伝達マトリックス法に基づく回転翼振動解析の厳密理論*

(第3報, 慣性, 剛性, 遠心力マトリックスの対称性,

コリオリマトリックスの反対称性

および慣性, 全剛性マトリックスの正定性の検証)

吉川 順 偉^{*1}, 肥 爪 彰 夫^{*2}, 勝 間 俊 文^{*3}Rigorous Theory of Vibration Analysis of Rotating Blade Based
on Transfer Matrix Method(3rd Report, Symmetry of Inertia, Stiffness and Centrifugal Force Matrix,
Antisymmetry of Coriolis Matrix, and Positive Definiteness
of Inertia and Total Stiffness Matrix)

Masahide YOSHIKAWA, Akio HIZUME and Toshifumi KATSUMA

In order to show the features of the method of analyzing blade natural vibration described in the first and second reports, it must be demonstrated that the inertia, stiffness, centrifugal force and Coriolis matrices, which are equivalent to the transfer matrix of the second report, are symmetric, symmetric, symmetric and antisymmetric matrices, respectively, and that the inertia matrix and the total stiffness matrix—the latter is the sum of the stiffness and centrifugal force matrices—are positive definite matrices. It also means that natural frequencies are positive real number, and that each natural mode shape is orthogonal to the others. In addition, the result is effective in ascertaining that the selection of state variables and the treatment of centrifugal tension resistance are appropriate. In the process of the above proof, an equivalent method for symmetry verification is proposed and used, in order to make symmetry verification easier.

Key Words: Vibration of Rotating Body, Transfer Matrix Method, Coupled Vibration, Vibration of Continuous System, Vibration Analysis, Turbine Blade

1. 緒 言

多自由度系不減衰自由振動に関する運動方程式の慣性マトリックスおよび剛性マトリックスは対称かつ正定であり, このとき固有円振動数の自乗が正の実数で, かつ固有振動型の広義直交性が成立する, ということは, 周知の, 振動学の原理であり, このことは, 振動方程式に誤りがなければ必ず満足される. ところが, 回転翼の, 撓み(曲げおよび剪断), 伸縮, 振りおよびゆがみに関する振動方程式は, 各因子が複雑に影響し合うので, その導出に誤りの入るおそれがある. 特に,

(1) 状態変数選択の正当性

(2) 遠心張力の影響の正確な取扱い

には注意を要した.

本論文では, 第2報で導いた伝達マトリックスと等価な, 慣性マトリックス, 剛性マトリックス, コリオリマトリックス, および遠心力マトリックス(以下, 特性マトリックスと総称する)の満たすべき条件の検証アルゴリズムを述べ, これに基づいて可能な限り式計算で, 式計算が困難な場合については具体的な形状データを用いた数値計算によって, 第1, 2報の翼振動解析理論の無矛盾性を, 理論的に証明する.

2. 運動方程式特性マトリックスの満足
すべき条件とその検証アルゴリズム

2.1 運動方程式特性マトリックスの性質 回転座標系で自由振動する翼の運動方程式は次の形に書ける.

$$M\ddot{u} + C\dot{u} + Ku = 0, K = K_S + K_C \cdots \cdots (1)$$

ここに, M , C , K_S , K_C , K , u は, それぞれ, 慣性マトリックス, コリオリマトリックス, 剛性マトリックス, 遠心力マトリックス, 全剛性マトリックス, および変位ベクトルである. $\dot{u}$, $\ddot{u}$ は, それぞれ, 回転座標系から見た, 速度ベクトル, 加速度ベクトルである.

剛性マトリックス K_S は, Maxwellの相反定理より, 対称マトリックスで, 慣性マトリックス M も同様に対称マトリックスである. コリオリマトリックス C , 遠心力マトリックス K_C は, ベクトルの外積の性質より, それぞれ, 反対称マトリックス, 対称マトリックスである. よって, 全剛性マトリックス K は対称である.

$u = Ue^{j\omega t}$ (U :複素ベクトル, j :虚数単位)とおけば, 振動数方程式は

$$-\omega^2 U^* M U + j\omega U^* C U + U^* K U = 0 \cdots \cdots (2)$$

ここに, U^* は U の共役転置ベクトルである. ω に関する2次方程式(2)が正の実数解を持つための必要十分条件は,

$$[(U^* M U) \cdot (U^* K U) > 0] \wedge [\text{Re}(U^* C U) = 0] \cdots (3a, 3b)$$

C は反対称マトリックスであるから, 式(3b)は満足される. 式(3a)の $U^* K U$ はポテンシャルの2倍であるから, 系が剛体

* 原稿受付 1994年9月14日.

^{*1} 正員, 神戸大学大学院 (〒657 神戸市灘区六甲台町1-1).^{*2} 正員, 神戸大学工学部.^{*3} 学生員, 神戸大学大学院.

運動しないよう拘束されていれば、正である。ゆえに、

$$(U^*MU > 0) \wedge (U^*KU > 0) \dots\dots\dots (3a')$$

すなわち、 M と K が正定対称マトリックスでなければならない。

標準振動型の直交性は、第 k 、 l 次の標準振動 (ω_k, U_k) 、 (ω_l, U_l) について、

$$(\omega_k - \omega_l)[(\omega_k + \omega_l)U_k^*MU_l - jU_k^*CU_l] = 0 \dots\dots\dots (4)$$

従って、式(3b)、(3a')、(4)より、

$$\left. \begin{aligned} U_k^*MU_l > 0, \operatorname{Re}(U_k^*CU_l) = 0, U_k^*KU_l > 0 \quad (k = l) \\ (\omega_k + \omega_l)U_k^*MU_l - jU_k^*CU_l = 0 \\ \omega_k\omega_l U_k^*MU_l + U_k^*KU_l = 0 \end{aligned} \right\} \quad (k \neq l) \quad (5)$$

2.2 検証アルゴリズム 慣性マトリックスと剛性マトリックス、および遠心力マトリックスの対称性と、コリオリマトリックスの反対称性は、均一断面梁要素に固定した局所座標系から回転座標系への変換過程において保存される。よって、式計算による対称性あるいは反対称性の検証は、要素特性マトリックスについて行う。

