凸包モデルによる固有振動モード・ホモロジー設計
の機能信頼性解析*中 桐 滋^{*1}, 吉 川 暢 宏^{*1}Reliability Analysis for Performance of Eigenmode Homology Design
by Means of Convex Model

Shigeru NAKAGIRI and Nobuhiro YOSHIKAWA

A method is proposed to estimate reliability of homology design in the form of sensitivity with respect to the uncertainties involved in the structural system under consideration. The uncertainties are supposed to be confined to convex domain of the uncertainty variables taken. The worst case of an error index devised to evaluate the degree of disturbed homologous deformation is estimated with respect to the convex model of the uncertainties, and is related to the expanse of the convex hull for the purpose of the sensitivity analysis of the design reliability. The validity of the proposed method is verified and exemplified by a numerical example concerned with bending vibration of a planar lattice frame analyzed by the finite element method, in which uncertain boundary conditions are taken into account.

Key Words: Optimum Design, Structural Reliability, Finite Element Method, Homology Design, Convex Model, Uncertainty

1. 緒 言

大口径電波望遠鏡では高解像を得るためにはパラボラアンテナの鏡面精度の確保が重要であるとして、パラボラ構造の設計に関してホモロガス変形という概念が提案されたのは1960年代後期であった。ホモロガス変形とは、構造の一部または全部で変形の前、中、後で一定の幾何学的性状が保たれる変形と定義されており⁽¹⁾⁽²⁾、構造強度に関する要求が満たされた上で、構造の機能発揮のため設定される制約となり得る。

ホモロガス変形をする骨組構造を有限要素解析に基づいて定める定式が、剛性方程式に関する解の存在条件から出発して一般逆行列の感度解析に基づいて構成されている⁽²⁾。また、固有振動モードでホモロガス変形を実現する構造の決定法も、一般逆行列を利用するが、その感度解析を要しない形で定式化されている⁽³⁾。その定式によれば、ホモロガス変形制約を満たす設計、すなわちホモロジー設計の結果として試設計と重量の余り変わらない設計が得られている⁽³⁾。重量増加を伴わずに目的を達成するという意味で、ホモロジー設計は最適設計の一種と見ることもできる。構造の機能と目的に合うホモロガス変形の設定と実現が可能となれば、例えば光軸を直線上や平面内に保つ必要のある精

密機器等の構造設計に新機軸をもたらすと期待される。

静的なホモロガス変形は負荷の大きさには依存しないが負荷のモードに依存する⁽²⁾。負荷モードが設定モードから変わればホモロガス変形は実現されないで、ホモロジー設計をしない場合より有害な変形をする可能性もある。ホモロジー設計が攪乱されると構造の機能が阻害される場合には、機能の信頼性を確保するために構造系に含まれる不確かさの影響を評価しておく必要がある。

本研究では、構造系に含まれる不確かさにより攪乱されるホモロガス変形の最悪状態を評価する手法を不確かさの凸包モデルに基づいて構成し、その妥当性を幾何学的境界条件の不確かさが平面格子フレーム構造の曲げ固有振動に関するホモロガス振動モードに及ぼす影響について有限要素法により検討する。

2. 振動モードのホモロジー設計の定式

本章では、固有振動モードに関する確定的なホモロジー設計の有限要素法による定式を略述する。この定式は対称行列のみの感度解析に基づくので、修正固有値問題の非対称行列に関する感度解析を必要とした既報⁽³⁾とは異なる。ある試設計を想定し、その無減衰線形弾性振動の確定的な固有値問題を式(1)で表す。剛性行列 $[K]$ と質量行列 $[M]$ は N 次の正方形対称行列とし、 λ と $\{\phi\}$ は注目する固有次の固有値と固有ベクトルとする。固有ベクトルの規準化は $\{\phi\}^T \{\phi\} = 1$ による。

* 原稿受付 1994年11月21日。

*¹ 正員、東京大学生産技術研究所 (〒106 東京都港区六本木7-22-1)。

$\{\phi\}$ をホモロガス変形制約を課す従属な J 個の成分 $\{\phi_d\}$ と、その他の独立な成分 $\{\phi_i\}$ に分ける。本研究では $[C]$ を適宜の定数行列として、ホモロガス変形制約は式(2)の線形関係で与えられるとする。

$$([K] - \lambda[M])\{\phi\} = \{0\} \quad (1)$$

$$\{\phi_d\} = [C]\{\phi_i\} \quad (2)$$

試設計では式(2)で表される関係が満足されないとき、 M 個の設計変数 α_m を用いて設計パラメータ p_m を式(3)に基づき変化させる。以後、上付きの棒記号は試設計を示す。このパラメータ変化による固有値、固有ベクトルの変化を式(4)と(5)の α_m に関する Taylor 級数展開一次式で近似する。

