepsilon)$ と $W^u(T_\varepsilon)$ は、図4に示すように、 $x_1 - x_2$ 平面に平行ではない一次元多様体(曲線)において横断的に交差し、一般化されたBerunoulli試行

図4 安定多様体と不安定多様体の横断的な交差

によって特徴づけられるカオスの挙動が起こる⁽⁸⁾⁽⁹⁾。
また、式(8)は(M1)と(M2)の両者が成立する条件をも表すので、この場合、不変トーラスの安定多様体と不安定多様体が単に横断的に交差するだけでカオス現象が起こることがわかる。

減衰定数 $\delta=1$ 、パラメトリック励振力の振動数 $\nu=3$ とした場合に、パラメトリック励振力の振幅 β のいくつかの値に対して、式(8)で与えられる、カオス現象が起こる外部励振力の振幅 γ と振動数 ω の値の範囲を図5に示す。曲線よりも上の領域でカオス現象が起こる。パラメトリック励振力の振幅が大きくなるとともに、カオスの挙動の起こる、外部励振力の振幅と振動数の範囲が大きくなることがわかる。また、

$$\frac{4}{3}\delta < \pi\nu^2\beta \operatorname{cosech}\left(\frac{\pi\nu}{2}\right) \dots\dots\dots (9)$$

のとき、常に式(8)の条件が成立するので、外部励振力のどんな振幅と振動数に対してもカオス現象が生じることになる。式(9)で与えられる条件を図6に示す。曲線よりも上の領域で、外部励振力の任意の振幅と振動数に対してカオス現象が起こる。図6のグラフは $\nu \approx 1$ で最小値を取り、カオス現象は、パラメトリック励振力の振動数が $\nu=1$ 付近でもっとも起こりやすく、

図5 カオス現象の起こる条件($\delta=1, \nu=3$)

図6 任意の γ と ω に対してカオス現象の起こる条件($\delta=1$)

その付近から離れるに従って起こりにくくなることがわかる。

4. パラメトリック励振力の振幅が大きい場合

2章で述べた(ii)の場合に対して解析を行う。 $\beta < 1$ とする。 $\varepsilon=0$ のとき、式(3)は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= (1 + \beta \cos \phi)x_1 - x_1^3, \\ \dot{\theta} &= \omega, \\ \dot{\phi} &= 0. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (10)$$

$\beta < 1$ であるから、すべての $\phi \in S^1$ に対して、点 $(0, 0)$ は式(10)の (x_1, x_2) 成分の鞍点となる。さらに、式(0, 0)は二つのホモクリニック軌道

$$\begin{aligned} &(\bar{x}_1^\pm(t; \phi), \bar{x}_2^\pm(t; \phi)) \\ &= (\pm \sqrt{2(1 + \beta \cos \phi)} \operatorname{sech} \sqrt{1 + \beta \cos \phi} t, \\ &\quad \mp \sqrt{2(1 + \beta \cos \phi)} \operatorname{sech} \sqrt{1 + \beta \cos \phi} t \\ &\quad \times \tanh \sqrt{1 + \beta \cos \phi} t) \dots\dots\dots (11) \end{aligned}$$

を有する(図2参照)。

3章の場合と同様に、式(10)に対する Poincaré 写像 P_0 は、normally hyperbolic な一次元不変トーラス $\hat{T}_0 = \{(0, 0, \phi) | \phi \in S^1\}$ を有し、その安定多様体 $W^s(\hat{T}_0)$ と不安定多様体 $W^u(\hat{T}_0)$ は一致する(図3を参照せよ)。再び、不変多様体の理論⁽⁴⁾⁽²³⁾により、十分に小さな $\varepsilon > 0$ に対して、Poincaré 写像 P_ε は $\hat{T}_0$ の ε 近傍に normally hyperbolic な一次元不変トーラス $\hat{T}_\varepsilon$ を有し、さらに、Melnikov の方法⁽⁴⁾⁽⁵⁾を用いることによって、3章のように、 $\hat{T}_\varepsilon$ の安定多様体 $W^s(\hat{T}_\varepsilon)$ と不安定多様体 $W^u(\hat{T}_\varepsilon)$ の挙動を調べることができる。