いま、ワイヤからの反力、反モーメントは省略し、要素 (i) の振動に関する伝達マトリックス表示(以下、TM表示と記す)と特性マトリックス表示(以下、MCK表示と記す)を次のように書くことにする。

$$\text{TM} : \begin{bmatrix} u_{ei} \\ f_{ei} \end{bmatrix} = T_{ei}^{(i)} \begin{bmatrix} u_{ei-1} \\ -f_{ei-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{e11}^{(i)} & T_{e12}^{(i)} \\ T_{e21}^{(i)} & T_{e22}^{(i)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{ei-1} \\ -f_{ei-1} \end{bmatrix} \dots\dots (6a)$$

$$\text{MCK} : \begin{bmatrix} f_{ei-1} \\ u_{ei} \end{bmatrix} = S_{ei}^{(i)} \begin{bmatrix} u_{ei-1} \\ u_{ei} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{e11}^{(i)} & S_{e12}^{(i)} \\ S_{e21}^{(i)} & S_{e22}^{(i)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{ei-1} \\ u_{ei} \end{bmatrix} \left\{ \begin{aligned} S_{ei}^{(i)} &= -\omega^2 M_{ei}^{(i)} + j\omega C_{ei}^{(i)} + K_{ei}^{(i)} \\ K_{ei}^{(i)} &= K_{ce}^{(i)} + K_{se}^{(i)} \end{aligned} \right. \quad (6b)$$

ここに、 u_e は要素変位・角変位ベクトル、 f_e は要素力・モーメントベクトルであり、各成分の正の向きは右手系に従う。下添字 e は局所座標系で表したマトリックスあるいはベクトルであることを示す。

TM表示の $T_{eki}^{(i)}$ とMCK表示の $S_{eki}^{(i)}$ の関係は、次式になる。

$$\begin{bmatrix} T_{e11}^{(i)} & T_{e12}^{(i)} \\ T_{e21}^{(i)} & T_{e22}^{(i)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -S_{e12}^{(i)-1} S_{e11}^{(i)} & -S_{e12}^{(i)-1} \\ S_{e21}^{(i)} - S_{e22}^{(i)} S_{e12}^{(i)-1} S_{e11}^{(i)} & -S_{e22}^{(i)} S_{e12}^{(i)-1} \end{bmatrix} \dots\dots (7a)$$

$$\begin{bmatrix} S_{e11}^{(i)} & S_{e12}^{(i)} \\ S_{e21}^{(i)} & S_{e22}^{(i)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{e12}^{(i)-1} T_{e11}^{(i)} & -T_{e12}^{(i)-1} \\ T_{e21}^{(i)} - T_{e22}^{(i)} T_{e12}^{(i)-1} T_{e11}^{(i)} & T_{e22}^{(i)} T_{e12}^{(i)-1} \end{bmatrix} \dots\dots (7b)$$

第2報で述べた、要素 (i) に関する、要素点伝達マトリックス $\Phi_{P\mathbb{M}i-1}^{(i)}$ 、 $\Phi_{P\mathbb{M}i}^{(i)}$ と、場伝達マトリックス $\Phi_{F\mathbb{M}}^{(i)}$ で $T_{eki}^{(i)}$ を表せば、式(8)になる。ここに、 $\Phi_{P\mathbb{M}i-1}^{(i)}$ 、 $\Phi_{P\mathbb{M}i}^{(i)}$ 、 $\Phi_{F\mathbb{M}}^{(i)}$ の要素の符号は、状態変数の正の向きが右手系に従うよう変換してあるとする。また、

$$\Phi_{P\mathbb{M}k}^{(i)} = \begin{bmatrix} I_7 & O \\ \Phi_{PC\mathbb{M}k}^{(i)} & I_7 \end{bmatrix} \quad (k = i-1, i), \quad \Phi_{F\mathbb{M}}^{(i)} = \begin{bmatrix} \Phi_{F\mathbb{M}11}^{(i)} & \Phi_{F\mathbb{M}12}^{(i)} \\ \Phi_{F\mathbb{M}21}^{(i)} & \Phi_{F\mathbb{M}22}^{(i)} \end{bmatrix} \dots\dots (9)$$

式(8)を式(7b)へ代入すれば、式(10)になる。よって、

$$\left. \begin{aligned} M_{ek+2,k+2}^{(i)} &= -\operatorname{Coef} \left[\Phi_{PC\mathbb{M}i+k}^{(i)}, \omega^2 \right] \\ C_{ek+2,k+2}^{(i)} &= \operatorname{Coef} \left[\Phi_{PC\mathbb{M}i+k}^{(i)}, j\omega \right] \end{aligned} \right\}$$

$$\begin{bmatrix} T_{e11}^{(i)} & T_{e12}^{(i)} \\ T_{e21}^{(i)} & T_{e22}^{(i)} \end{bmatrix} = \Phi_{P\mathbb{M}i}^{(i)} \Phi_{F\mathbb{M}}^{(i)} \Phi_{P\mathbb{M}i-1}^{(i)} = \begin{bmatrix} \Phi_{F\mathbb{M}11}^{(i)} + \Phi_{PC\mathbb{M}i-1}^{(i)} & \Phi_{F\mathbb{M}12}^{(i)} \\ \Phi_{F\mathbb{M}21}^{(i)} + \Phi_{PC\mathbb{M}i}^{(i)} & \Phi_{F\mathbb{M}22}^{(i)} + \Phi_{PC\mathbb{M}i-1}^{(i)} \end{bmatrix} \dots\dots (8)$$

$$\begin{bmatrix} S_{e11}^{(i)} & S_{e12}^{(i)} \\ S_{e21}^{(i)} & S_{e22}^{(i)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_{F\mathbb{M}12}^{(i)-1} \Phi_{F\mathbb{M}11}^{(i)} & -\Phi_{F\mathbb{M}12}^{(i)-1} \\ \Phi_{F\mathbb{M}21}^{(i)} - \Phi_{F\mathbb{M}22}^{(i)} \Phi_{F\mathbb{M}12}^{(i)-1} \Phi_{F\mathbb{M}11}^{(i)} & \Phi_{F\mathbb{M}22}^{(i)} \Phi_{F\mathbb{M}12}^{(i)-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Phi_{PC\mathbb{M}i-1}^{(i)} & O \\ O & \Phi_{PC\mathbb{M}i}^{(i)} \end{bmatrix} \dots\dots (10)$$

$$\left. \begin{aligned} K_{Cek+2,k+2}^{(i)} &= \Omega^2 \cdot \operatorname{Coef} \left[\Phi_{PC\mathbb{M}i+k}^{(i)}, \Omega^2 \right] \quad (k = -1, 0) \\ M_{e12}^{(i)} &= M_{e21}^{(i)} = C_{e12}^{(i)} = C_{e21}^{(i)} = K_{C e12}^{(i)} = K_{C e21}^{(i)} = O \end{aligned} \right\} \dots\dots (11a)$$

$$\left. \begin{aligned} K_{Se11}^{(i)} &= \Phi_{F\mathbb{M}12}^{(i)-1} \Phi_{F\mathbb{M}11}^{(i)}, \quad K_{Se22}^{(i)} = \Phi_{F\mathbb{M}22}^{(i)} \Phi_{F\mathbb{M}12}^{(i)-1} \\ K_{Se12}^{(i)} &= -\Phi_{F\mathbb{M}12}^{(i)-1}, \quad K_{Se21}^{(i)} = \Phi_{F\mathbb{M}21}^{(i)} - \Phi_{F\mathbb{M}22}^{(i)} \Phi_{F\mathbb{M}12}^{(i)-1} \Phi_{F\mathbb{M}11}^{(i)} \end{aligned} \right\} \dots\dots (11b)$$