$$p_m = \bar{p}_m(1 + \alpha_m) \quad (3)$$

$$\lambda = \bar{\lambda} + \sum_{m=1}^M \lambda'_m \alpha_m \quad (4)$$

$$\{\phi\} = \{\bar{\phi}\} + \sum_{m=1}^M \{\phi'_m\} \alpha_m \quad (5)$$

肩符 I と添字 m は設計変数 α_m に関する一階感度であることを意味する。この固有値と固有ベクトルの感度は適宜の感度解析法により、式(1)の固有値問題と固有ベクトルの規準化条件が常に成立しているように算出する⁽⁴⁾。式(5)を式(2)に代入すると設計変数の決定方程式が式(6)と得られるので、それを簡単に式(7)と表す。

$$\sum_{m=1}^M \left(\{\phi'_{dm}\} - [C]\{\phi'_{im}\} \right) \alpha_m = [C]\{\bar{\phi}_i\} - \{\bar{\phi}_d\} \quad (6)$$

$$[A]\{\alpha\} = \{b\} \quad (7)$$

この係数行列 $[A]$ は $J \times M$ の一般には非正方な行列であり、 $\{b\}$ は定数ベクトル、 $\{\alpha\}$ は未知の設計変数ベクトルである。設計変数ベクトル $\{\alpha\}$ は式(7)の解の存在条件式(8)が成立するとき、式(9)により決定される⁽⁵⁾。

$$([I] - [A][A]^{-})\{b\} = \{0\} \quad (8)$$

$$\{\alpha\} = [A]^{-}\{b\} + ([I] - [A]^{-}[A])\{h\} \quad (9)$$

$[I]$ は適宜の次元の単位行列、 $\{h\}$ は任意ベクトルで、肩符 $(-)$ は Moore-Penrose 一般逆行列を意味する。この一般逆行列を用いると、式(9)右辺第一項はノルム最小解となる⁽⁵⁾。本研究では、試設計に最も近い設計変更を選ぶため $\{h\}$ を零ベクトルとして、設計変数をこの第一項のみで定める。

式(6)は応答変化の一次近似に基づく決定方程式である。この一次近似の精度補償のため、式(9)による設計変数決定と試設計変更の過程を式(6)右辺が零ベクトルに収束するまで反復する。この反復が収束すれば確定

的なホモロジー設計が得られる。

3. 不確かさの凸包モデルによる表現

従来は、不確かさは確率過程または確率変数として取扱われていることが多い。本研究では、構造系に L 個の不確かなパラメータ p_l が含まれているとするが、その不確かさを確率変数としてではなく、不確定変数 ε_l により式(10)と表す。ただし、 ε_l の平均値は零とする。以後、肩符 $(*)$ は平均値を指す。

$$p_l = p_l^*(1 + \varepsilon_l) \quad (10)$$

不確定変数の存在する領域はなんらかの先験情報により有界であると見切ることができるとの立場を取るが、不確定変数の確率密度関数は不問にする。不確定変数の平均値が零でない場合等ではその表式に一次項も加わり得るが、本研究で取り扱う有界な存在領域は、平均値を零として、 ε_l の二次項のみの凸包として式(11)で与えられているとする。

$$c^2 \{\varepsilon_l\}^T [W] \{\varepsilon_l\} - 1 \leq 0 \quad (11)$$

ここで、 c は存在領域の拡がりを設定する定数であり、 $[W]$ は存在領域のかたちを設定する正定値の行列である。不確かさを表現するのに確率変数や確率密度関数を用いず、不確かなパラメータの存在領域を用い、その存在領域を式(11)の凸包とするモデルは凸包モデルと呼ばれている⁽⁶⁾。

4. ホモロジー設計の誤差指標

構造系に不確かさが含まれれば剛性行列や質量行列は不確かとなる。そのとき2章の所論により得られたホモロジー設計は攪乱され、ホモロガス変形制約条件が満たされなくなる。本研究では、不確定変数を割り付ける構造パラメータと異なる構造パラメータにホモロジー設計の設計変数を割り付ける。このように、設計変数と不確定変数が独立な場合に構造挙動に及ぼす不確定変数の影響を調べるとき、試設計から出発して確定ホモロジー設計をまず求め、次いで確定ホモロジー設計近傍での構造の不確定挙動を推定して差し支えない。そこで、本章では不確かなパラメータの平均値 p_l^* に対して確定ホモロジー設計が2章の定式に基づき決定されているとする。このパラメータの不確定変動が式(10)で表されるとき、剛性行列と質量行列は確定ホモロジー設計の $[K^*]$ と $[M^*]$ の近傍で変化する。設計変数に対する変化と同様に、その変化を ε_l に関する Taylor 級数展開一次打ち切りで近似する。剛性行列の例を式(12)に示す。