ホモクリニック軌道 $(\bar{x}_1^\pm(t; \phi), \bar{x}_2^\pm(t; \phi))$ に対する Melnikov 関数 $\hat{M}_\pm(\theta, \phi)$ は、次のようになる。

$$\begin{aligned} &\hat{M}_\pm(\theta, \phi) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \{ \bar{x}_2^\pm(t; \phi) [-\delta \bar{x}_2^\pm(t; \phi) + \gamma \cos(\omega t + \theta)] \\ &\quad - \nu \beta t \bar{x}_2^\pm(t; \phi) \bar{x}_1^\pm(t; \phi) \sin \phi \} dt \\ &= -\frac{4}{3} \delta (1 + \beta \cos \phi)^{3/2} \\ &\quad \pm \sqrt{2} \pi \omega \gamma \operatorname{sech} \left(\frac{\pi \omega}{2\sqrt{1 + \beta \cos \phi}} \right) \sin \theta \\ &\quad + 2\nu \beta \sqrt{1 + \beta \cos \phi} \sin \phi. \dots\dots\dots (12) \end{aligned}$$

もし

$$\begin{aligned} (\hat{M}1) \quad &\hat{M}_\pm(\theta_0, \phi_0) = 0 \\ (\hat{M}2) \quad &\left(\frac{\partial \hat{M}_\pm}{\partial \theta}, \frac{\partial \hat{M}_\pm}{\partial \phi} \right) (\theta_0, \phi_0) \neq (0, 0) \end{aligned}$$

ならば、 $W^s(\hat{T}_\varepsilon)$ と $W^u(\hat{T}_\varepsilon)$ は点 $(\bar{x}_1^\pm(t - \theta_0)/\omega; \phi_0)$ 、 $\bar{x}_2^\pm(t - \theta_0)/\omega; \phi_0$ の近傍で横断的に交差する⁽⁴⁾⁽⁵⁾。この

ことから, $W^s(\hat{T}_\epsilon)$ と $W^u(\hat{T}_\epsilon)$ は, 一次元多様体

$$\begin{aligned} \tau_\epsilon^\pm &= \{(x_1, x_2, \phi) | x_i = \hat{x}_i^\pm(t - \theta/\omega; \phi), \\ i &= 1, 2, \hat{M}_\pm(\theta, \phi) = 0, \\ (\partial \hat{M}_\pm / \partial \theta, \partial \hat{M}_\pm / \partial \phi)(\theta, \phi) &\neq (0, 0)\} \dots\dots\dots (13) \end{aligned}$$

の近傍で横断的に交差することがわかる。また,

$$\hat{M}_\pm(\theta_0, \phi_0) = \frac{\partial \hat{M}_\pm}{\partial \theta}(\theta_0, \phi_0) = 0 \dots\dots\dots (14)$$

のとき, 一次元多様体 $\tau_\epsilon^\pm$ は点 $(\hat{x}_1^\pm(t - \theta_0/\omega; \phi_0), \hat{x}_2^\pm(t - \theta_0/\omega; \phi_0), \phi_0)$ の近傍において x_1 - x_2 平面と平行となる。したがって, 条件 $(\hat{M}1)$ と

$$(\hat{M}3) \quad \frac{\partial \hat{M}_\pm}{\partial \theta}(\theta_0, \phi_0) \neq 0$$