ここに、 $\operatorname{Coef}[A, b]$ は、マトリックス A を構成している、 b の係数マトリックスを表す。要素慣性マトリックス $M_{ekk}^{(i)}$ および要素遠心力マトリックス $K_{Cekk}^{(i)}$ の対称性と、要素コリオリマトリックス $C_{ekk}^{(i)}$ の反対称性は、式(11a)に従って要素点伝達マトリックスを確認することにより検証する。

要素剛性マトリックス $K_{Sekl}^{(i)}$ の対称性は、式(11b)に従って確認すれば良いが、これを求めるには、場伝達マトリックスの(1,2)ブロック $\Phi_{F\mathbb{M}12}^{(i)}$ の逆マトリックスが必要である。 $\Phi_{F\mathbb{M}12}^{(i)}$ は梁要素のコンプライアンスを表す成分であり、一般には零要素が少ない。よって、マトリックスの次元が大きくなると、 $\Phi_{F\mathbb{M}12}^{(i)-1}$ を式計算で求めるのは困難である。それに対し、 $\Phi_{F\mathbb{M}11}^{(i)}$ 、 $\Phi_{F\mathbb{M}22}^{(i)}$ は状態変数の累積を表す成分であり、正則かつ零要素が多い。また、 $\Phi_{F\mathbb{M}21}^{(i)}$ は、変形に対する遠心張力の抵抗成分であり、ほとんどが零要素である。ゆえに、マトリックスの次元が大ききときは、次の方法で $K_{Se11}^{(i)}$ 、 $K_{Se22}^{(i)}$ の対称性、および $K_{Se12}^{(i)T} = K_{Se21}^{(i)}$ となることを確認する。

(1) $\operatorname{adj} \Phi_{F\mathbb{M}11}^{(i)} \cdot \Phi_{F\mathbb{M}12}^{(i)}$ および $\Phi_{F\mathbb{M}12}^{(i)} \cdot \operatorname{adj} \Phi_{F\mathbb{M}22}^{(i)}$ の対称性の確認。

対称マトリックスの逆マトリックスもまた対称マトリックスであることと、 $\operatorname{adj} \Phi_{F\mathbb{M}12}^{(i)}$ を求めるより、 $\operatorname{adj} \Phi_{F\mathbb{M}11}^{(i)}$ 、 $\operatorname{adj} \Phi_{F\mathbb{M}22}^{(i)}$ を求める方が容易であることによる。

(2) $\Phi_{F\mathbb{M}11}^{(i)T} \Phi_{F\mathbb{M}22}^{(i)} - \Phi_{F\mathbb{M}21}^{(i)T} \Phi_{F\mathbb{M}12}^{(i)} = I$ となることの確認。

(1)が確認できたとき、式(7a)より次式を得る。

$$\Phi_{F\mathbb{M}11}^{(i)T} \Phi_{F\mathbb{M}22}^{(i)} - \Phi_{F\mathbb{M}21}^{(i)T} \Phi_{F\mathbb{M}12}^{(i)} = K_{Se21}^{(i)T} K_{Se12}^{(i)-1} \dots\dots (12)$$

よって、式(12)が単位マトリックスになることは、 $K_{Se12}^{(i)T} = K_{Se21}^{(i)}$ と等価である。

これを、等価対称性検算法とよぶことにする。

慣性マトリックス M と全剛性マトリックス K は、式(13a)、(13b)(次々頁)のように $M_{eki}^{(i)}$ と $K_{eki}^{(i)}$ を回転座標系 X - Y - Z へ変換し、それらを翼全体にわたって重ね合わせることによって得られる。ここに、 (ξ_{si}, η_{si}) は局所座標系 ξ - η - ζ で表した剪断中心の座標、 $c_i = \cos(\alpha_{si} + \bar{\varphi}(l_i/2))$ 、 $s_i = \sin(\alpha_{si} + \bar{\varphi}(l_i/2))$ 、 $(\alpha_{si} + \bar{\varphi}(l_i/2))$ は局所座標系 ξ 軸と回転座標系 X 軸のなす角、 $\bar{\varphi}$ は翼のひねり戻りの振り角である。またこのときの、局所座標系、回転座標系、それぞれにおける変位ベクトル u_{ei} 、 u_i は

$$u_{ei} = [U_{\xi}^{(i)} U_{\eta}^{(i)} W_i \Theta_{\xi} \Theta_{\eta} \Phi_i \varphi_i]^T, \quad u_i = [U_i V_i W_i \Theta_X \Theta_Y \Phi_i \varphi_i]^T \quad (14)$$

ここに、 $U_{\xi}^{(i)}$ および $U_{\eta}^{(i)}$ は、剪断中心における、 ξ 軸方向撓みおよび η 軸方向撓みであり、 U および V は、図心における、 X 軸方向撓みおよび Y 軸方向撓みである。 Θ_{ξ} および Θ_{η} は、 ξ 軸方向曲げ傾斜および η 軸方向曲げ傾斜であり、 Θ_X および Θ_Y は、 X 軸方向曲げ傾斜および Y 軸方向曲げ傾斜である。 W 、 Φ 、および φ は、それぞれ、図心における伸び、振り角および振り率である(図1参照)。

翼根は固定端であり、翼根における全変位成分は0である。

よって、境界条件導入後の、相当慣性マトリックス M' および相当剛性マトリックス K' は、

$$\left. \begin{aligned} M' &= M \begin{pmatrix} r+1, r+2, \dots, r(n+1) \\ r+1, r+2, \dots, r(n+1) \end{pmatrix} \\ K' &= K \begin{pmatrix} r+1, r+2, \dots, r(n+1) \\ r+1, r+2, \dots, r(n+1) \end{pmatrix} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (15)$$

ここに、 $A \begin{pmatrix} i_1 i_2 \dots i_m \\ j_1 j_2 \dots j_m \end{pmatrix}$ は、 A から第 $i_1, i_2, \dots, i_m$ 行($i_1 < i_2 < \dots < i_m$)、第 $j_1, j_2, \dots, j_m$ 列($j_1 < j_2 < \dots < j_m$)だけを残し、それ以外の行、列を消去した、 A の m 次小マトリックスであり、 n は翼の分割要素数、 r は変位ベクトルの成分数である。式(15)の M' 、 K' について、Sylvesterの判別法により、正定性を確認する。