$$[K] = [K^*] + \sum_{l=1}^L [K_l'] \varepsilon_l \quad (12)$$

このような変化に対して固有値と固有ベクトルも確定ホモロジー設計の近傍で変化する。固有ベクトル変化の一次近似式(13)では、 $\{\phi^*\}$ はホモロガス変形制約を満たす固有ベクトルであり、 $\{\phi_l'\}$ は2章と同様の感度解析により得られる不確定変数 ε_l に関する固有ベクトルの一階感度である。

$$\{\phi\} = \{\phi^*\} + \sum_{l=1}^L \{\phi_l'\} \varepsilon_l \quad (13)$$

式(13)右辺第二項は、ホモロガス変形制約を満たす固有ベクトルからの不確かな誤差である。この誤差固有ベクトル $\{V\}$ を式(14)と表す。

$$\{V\} = [R]\{\varepsilon_l\} \quad (14)$$

これを用いれば、ホモロガス変形制約からの固有ベクトルの誤差を表示する指標を適宜構成できる。この構成の仕方は唯一ではない。誤差の最大値に注目する場合は $\{q\}$ を適宜の定数ベクトルとして指標を $\{V\}^T\{q\}$ と定義することもできるが、 $\{q\}$ の選び方に恣意性が残る。この場合の誤差指標は ε_l の一次関数である。本研究では、式(2)に基づき $\|[\phi_d] - [C]\{\phi_l\}\|^2$ を誤差指標 Δ^2 として用いる。この Δ^2 は ε_l の二次関数となり、式(15)の形にまとめられる。

$$\Delta^2 = \{\varepsilon_l\}^T [D] \{\varepsilon_l\} \quad (15)$$

この分散型の誤差指標は非負で、全ての不確定変数が零のときに最小の零値を取る。

5. 凸包モデルによる最悪値の推定

本章では不確定変数が凸包内部（境界上も含む）にあるとき、固有振動モードのホモロガス変形制約がどの程度乱されるかを誤差指標 Δ^2 により評価する。凸包内部にある変数の凸関数は凸包境界上で最大又は最小になるので⁽⁷⁾、不確定変数の存在領域が式(11)で示される凸包であるとき、式(15)の凸関数で表される誤差指標の最大値の探索は境界上で行なえば良い。この値は、本来は零であるのが望ましい指標が取り得る最大値であるので最悪値(worst case)と呼ぶ。最大値探索にはLagrange乗数法を用いて、式(16)の汎関数を構成する。

$$\Pi = \{\varepsilon_l\}^T [D] \{\varepsilon_l\} - \mu \left(c^2 \{\varepsilon_l\}^T [W] \{\varepsilon_l\} - 1 \right) \quad (16)$$

ここで、 μ は未定のLagrange乗数である。この汎関数の ε_l と μ に関する停留条件は式(17)と(18)となる。式(17)は L 次の固有値問題を形成し、式(18)はその規準化条件である。

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \{\varepsilon_l\}^T} = 2 \left([D] - \mu c^2 [W] \right) \{\varepsilon_l\} = \{0\} \quad (17)$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \mu} = - \left(c^2 \{\varepsilon_l\}^T [W] \{\varepsilon_l\} - 1 \right) = 0 \quad (18)$$

$[D]$ と $[W]$ を与えて固有値問題を解いて L 個の固有値 $\nu = \mu c^2$ と固有ベクトル $\{\varepsilon_l'\}$ を算出することができる。停留条件を満たす $\{\varepsilon_l'\}$ と ν について誤差指標を算出すると式(19)となる。すなわち、式(17)を解いて得られる最大固有値により最悪値が与えられる。

$$\Delta^2 = \{\varepsilon_l'\}^T [D] \{\varepsilon_l'\} = \mu c^2 \{\varepsilon_l'\}^T [W] \{\varepsilon_l'\} = \mu = \nu / c^2 \quad (19)$$

この二次の誤差指標は ε_l の L 次元空間においては超楕円円で表され、不確定変数の存在領域も同様に超楕円円で表される。このLagrange乗数法では不確定変数の超楕円に外接する誤差指標の超楕円を求めている。

c は不確定変数の拡がりを示す定数であるので、式(17)の固有値解析により得られる最大固有値は不確かなパラメータに関する誤差指標の感度を意味している。本解析では、想定した不確かさの拡がりについての誤差指標の最大値とそれを与える不確定変数の値は推定されるが、最大値を与える事象の確率密度は不明のまま残る。