がある点 (θ_0, ϕ_0) において成立する, すなわち,

$$\begin{aligned} 3\sqrt{2}\gamma > \\ \min_{\phi \in [0, 2\pi)} \frac{2\sqrt{1+\beta \cos \phi}}{\pi\omega} \cosh\left(\frac{\pi\omega}{2\sqrt{1+\beta \cos \phi}}\right) \\ \times [2\delta(1+\beta \cos \phi) - 3\nu\beta \sin \phi] \dots\dots\dots (15) \end{aligned}$$

のとき, $W^s(\hat{T}_\epsilon)$ と $W^u(\hat{T}_\epsilon)$ は, x_1 - x_2 平面に平行ではない一次元多様体において横断的に交差し(図4を参照せよ), 一般化された Berunoulli 試行によって特徴づけられるカオスの挙動が起こることになる⁽⁸⁾⁽⁹⁾。

減衰定数 $\delta=1$, パラメトリック励振力の振動数 ν

図7 カオス現象の起こる条件($\delta=1, \nu=1$)

図8 任意の γ と ω に対してカオス現象の起こる条件($\delta=1$)

$=1$ とした場合に, パラメトリック励振力の振幅 β のいくつかの値に対して, 式(15)で与えられる, カオス現象が起こる外部励振力の振幅 γ と振動数 ω の値の範囲を図7に示す。ここで, 式(15)の右辺の最小値は数値的に求めた。3章の場合と同様, パラメトリック励振力の振幅が大きくなるとともに, カオスの挙動が起こる, 外部励振力の振幅と振動数の範囲が大きくなることがわかる。また,

$$\beta > \frac{2\delta}{\sqrt{4\delta^2 + 9\nu^2}} \dots\dots\dots (16)$$

のとき, 常に式(15)の条件が成立するので, 外部励振力のどんな振幅と振動数に対してもカオス現象が生じることになる。式(16)で与えられる条件を図8に示す。図8のグラフは ν の増加とともに単調に減少し, パラメトリック励振力の振動数が大きくなるにつれてカオス現象が起こりやすくなることがわかる。この結果は, パラメトリック励振力の振動数が大きい場合はその振幅が小さいときでもカオス現象が起こるといふ, 3章の結果と一致する。

なお, 3章と本章で存在することを証明したカオスの挙動は, Smale-Birkhoff のホモクリニック定理によってその存在が保証されるものと同様, 不安定なものであり, 式(8)あるいは(15)が成立するとき常にストレンジアトラクタが存在するわけではない。したがって, これらのカオスの挙動は数値シミュレーションなどでつねに確認できるとは限らない。

5. 数値シミュレーション

減衰定数 $\delta=0.1$, 外部励振力の振動数 $\omega=1.414\ 213\ 6 \approx \sqrt{2}$ の場合に対して, Runge-Kutta-Gill 法により式(1)を倍精度で数値積分を行った。ここで, きざみ幅は外部励振力の1周期の128分の1とした。

図9 Poincaré 写像のカオスの軌道 ($\delta=0, \gamma=0.4, \omega=1.414\ 213\ 6, \delta=0.1$)

 (a) $\bar{\beta}=0.2, \bar{\nu}=3, \bar{\gamma}=0.3, \omega=1.414\ 213\ 6, \bar{\delta}=0.1$

 (a) $\bar{\beta}=0.2, \bar{\nu}=3, \bar{\gamma}=0.3, \omega=1.414\ 213\ 6, \bar{\delta}=0.1$

 (b) $\bar{\beta}=0.5, \bar{\nu}=0.1, \bar{\gamma}=0.3, \omega=1.414\ 213\ 6, \bar{\delta}=0.1$

図 10 Poincaré 写像のカオスの軌道

 (b) $\bar{\beta}=0.5, \bar{\nu}=0.1, \bar{\gamma}=0.3, \omega=1.414\ 213\ 6, \bar{\delta}=0.1$