(a) 局所座標系 (b) 回転座標系
図1 局所座標系 ξ_i, η_i, ζ_i および回転座標系 X, Y, Z における変位角変位

3. $M_e^{(i)}$, $K_e^{(i)}$ の対称性, $C_e^{(i)}$ の反対称性, および M' , K' の正定性の検証

第2報で求めた要素点伝達マトリックス $\Phi_{P_{mk}}^{(i)}$ および場伝達マトリックス $\Phi_{F_{mk}}^{(i)}$ に関する状態変数は、図2に示す矢印の向きを正としている。ゆえに、それらから $M_e^{(i)}$, $K_e^{(i)}$, $C_e^{(i)}$ を求めた後、対称性あるいは反対称性を検証する際には、 Θ_η , S_ξ , S_η , M_η , $T^{(s)}$ に関する行および列の要素を (-1) 倍し、状態変数の正の向きを右手系にしてから行う。また、 $\Phi_{P_{mk}}^{(i)}$ から、式(12)によって、 $K_{Se12}^{(i)T} = K_{S21}^{(i)}$ となることを検証するときは、同様に、 $\Phi_{P_{mk}}^{(i)}$ の要素の符号を変換した後にを行う。

3.1 $M_{chk}^{(i)}$ と $K_{chk}^{(i)}$ の対称性および $C_{chk}^{(i)}$ の反対称性 要素点伝達マトリックス $\Phi_{P_{mk}}^{(i)}$ を式(11a)に従って項別にし、さらにそれを右手系になるよう符号の変換を行えば、式(16a)~(16c)(次頁)になる。よって、要素点伝達マトリックス $\Phi_{P_{mk}}^{(i)}$ と等価な3組のマトリックス $M_{chk}^{(i)}$, $K_{chk}^{(i)}$, $C_{chk}^{(i)}$ のうち、 $M_{chk}^{(i)}$, $K_{chk}^{(i)}$ は対称マトリックス、 $C_{chk}^{(i)}$ は反対称マトリックスになることが確認できる。

3.2 $K_{Se}^{(i)}$ の対称性 場伝達マトリックス $\Phi_{F_{mk}}^{(i)}$ の要素を式で書くこととすると、非常に複雑になる。これは、(i)遠心張力 $\bar{P}_{oi}$ が作用し、かつ(ii)断面の図心と剪断中心が不一致であることにより、図心方向伸縮を除く全ての変形が達成

(a) 変位および変位角 (b) 力、曲げモーメントおよび捩りモーメント

図2 状態変数

するからである。

ところが、要因(i), (ii)のうち一方でも偽であるとき、場において、 ξ 軸方向撓み、 η 軸方向撓み、伸縮、捩りの各変形が互いに独立になり、かつ二つの撓みの式は同形である。そこで、要因(i), (ii)に着目し、次の3段階に分けて対称性を確認する。

- 非回転($\bar{P}_{oi} = 0$)
- 回転($\bar{P}_{oi} \neq 0$)・断面の図心と剪断中心が一致
- 回転・断面の図心と剪断中心が不一致

a., b.は式計算によって、c.は、複雑なため、図3(次々頁)に示す翼を用いた数値計算によって、対称性を確認する。この数値計算に必要な断面定数は、簡単のため、図3の4断面より求めるパラメータを線形補間して求めた[表1(次々頁)]。

a. 非回転($\bar{P}_{oi} = 0$)のとき 確認は ξ 方向撓み、捩り、伸縮を個別に行う。

各変形の場合(i)に関する状態方程式は、式(17a)~(17c)になる。 ξ 方向撓み、捩り、伸縮に関する場伝達マトリックスを、それぞれ、 $\Phi_{F(D\xi)}^{(i)}$, $\Phi_{F(T)}^{(i)}$, $\Phi_{F(EC)}^{(i)}$ とおけば、式(18a)~(18c)になる。ここに

$$\lambda_i = \sqrt{\frac{GJ_{Bi}}{EI_{wBi}}} \dots\dots\dots (19)$$

各場伝達マトリックスを式(11b)へ代入し、さらに符号変換を行えば、 ξ 方向撓み、捩り、伸縮に関する剛性マトリックス $K_{Se(D\xi)}^{(i)}$, $K_{Se(T)}^{(i)}$, $K_{Se(EC)}^{(i)}$ は、それぞれ、式(20a), (20b)(次々頁), (20c)になる。

$$K_{Se(EC)}^{(i)} = \frac{EA_{Bi}}{l_i} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \dots\dots\dots (20c)$$

また、 $\Phi_{F(D\xi)}^{(i)}$, $\Phi_{F(T)}^{(i)}$ に等価対称性検算法を適用すれば、

$$\left. \begin{aligned} \text{adj} \Phi_{F(D\xi)11}^{(i)} \cdot \Phi_{F(D\xi)12}^{(i)} &= -\frac{l_i^2}{2EI_{\xi Bi}} \begin{bmatrix} * & 1 \\ 1 & * \end{bmatrix} \\ \Phi_{F(D\xi)12}^{(i)} \cdot \text{adj} \Phi_{F(D\xi)22}^{(i)} &= \frac{l_i^2}{2EI_{\xi Bi}} \begin{bmatrix} * & 1 \\ 1 & * \end{bmatrix} \\ \Phi_{F(D\xi)11}^{(i)T} \Phi_{F(D\xi)22}^{(i)} - \Phi_{F(D\xi)21}^{(i)T} \Phi_{F(D\xi)12}^{(i)} &= I_2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (21a)$$

$$\text{adj} \Phi_{F(T)11}^{(i)} \cdot \Phi_{F(T)12}^{(i)} = -\frac{\cosh \lambda_i l_i (\cosh \lambda_i l_i - 1)}{GJ_{Bi}} \begin{bmatrix} * & 1 \\ 1 & * \end{bmatrix} \dots\dots\dots (21b)$$

$$\frac{d}{d\xi} \begin{bmatrix} U_\xi^{(s)} \\ \Theta_\xi \\ \dot{S}_\xi \\ M_\xi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1/(\kappa_\xi GA_{Bi}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/(EI_{\xi Bi}) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_\xi^{(s)} \\ \Theta_\xi \\ \dot{S}_\xi \\ M_\xi \end{bmatrix}, \quad \frac{d}{d\xi} \begin{bmatrix} \Phi \\ \varphi \\ T^{(s)} \\ M_w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/(EI_{wBi}^{(s)}) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & GJ_{Bi} & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi \\ \varphi \\ T^{(s)} \\ M_w \end{bmatrix}, \quad \frac{d}{d\xi} \begin{bmatrix} W \\ P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1/(EA_{Bi}) \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W \\ P \end{bmatrix} \quad (17a, 17b, 17c)$$