6. 格子構造の曲げ振動に関する 確定ホモロジー設計

図1は数値計算の対象とする平面格子フレーム構造を示す。この平面格子構造は図中に黒三角点で示す4点で単純支持に近い条件で支持されているとする。後述の支持条件の不確かさを取り扱うため、 x 方向のたわみ角に関してばね定数が sEI/l (EI と l は最初の試設計の1部材の曲げ剛性と長さで確定量とする)の仮想ばねを挿入し、 s の平均値を0.1とする。材料はアルミニウムとして、そのヤング率を70.0 GPa、せん断弾性係数を26.9 GPa、質量密度を $3.0 \times 10^3 \text{ Kg/m}^3$ とする。格子構造の離散化には曲げと振りを考慮する円形断面の有限要素を用い、各格子点に節点を設ける。最初の試設計では全要素の断面直径を0.01 mとする。そのとき二次固有振動数は0.258 Hzとなり、図2にその振動モードを模式的に示す。図中の破線は静止時のフレーム構造を示す。

この振動モードでは y 軸方向にたわみ変形が現われている。このたわみ変形が部材上に機器を搭載するときには有害であり、搭載機器の機能発揮のためには卓越する二次振動に対して部材を直線に保つ必要があると

する。この直線条件は、静止時に直線上にある図1の節点1,6,11と3,8,13および5,10,15が二次振動においても直線上にあり、そのたわみ成分 w が等しいとのホモロガス変形制約を課することにより満たされる。このとき式(2)のホモロガス変形制約条件は $w_3 = w_8 = w_{13}$ 等の関係式に基づいて構成される。

設計変数は全要素の断面直径に割り付けて2章の定式により二次固有振動モードについて確定ホモロジー設計を行なう。一次近似の精度補償の反復計算は8回で収束した。その結果として得られた固有振動モードを図3に、ホモロジー設計での各部材断面直径分布を模式的に図4に示す。ホモロガス変形制約に従って部

図1 平面格子フレーム構造

図2 試設計における二次固有振動モード

図3 ホモロジー設計で実現された二次固有振動モード

図4 ホモロジー設計後の部材断面

材が直線に保たれている様子が分かる。ホモロジー設計でのフレーム構造の重量は最初の試設計の重量の130.4%である。本章で設定したホモロガス変形制約を達成する単純な方法の一つは、部材1-6-11, 3-8-13, 5-10-15の曲げ剛性を無限大に近く大きくすることである。それでは断面直径の大幅な増加、ひいては重量の増加を来す。これに対して、本計算結果はホモロジー設計の定式に従う設計変更により僅か30%の重量増加で直線維持の目的が達成されることを示している。

7. ホモロジー設計の最悪値の推定

6章の計算結果は、所定の確定支持条件に対しフレーム構造のホモロジー設計が可能であることを示している。これは確定支持の仮定の下で得られた結果であり、支持条件が乱されて確定支持から外れれば、ホモロガス変形は実現されなくなる。本章では幾何学的境界条件の拘束度の不確かさを取り扱い、4支持点における部材の x 方向のたわみ角拘束が不確かであるとする。そこで、挿入された仮想ばねの定数 $sEII$ の係数 s の不確かさを式(10)で表す⁽⁸⁾。この処置により境界条件の不確かさは4個の不確定変数により剛性行列の不確かさに反映される。また、この不確定変数は6章で用いた設計変数とは完全に独立である。

本研究では、不確定変数について実験または経験に基づく完全な知識は得られていない場合を想定して、不確定変数の存在領域を以下のように想定する。

- 1) 最悪値の凸包境界上での探索が可能である場合を想定するため式(11)の $[W]$ は正定値に設定する。
- 2) 全ての不確定変数の平均値は零、また存在領域は不確定変数の二次項のみで表されるとする。したがって、存在領域は中心が座標原点にある超楕円となる。
- 3) 正規分布に従う場合、期待値に標準偏差の3倍を加減した範囲内に殆ど(99.7%)の確率変数が収まる。この類推から不確定変数の存在領域を推量する目安として標準偏差を用い、その超楕円の径長、すなわち $[W]$ の対角成分を1とし、定数 c を不確定変数の標準偏差に反比例するように定める。
- 4) 確率変数の分散-共分散行列の非対角成分は確率変数間の相関係数に比例している。この類推から、 $[W]$ の非対角成分は不確定変数の相関係合いを示す量として入力する。