図 11 double Poincaré 断面

パラメトリック励振力を受けない $\bar{\beta}=0$ の場合、式 (2) によって理論的に予測される、カオスの挙動が起こるために必要な外部励振力の振幅 $\bar{\gamma}$ は約 0.099 であるが、実際に数値シミュレーションで観測できたのは $\bar{\gamma}$ の値が約 0.352 以上のときであった。これは、 γ の値を大きくしていくとき、理論的には存在することが示された、不安定なカオスの軌道が $\bar{\gamma} \approx 0.352$ ではじめて安定化するためと考えられる。図 9 に、 $\bar{\gamma}=0.4$ に対する定常状態における Poincaré 写像のカオスの軌道を示す。図 9 のストレンジアトラクタには明らかにフラクタルな構造が現れている。

次に、外部励振力の振幅を、パラメトリック励振を受けない場合には安定なカオスの軌道が存在しない $\bar{\gamma}=0.3$ に固定し、いくつかのパラメトリック励振力の振動数 $\bar{\nu}$ に対してパラメトリック励振力の振幅 $\bar{\beta}$ を変化させ、定常状態においてカオスの挙動が起こることを確認した。この結果は、パラメトリック励振が作用する場合のほうが、(必ずしも定常状態で観測されるとは限らないものではあるが、)カオス現象が起こりやすいという、理論結果を反映したものであると考えられる。

図 10 に、 $\bar{\nu}=3, \bar{\beta}=0.2$ および $\bar{\nu}=0.1, \bar{\beta}=0.5$ の場合に、定常状態における Poincaré 写像のカオスの軌道を x_1 - x_2 平面に射影した結果を示す。 $\epsilon=0.1$ とした場合、これらのパラメータの値は図 5 および 7 のカオス現象が起こる領域のものに対応する。また、図 11 は、図 10 のストレンジアトラクタに対して、Poincaré 写像の軌道で ϕ 成分の値がある微小区間(図 11 では $[0, 0.02 \times 2\pi]$ としている)に含まれるときに限って x_1 と x_2 の値をサンプリングする、double Poincaré 断面の手法⁽¹⁾⁽²⁰⁾を適用した結果である。図 11 では、図 9 のように、ストレンジアトラクタのフラクタルな構造が明らかとなっている。さらに、他のパラメータの値のストレンジアトラクタも同様の形であった。

なお、 $\bar{\nu}=3$ と $\bar{\nu}=0.1$ の場合、 $\bar{\beta}$ の値を大きくしていくとき、定常状態で図 10 および 11 に示したようなカオスの軌道がはじめて現れる $\bar{\beta}$ の値は、それぞれ、 $\bar{\beta} \approx 0.093$ と $\bar{\beta} \approx 0.383$ であった。また、 $\bar{\nu}=1$ の場合には、 $\bar{\beta}$ の値が約 0.018 のとき定常状態においてカオスの挙動が観測され、この結果は、 $\bar{\nu}=1$ 付近でカオス現象がもっとも起こりやすいという理論結果を裏付けている。

6. 結 論

パラメトリック励振と外部励振が同時に作用する、二重井戸形ポテンシャルを有する Duffing 系に対して、非摂動セパトリックス近傍におけるカオス現象について理論解析を行い、その結果を数値シミュレーションにより検証した。

理論解析では、減衰係数および外部励振力の振幅は小さく、さらに(i)パラメトリック励振力の振幅が小さい場合と(ii)パラメトリック励振力の振幅は大きい振動数が低い場合を考え、Melnikovの方法⁽⁴⁾⁽⁵⁾と文献(8)、(9)の理論を適用あるいは拡張して適用し、normally hyperbolic な不変トーラスの安定多様体と不安定多様体が横断的に交差し、カオス現象が起こる条件を求めた。また、カオスの挙動が起こる条件に及ぼすパラメトリック励振力の影響を調べ、特に、パラメトリック励振力の振幅が増加するにつれて、カオスの挙動が起こる外部励振力の振幅と振動数の値の範囲が広がることを示した。