$$\Phi_{F(D\xi)}^{(i)} = \begin{bmatrix} 1 & l_i & \frac{l_i^3}{6EI_{\xi Bi}} - \frac{l_i}{\kappa_\xi GA_{Bi}} & \frac{l_i^2}{2EI_{\xi Bi}} \\ 0 & 1 & \frac{l_i^2}{2EI_{\xi Bi}} & \frac{l_i}{EI_{\xi Bi}} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & l_i & 1 \end{bmatrix}, \quad \Phi_{F(T)}^{(i)} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{\sinh \lambda_i l_i}{\lambda_i} & \frac{\sinh \lambda_i l_i - \lambda_i l_i}{\lambda_i GJ_{Bi}} & \frac{\cosh \lambda_i l_i - 1}{GJ_{Bi}} \\ 0 & \cosh \lambda_i l_i & \frac{\cosh \lambda_i l_i - 1}{GJ_{Bi}} & \frac{\lambda_i \sinh \lambda_i l_i}{GJ_{Bi}} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{GJ_{Bi}}{\lambda_i} \sinh \lambda_i l_i & \frac{\sinh \lambda_i l_i}{\lambda_i} & \cosh \lambda_i l_i \end{bmatrix}, \quad \Phi_{F(EC)}^{(i)} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{l_i}{EA_{Bi}} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \dots\dots\dots (18a, 18b, 18c)$$

$$M = \begin{bmatrix} M_{11}^{(1)} & & & & O \\ & M_{22}^{(1)} + M_{11}^{(2)} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & M_{22}^{(n-1)} + M_{11}^{(n)} & \\ O & & & & M_{22}^{(n)} \end{bmatrix}, K = \begin{bmatrix} K_{11}^{(1)} & K_{12}^{(1)} & & & O \\ K_{21}^{(1)} & K_{22}^{(1)} + K_{11}^{(2)} & K_{12}^{(2)} & & \\ & K_{21}^{(2)} & K_{22}^{(2)} + K_{11}^{(3)} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & K_{22}^{(n-1)} + K_{11}^{(n)} & K_{12}^{(n)} \\ O & & & & K_{21}^{(n)} & K_{22}^{(n)} \end{bmatrix} \quad \dots (13a)$$

$$M_{kk}^{(i)} = Q_i^T (P_i^T M_{ekk}^{(i)} P_i) Q_i, K_{kk}^{(i)} = Q_i^T (P_i^T K_{ekk}^{(i)} P_i) Q_i, P_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\eta_{si} & 0 \\ & 1 & 0 & 0 & 0 & \xi_{si} & 0 \\ & & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & 1 & 0 & 0 \\ 0 & & & & & 1 & 1 \end{bmatrix}, Q_i = \begin{bmatrix} c_i & s_i & 0 \\ -s_i & c_i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ & & & c_i & s_i & 0 \\ & & & -s_i & c_i & 0 \\ & & & 0 & 0 & 1 \\ 0 & & & & & & 1 \end{bmatrix} \quad (13b)$$

$$M_{ekk+2,k+2}^{(i)} = \begin{bmatrix} \Delta M_{i+k}^{(i)} & & & & \\ 0 & \Delta M_{i+k}^{(i)} & & & \\ & 0 & \Delta M_{i+k}^{(i)} & & \\ 0 & 0 & 0 & \Delta I_{\xi i+k}^{(i)} & \\ 0 & 0 & 0 & -\Delta I_{\xi \eta i+k}^{(i)} & \Delta I_{\eta i+k}^{(i)} \\ \eta_{si} \Delta M_{i+k}^{(i)} - \xi_{si} \Delta M_{i+k}^{(i)} & 0 & 0 & 0 & \Delta I_{\eta i+k}^{(i)} + (\xi_{si}^2 + \eta_{si}^2) \Delta M_{i+k}^{(i)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \Delta I_{wi+k}^{(i)} \end{bmatrix} \quad \text{Sym.} \quad \dots (16a)$$

$$C_{ekk+2,k+2}^{(i)} = 2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & \widehat{\Omega}_{\eta i} \Delta M_{i+k}^{(i)} & 0 \\ 0 & 0 & -\widehat{\Omega}_{\xi i} \Delta M_{i+k}^{(i)} & 0 \\ -\widehat{\Omega}_{\eta i} \Delta M_{i+k}^{(i)} & \widehat{\Omega}_{\xi i} \Delta M_{i+k}^{(i)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (\widehat{\Omega}_{\xi i} \xi_{si} + \widehat{\Omega}_{\eta i} \eta_{si}) \Delta M_{i+k}^{(i)} & \widehat{\Omega}_{\xi i} \Delta I_{\xi i+k}^{(i)} + \widehat{\Omega}_{\eta i} \Delta I_{\xi \eta i+k}^{(i)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \dots (16b)$$

$$K_{Cekk+2,k+2}^{(i)} = \begin{bmatrix} -\widehat{\Omega}_{\eta i}^2 \Delta M_{i+k}^{(i)} & & & \\ \widehat{\Omega}_{\xi i} \widehat{\Omega}_{\eta i} \Delta M_{i+k}^{(i)} & -\widehat{\Omega}_{\xi i}^2 \Delta M_{i+k}^{(i)} & & \\ 0 & 0 & -\Omega^2 \Delta M_{i+k}^{(i)} & \\ 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & \\ -(\widehat{\Omega}_{\eta i}^2 \eta_{si} + \widehat{\Omega}_{\xi i} \widehat{\Omega}_{\eta i} \xi_{si}) \Delta M_{i+k}^{(i)} & (\widehat{\Omega}_{\xi i}^2 \xi_{si} + \widehat{\Omega}_{\eta i} \widehat{\Omega}_{\xi i} \eta_{si}) \Delta M_{i+k}^{(i)} & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & \end{bmatrix} \quad \text{Sym.} \quad \dots (16c)$$

図3 計算対象翼モデル(単位:mm)

$$\Phi_{F(T)12}^{(i)} \cdot \text{adj} \Phi_{F(T)22}^{(i)} = \frac{\cosh \lambda_i l_i (\cosh \lambda_i l_i - 1)}{G J_{B_i}} \begin{bmatrix} * & 1 \\ 1 & * \end{bmatrix} \dots \dots \dots (21b)$$

$$\Phi_{F(T)11}^{(i)} \Phi_{F(T)22}^{(i)} - \Phi_{F(D)21}^{(i)} \Phi_{F(T)12}^{(i)} = I_2$$

ここに, *は省略記号である。

b. 回転 ($\bar{P}_{oi} \neq 0$)・断面の図心と剪断中心が一致のとき 伸縮と振りは前項と同じ式になるので, ξ 方向撓みについてのみ述べる。

ξ 方向撓みの場(i)に関する状態方程式と場伝達マトリックス $\Phi_{F(D\xi)}^{(i)}$ は, それぞれ, 式(17a'), (18a')になる。ここに,

$$\mu_i = \sqrt{\frac{\kappa_{\xi i} G A_{B_i} \bar{P}_{oi}}{E I_{\xi B_i} (\kappa_{\xi i} G A_{B_i} + \bar{P}_{oi})}} \dots \dots \dots (27)$$