以上の想定に基づき、存在領域を表す行列 $[W]$ を対称行列として以下のように設定して式(19)の $\mu = v/c^2$ 、すなわち攪乱されるホモロガス変形の式(15)で分散型

表1 最悪値とそれに対応する不確定変数

例	v/c^2	Δ^2	ε_1'	ε_2'	ε_3'	ε_4'
1	3.32×10^{-5}	3.32×10^{-5}	-0.05	0.05	0.05	-0.05
2	4.10×10^{-5}	4.12×10^{-5}	-0.0601	0.0509	0.0509	-0.0601
3	9.94×10^{-5}	9.95×10^{-5}	-0.158	-0.158	0.158	0.158
4	3.32×10^{-4}	3.33×10^{-4}	-0.158	0.1585	0.158	-0.158

で定義された誤差指標の最悪値の感度を式(17)の固有値問題の最大固有値として求める。仮想ばねの定数 s の平均値を $s^* = 0.1$ とし、不確定変数の存在領域に関する定数は $c = 10.0$ とする。

例1 支持の不確かさは4点で同一で、無相関の場合

$$[W] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

例2 支持の不確かさは例1と同じく4点で同一とするが、4支持点の節点2-4-12-14間に多少の相関がある場合

$$[W] = \begin{bmatrix} 1 & 0.25 & 0.06 & 0.01 \\ 0.25 & 1 & 0.25 & 0.06 \\ 0.06 & 0.25 & 1 & 0.25 \\ 0.01 & 0.06 & 0.25 & 1 \end{bmatrix}$$

例3 例2と同様に相関のある場合であるが、相関は樫がけの位置にある節点2-14間と節点4-12間で強い場合

$$[W] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0.9 \\ 0 & 1 & 0.9 & 0 \\ 0 & 0.9 & 1 & 0 \\ 0.9 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

例4 例3と異なり、同じ側の節点2-4間と節点12-14間に相関のある場合

$$[W] = \begin{bmatrix} 1 & 0.9 & 0 & 0 \\ 0.9 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0.9 \\ 0 & 0 & 0.9 & 1 \end{bmatrix}$$

表1に前記四例の最悪値の推定結果を列記する。第2欄は最大固有値として推定された誤差指標の最悪値

を、第4から第7欄は最大固有値に対応する固有ベクトルとして求められた不確定変数である。第3欄はこの不確定変数値を考慮したばね定数についてフレーム構造の固有振動解析を行なって得られた固有振動モードから算出された誤差指標である。第2欄と第3欄の結果が良く一致していることは、本定式の妥当性を意味している。本定式は一次近似に基づいているので、不確定変数の存在領域が大きければ、第2欄と第3欄の結果は一致しない。本計算例では、不確定変数に相関のある場合の最悪値は無相関の場合の最悪値より大きい。例4の最悪値は例1の最悪値の約10倍に達している。

8. 結 言

本研究では、構造系に含まれる不確かさを確率変数としてではなく、存在する領域を有界の凸包として想定し、起こり得る事象の最悪値を推定することにより不確かさの影響を定量化する方法を示した。その方法の運用と妥当性を平面格子フレーム構造の固有振動モードに関するホモガス変形制約の最悪値探索の数値解析例により示した。最悪値の確率密度についての情報は得られないが、不確かさの影響を受ける着目量に関する最悪値の推定が凸包モデルにより可能となる。有界な不確かさの存在領域のかたちを表現する行列 $[W]$ を取り込んだ固有値解析により最悪値の感度が得られるので、不確定変数の変動が小さく式(12)と式(13)の近似誤差が小さい(c 値が大きい)時は定数 c が変わっても、代数計算のみで最悪値が推定できる。相関の強い不確定変数が含まれると行列 $[W]$ の正定値性は弱い。この場合の最悪値の推定は今後検討すべき課題である。

文 献

- (1) von Hoener, S., Proc. ASCE, 93-ST5(1967), 461.
- (2) 半谷・川口, 形態解析, (1991), 培風館.
- (3) 中桐・吉川, 機論, 59-566, C(1993), 3065.
- (4) Nelson, R.B., AIAA J., 14-9(1976), 1201.
- (5) ラオ＝ミトラ著, 渋谷・田辺訳, 一般逆行列とその応用, (1973), 東京図書.
- (6) Ben-Haim, Y. and Elishakoff, E., Convex Models of Uncertainty in Applied Mechanics, (1990), Elsevier.
- (7) 布川・中山・谷野, 線形代数と凸解析, (1991), コロナ社.
- (8) 中桐・久田, 機論, 49-438, A(1983), 239.