数値シミュレーションでは、定常状態でカオスの挙動が起こり、ストレンジアトラクタが存在することを確認した。また、定常状態において、外部励振力のみが作用するときにはカオス現象が起こらない場合でも同時にパラメトリック励振力が作用することによってカオス現象が起こることを示した。本論文の結果は、1次モードが支配的な場合の図1の座屈ばりや、さらに一般的な、パラメトリック励振と外部励振の作用する非線形系に対しても定性的に成立するものと考えられる。

最近、著者は、周期軌道の1パラメータ族を有する一自由度系に準周期的な摂動が加えられた形の系に対して、外力と共振する非摂動系の周期軌道近傍においてカオス現象が起こることを、平均法とMelnikovの方法を用いて理論的に証明する方法を提案した⁽¹⁹⁾⁽²³⁾。この手法は、準周期的な外部励振力の作用する、単一井戸形あるいは二重井戸形ポテンシャルを有

する Duffing 系に適用され、その結果は数値シミュレーションにより検証されている。第2報では、式(1)の非摂動周期軌道近傍で起こるカオス現象を取上げ、この手法を適用した理論解析および数値シミュレーションについて報告する。

文 献

- (1) Guckenheimer, J. and Holmes, P., *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*, (1983), Springer-Verlag.
- (2) Moon, F. C., *Chaotic and Fractal Dynamics*, (1992), John Wiley & Sons.
- (3) 例えば, Nayfeh, A. H. and Mook, D. T., *Nonlinear Oscillations*, (1979), John Wiley & Sons.
- (4) Wiggins, S., *Global Bifurcations and Chaos*, (1988), Springer-Verlag.
- (5) Wiggins, S., *SIAM J. Appl. Math.*, **48**(1988), 262.
- (6) Beigie, D., Leonard, A. and Wiggins, S., (Carnevale, G. F. and Pierrehumbert, R. T. 編), *Nonlinear Phenomena in Atmospheric and Oceanic Sciences*, (1992), 47, Springer-Verlag.
- (7) Stoffer, D., *J. Appl. Math. Phys.*, **39** (1988), 518, 783.
- (8) Yagasaki, K., *SIAM J. Math. Anal.*, **23**(1992), 1230.
- (9) Yagasaki, K. (Awrejcewicz, J. 編), *Nonlinear Dynamics: New Theoretical and Applied Results*, (1995), Akademie-Verlag, to be published.
- (10) Wiggins, S., *Phys. Lett. A*, **124**(1987), 138.
- (11) Ide, K. and Wiggins, S., *Physica D*, **34**(1989), 169.
- (12) Yagasaki, K., Sakata, M. and Kimura, K., *Trans. ASME J. Appl. Mech.*, **57**(1990), 209.
- (13) Yagasaki, K., *Physica D*, **44**(1990), 445.
- (14) Yagasaki, K., *Trans. ASME J. Appl. Mech.*, **58**(1991), 244.
- (15) 佐藤・ほか4名, 機論, 58-551, C(1992), 2024.
- (16) 例えば, Marsden, J. E. and Hughes, T. J. R., *Mathematical Foundations of Elasticity*, (1983), 504, Prentice-Hall.
- (17) Holmes, P. J., *Phil. Trans. R. Soc. Lond.*, **292**(1979), 419.
- (18) Moon, F. C. and Holmes, P. J., *J. Sound Vib.*, **65**(1979), 275.
- (19) Yagasaki, K., *Physica D*, **69**(1993), 232.
- (20) Moon, F. C. and Holmes, W. T., *Phys. Lett. A*, **111**(1985), 157.
- (21) Heagy, J. and Ditto, W. L., *J. Nonlinear Sci.*, **1**(1991), 423.
- (22) Hirsch, M. W., Pugh, C. C. and Shub, M., *Invariant Manifolds*, (1977), Springer-Verlag.
- (23) Yagasaki, K., *Proc. R. Soc. Lond. A*, **445**(1994), 597.