よって, $K_{Se(D\xi)}^{(i)}$ は, 式(20a')(次頁)になる。

また, 等価対称性検算法を適用すれば,

$$\left. \begin{aligned} \text{adj} \Phi_{F(D\xi)11}^{(i)} \cdot \Phi_{F(D\xi)12}^{(i)} &= -\frac{\cosh \mu_i l_i - 1}{\bar{P}_{oi}} \begin{bmatrix} * & 1 \\ 1 & * \end{bmatrix} \\ \Phi_{F(D\xi)12}^{(i)} \cdot \text{adj} \Phi_{F(D\xi)22}^{(i)} &= \frac{\cosh \mu_i l_i - 1}{\bar{P}_{oi}} \begin{bmatrix} * & 1 \\ 1 & * \end{bmatrix} \\ \Phi_{F(D\xi)11}^{(i)} \Phi_{F(D\xi)22}^{(i)} - \Phi_{F(D\xi)21}^{(i)} \Phi_{F(D\xi)12}^{(i)} &= I_2 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (21a')$$

c. 回転 ($\bar{P}_{oi} \neq 0$)・断面の図心と剪断中心が不一致のとき 図3の翼に対する, 回転時の全剛性マトリックス K を表2a~2c(次々頁)に示す。これより対称性を確認できる。

3.3 M' , K' の正定性 図3の翼に対する, 慣性マトリックス M の要素値を表3(3頁後)に, 式(15)に基づいて構成した, 相当慣性マトリックス M' , 相当剛性マトリックス K' に関する, 全ての主座小行列式の結果を, それぞれ, 表4, 5(次頁)に示す。両表の第1列は主座小行列式, 第2列はスケーリングを行ってから計算した主座小行列式である。スケーリングの規準値は, 主座小行列の正則, 非正則の判別の都合上, 10とした。第3列はスケールファクタの積を表す。

表4, 5より, M' , K' の正定性が確認できる。

$$K_{Se(D\xi)}^{(i)} = \frac{E I_{\xi B_i}}{l_i (\kappa_{\xi i} G A_{B_i} l_i^2 + 12 E I_{\xi B_i})} \begin{bmatrix} 12 \kappa_{\xi i} G A_{B_i} & 6 \kappa_{\xi i} G A_{B_i} & -12 \kappa_{\xi i} G A_{B_i} & 6 \kappa_{\xi i} G A_{B_i} \\ 6 \kappa_{\xi i} G A_{B_i} & 4 l_i (\kappa_{\xi i} G A_{B_i} l_i^2 + 3 E I_{\xi B_i}) & -6 \kappa_{\xi i} G A_{B_i} & 2 l_i (\kappa_{\xi i} G A_{B_i} l_i^2 - 6 E I_{\xi B_i}) \\ -12 \kappa_{\xi i} G A_{B_i} & -6 \kappa_{\xi i} G A_{B_i} & 12 \kappa_{\xi i} G A_{B_i} & 6 \kappa_{\xi i} G A_{B_i} \\ 6 \kappa_{\xi i} G A_{B_i} & 2 l_i (\kappa_{\xi i} G A_{B_i} l_i^2 - 6 E I_{\xi B_i}) & -6 \kappa_{\xi i} G A_{B_i} & 4 l_i (\kappa_{\xi i} G A_{B_i} l_i^2 + 3 E I_{\xi B_i}) \end{bmatrix} \dots \dots \dots (20a)$$

$$K_{Se(T)}^{(i)} = \frac{G J_{B_i}}{\lambda_i [\lambda_i l_i \sinh \lambda_i l_i - 2 (\cosh \lambda_i l_i - 1)]} \begin{bmatrix} \lambda_i^2 \sinh \lambda_i l_i & \lambda_i (\cosh \lambda_i l_i - 1) & -\lambda_i^2 \sinh \lambda_i l_i & \lambda_i (\cosh \lambda_i l_i - 1) \\ \lambda_i (\cosh \lambda_i l_i - 1) & \lambda_i l_i \cosh \lambda_i l_i - \sinh \lambda_i l_i & -\lambda_i (\cosh \lambda_i l_i - 1) & \sinh \lambda_i l_i - \lambda_i l_i \\ -\lambda_i^2 \sinh \lambda_i l_i & -\lambda_i (\cosh \lambda_i l_i - 1) & \lambda_i^2 \sinh \lambda_i l_i & -\lambda_i (\cosh \lambda_i l_i - 1) \\ \lambda_i (\cosh \lambda_i l_i - 1) & \sinh \lambda_i l_i - \lambda_i l_i & -\lambda_i (\cosh \lambda_i l_i - 1) & \lambda_i l_i \cosh \lambda_i l_i - \sinh \lambda_i l_i \end{bmatrix} \dots \dots (20b)$$

$$\frac{d}{d\xi} \begin{bmatrix} U_{\xi}^{(s)} \\ \Theta_{\xi} \\ \dot{S}_{\xi} \\ M_{\xi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\kappa_{\xi i} G A_{B_i}}{\kappa_{\xi i} G A_{B_i} + \bar{P}_{oi}} & -\frac{1}{\kappa_{\xi i} G A_{B_i} + \bar{P}_{oi}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{E I_{\xi B_i}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\kappa_{\xi i} G A_{B_i} \bar{P}_{oi}}{\kappa_{\xi i} G A_{B_i} + \bar{P}_{oi}} & \frac{\kappa_{\xi i} G A_{B_i}}{\kappa_{\xi i} G A_{B_i} + \bar{P}_{oi}} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{\xi}^{(s)} \\ \Theta_{\xi} \\ \dot{S}_{\xi} \\ M_{\xi} \end{bmatrix}, \quad \Phi_{F(D\xi)}^{(i)} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{\mu_i E I_{\xi B_i}}{\bar{P}_{oi}} \sinh \mu_i l_i & \frac{\mu_i E I_{\xi B_i}}{\bar{P}_{oi}^2} \sinh \mu_i l_i - \frac{l_i}{\bar{P}_{oi}} & \frac{\cosh \mu_i l_i - 1}{\bar{P}_{oi}} \\ 0 & \cosh \mu_i l_i & \frac{\cosh \mu_i l_i - 1}{\bar{P}_{oi}} & \frac{\sinh \mu_i l_i}{\mu_i E I_{\xi B_i}} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \mu_i E I_{\xi B_i} \sinh \mu_i l_i & \frac{\mu_i E I_{\xi B_i}}{\bar{P}_{oi}} \sinh \mu_i l_i & \cosh \mu_i l_i \end{bmatrix} \dots \dots \dots (17a', 18a')$$

表1 翼(図3)の材料定数, 回転角速度, および断面定数

	$E[\text{GPa}]$	$G[\text{GPa}]$	$\rho [\text{kg/m}^3]$	$\Omega[\text{rpm}]$
	188.916	74.4634	7783.29	3600

	$A = A_B [\text{m}^2]$	$I_{\xi} = I_{\xi B} [\text{m}^4]$	$I_{\eta} = I_{\eta B} [\text{m}^4]$	$1/\kappa_{\xi} [-]$	$1/\kappa_{\eta} [-]$	$\alpha = \alpha_B [\text{rad}]$ [$^{\circ}$]	$I_p [\text{m}^4]$	$J_B [\text{m}^4]$	$I_{\omega}^{(s)} = I_{\omega B}^{(s)} [\text{m}^4]$	($\xi_s [\text{mm}], \eta_s [\text{mm}]$) ($X_s [\text{mm}], Y_s [\text{mm}]$)
A—A	2.36469E-03	2.90064E-07	4.72022E-06	1.31373	0.70390	0.174607 {10.0043}	5.01028E-06	1.53422E-07	1.32869E-10	(-0.14993, 17.16665) {-3.12986, 16.87958}
(1)	2.01208E-03	1.90639E-07	3.41258E-06	1.32234	0.73229	0.273466 {15.6685}	3.60322E-06	1.14159E-07	7.29943E-11	(2.95011, 15.01504) {-1.21463, 15.25383}
B—B	1.68792E-03	1.18880E-07	2.39752E-06	1.33264	0.76816	0.390477 {22.3727}	2.51640E-06	8.29434E-08	3.74653E-11	(5.57029, 12.41939) {0.42381, 13.60477}
(2)	1.46237E-03	8.46406E-08	1.85981E-06	1.31425	0.78283	0.465898 {26.6940}	1.94445E-06	6.09457E-08	2.29650E-11	(7.16389, 10.53223) {1.66901, 12.62789}
C—C	1.25299E-03	5.83377E-08	1.41760E-06	1.29338	0.80039	0.553435 {31.7095}	1.47593E-06	4.36378E-08	1.34725E-11	(8.48327, 8.47730) {2.76115, 11.67076}
(3)	1.04401E-03	3.71179E-08	1.07863E-06	1.24242	0.80960	0.644015 {36.8994}	1.11574E-06	2.93629E-08	7.04897E-12	(8.37239, 7.61551) {2.12289, 11.11693}
D—D	8.54078E-04	2.22312E-08	8.02326E-07	1.18463	0.82097	0.753729 {43.1855}	8.24558E-07	1.89083E-07	3.40566E-12	(8.18337, 6.86054) {1.27174, 10.60270}

4. 結 言

本報で述べた、慣性マトリックス、剛性マトリックス、遠心力マトリックスの対称性、コリオリマトリックスの反対称性、および慣性マトリックス、全剛性マトリックスの正定性の検証は、振動方程式への遠心張力の影響の組込に関する、著者らの間での議論が始まりである。当初、遠心張力の翼変形に対する抵抗として、撓みに対する抵抗曲げモーメントのみを考慮していた⁽¹⁾⁽²⁾。本研究で、伝達マトリックスから剛性マトリックスへ変換してみると、それでは対称性は成立しないことがわかった。熟慮の結果、抵抗曲げモーメントに加え、図心軸の傾斜に対する抵抗剪断力および抵抗振りモーメントを考慮すべきことに気付いた。これら遠心張力による抵抗3成分を組み込んだ、回転翼の振動に関する、状態方程式および伝達マトリックスは、第1, 2報で述べたようになり、伝達マトリックスと等価な慣性マトリックス、剛性マトリックス、遠心力マトリックスの対称性、コリオリマトリックスの反対称性、および慣性マトリックス、全剛性マトリックスの正定性が、本報で述べたように、成立した。これ

により、回転翼の固有振動解析法の無矛盾性が証明され、固有振動数の正実性および固有振動型の広義直交性が保証された。このように遠心張力の翼変形に対する抵抗を一貫して追究し、厳密に扱ったのは著者らが最初である。

本研究では、遠心張力の翼変形に対する抵抗の厳密な取扱に加え、(1)振りに対するゆがみ剛性の影響、(2)コリオリ力による接線方向撓み・翼長方向伸縮の慣性連成、(3)翼のひねり戻りに伴う、軸方向撓み剛性変化および接線方向撓み剛性変化を考慮した、伝達マトリックス法による回転翼振動解析法の決定版を導き、本報でそれら3因子の取扱の正当性も証明した。

本理論から求まる固有振動数および規準振動型と、それらの実測値との整合性については、次報以降に示す。

文 献

- (1) 肥爪彰夫, 電力定常不平衡に起因する翼・ロータ系の振動, 東京大学学位論文(学位記番号第9147号), (1989).
- (2) 肥爪彰夫, 吉川順偉, 伝達マトリックス法による回転翼の振動解析(第1報, 解析法と翼モデル), 機講論, No.920-17 C (1992-4), 4.

$$K_{Se(D\xi)}^{(i)} = \frac{1}{\bar{P}_{oi} l_i \sinh \mu_i l_i - 2\mu_i EI_{\xi Bi} (\cosh \mu_i l_i - 1)} \begin{bmatrix} \bar{P}_{oi}^2 \sinh \mu_i l_i & \mu_i EI_{\xi Bi} \bar{P}_{oi} (\cosh \mu_i l_i - 1) \\ \mu_i EI_{\xi Bi} \bar{P}_{oi} (\cosh \mu_i l_i - 1) & -\mu_i EI_{\xi Bi} (\mu_i EI_{\xi Bi} \sinh \mu_i l_i - \bar{P}_{oi} l_i \cosh \mu_i l_i) \\ -\bar{P}_{oi}^2 \sinh \mu_i l_i & -\mu_i EI_{\xi Bi} \bar{P}_{oi} (\cosh \mu_i l_i - 1) \\ \mu_i EI_{\xi Bi} \bar{P}_{oi} (\cosh \mu_i l_i - 1) & \mu_i EI_{\xi Bi} (\mu_i EI_{\xi Bi} \sinh \mu_i l_i - \bar{P}_{oi} l_i) \\ -\bar{P}_{oi}^2 \sinh \mu_i l_i & \mu_i EI_{\xi Bi} \bar{P}_{oi} (\cosh \mu_i l_i - 1) \\ -\mu_i EI_{\xi Bi} \bar{P}_{oi} (\cosh \mu_i l_i - 1) & \mu_i EI_{\xi Bi} (\mu_i EI_{\xi Bi} \sinh \mu_i l_i - \bar{P}_{oi} l_i) \\ \bar{P}_{oi}^2 \sinh \mu_i l_i & -\mu_i EI_{\xi Bi} \bar{P}_{oi} (\cosh \mu_i l_i - 1) \\ -\mu_i EI_{\xi Bi} \bar{P}_{oi} (\cosh \mu_i l_i - 1) & -\mu_i EI_{\xi Bi} (\mu_i EI_{\xi Bi} \sinh \mu_i l_i - \bar{P}_{oi} l_i \cosh \mu_i l_i) \end{bmatrix} \dots (20a')$$

表4 翼断面梁(図3)相当慣性マトリックス
の主座小行列式

Order	P.M.	N.P.M.	P.S.F.
1	1.51764E+000	1.00000E+01	1.51764E-001
2	2.30324E+000	1.00000E+02	2.30324E-002
3	3.49550E+000	1.00000E+03	3.49550E-003
4	7.29642E-003	1.00000E+04	7.29642E-007
5	1.13900E-006	4.19434E+04	2.71556E-011
6	2.44876E-009	3.66631E+05	6.67907E-015
7	1.06608E-016	3.66631E+06	2.90778E-023
8	1.02321E-016	3.66631E+07	2.79085E-024
9	9.82069E-017	3.66631E+08	2.67863E-025
10	9.42578E-017	3.66631E+09	2.57092E-026
11	7.95801E-020	3.66631E+10	2.17058E-030
12	5.74749E-024	8.08313E+10	7.11047E-035
13	5.92200E-027	7.10710E+11	8.33251E-039
14	6.80644E-035	7.10710E+12	9.57696E-048
15	2.72115E-035	7.10710E+13	3.82878E-049
16	1.08789E-035	7.10710E+14	1.53071E-050
17	4.34929E-036	7.10710E+15	6.11964E-052
18	1.17113E-039	7.10710E+16	1.64784E-056
19	2.55346E-044	9.80808E+16	2.60342E-061
20	9.60228E-048	8.63251E+17	1.11234E-065
21	2.59196E-056	8.63251E+18	3.00256E-075

表5 翼断面梁(図3)相当剛性マトリックス
の主座小行列式

Order	P.M.	N.P.M.	P.S.F.
1	1.32596E+009	1.00000E+01	1.32596E+008
2	5.85279E+017	8.21443E+01	7.12501E+015
3	3.46217E+027	8.21443E+02	4.21474E+024
4	4.03435E+034	8.01543E+03	5.03323E+030
5	7.48400E+040	4.75388E+04	1.57429E+036
6	2.14441E+046	2.50472E+05	8.56147E+040
7	1.65212E+049	7.06706E+04	2.33778E+044
8	9.40493E+057	4.19739E+05	2.24066E+052
9	1.52529E+066	1.30360E+06	1.17005E+060
10	5.30691E+075	9.42597E+06	5.63009E+068
11	2.53362E+082	6.87244E+07	3.68664E+074
12	2.01924E+088	1.88749E+08	1.06980E+080
13	1.74484E+093	1.56518E+07	1.11478E+086
14	4.48327E+095	1.30506E+08	3.43529E+087
15	3.15756E+103	2.58291E+08	1.22248E+095
16	3.88004E+110	1.34350E+08	2.88801E+102
17	3.29656E+119	5.69503E+08	5.78849E+110
18	1.86960E+125	1.46130E+09	1.27941E+116
19	1.21739E+130	6.82550E+08	1.78359E+121
20	1.97193E+134	9.51015E+07	2.07350E+126
21	1.06600E+136	2.08091E+08	5.12279E+127

(P.M.:Principal Minor, N.P.M.:Normalized P.M., P.S.F.:Product of Scale Factors)

表2a 翼断面梁(図3)全剛性マトリックス(回転)—その1

	U_0	V_0	W_0	Θ_{X_0}	Θ_{Y_0}	Φ_0	φ_0	U_1	V_1	W_1	Θ_{X_1}	Θ_{Y_1}	Φ_1	φ_1
S_{X_0}	7.23359E+08	1.43645E+08	0.00000E+00	4.21577E+07	1.53854E+07	-1.11619E+07	1.36986E+02	-7.23359E+08	-1.43645E+08	0.00000E+00	4.21577E+07	1.53854E+07	-1.11619E+07	1.36986E+02
S_{Y_0}	1.43645E+08	2.51399E+08	0.00000E+00	1.53854E+07	-8.37806E+06	-2.52615E+06	-6.89306E+01	-1.43645E+08	-2.51399E+08	0.00000E+00	1.53854E+07	-8.37806E+06	-2.52615E+06	-6.89306E+01
P_0	0.00000E+00	0.00000E+00	3.10792E+09	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	-3.10805E+09	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
M_{X_0}	4.21577E+07	1.53854E+07	0.00000E+00	7.60412E+06	1.83131E+06	-6.63312E+05	5.93986E+01	-4.21577E+07	-1.53854E+07	0.00000E+00	-2.22176E+06	-7.57037E+05	6.63312E+05	-4.94734E+01
M_{Y_0}	1.53854E+07	-8.37806E+06	0.00000E+00	1.83131E+06	1.58887E+06	-2.23042E+05	3.48063E+01	-1.53854E+07	8.37806E+06	0.00000E+00	-7.57037E+05	2.64847E+05	-2.23042E+05	-1.88929E+01
T_0	-1.11619E+07	-2.52615E+06	0.00000E+00	-6.63312E+05	-2.23042E+05	3.48063E+01	6.33818E+03	1.11619E+07	2.52615E+06	0.00000E+00	-6.63312E+05	-2.23042E+05	3.48063E+01	6.33818E+03
M_{X_0}	1.36986E+02	-6.89306E+01	0.00000E+00	5.93986E+01	3.48063E+01	6.33818E+03	7.6968E+02	-1.36986E+02	6.89306E+01	0.00000E+00	-4.94734E+01	-1.88929E+01	-6.33818E+03	1.98431E+02
S_{X_1}	-7.23359E+08	-1.43645E+08	0.00000E+00	-4.21577E+07	-1.53854E+07	1.11619E+07	-1.36986E+02	1.32596E+09	3.56682E+08	0.00000E+00	-1.61296E+07	2.07144E+06	-1.84074E+07	-4.69317E+01
S_{Y_1}	-1.43645E+08	-2.51399E+08	0.00000E+00	-1.53854E+07	8.37806E+06	2.52615E+06	6.89306E+01	3.56682E+08	5.93986E+08	0.00000E+00	2.07144E+06	8.46555E+06	-4.76851E+06	-3.13934E+01
P_1	0.00000E+00	0.00000E+00	-3.10805E+09	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	5.91542E+09	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
M_{X_1}	4.21577E+07	1.53854E+07	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	5.91542E+09	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
M_{Y_1}	1.53854E+07	-8.37806E+06	0.00000E+00	-2.22176E+06	-7.57037E+05	-6.63312E+05	-4.94734E+01	-1.61296E+07	2.07144E+06	0.00000E+00	1.9419E+07	3.71483E+06	3.62147E+05	6.80032E+01
T_1	1.11619E+07	2.52615E+06	0.00000E+00	6.63312E+05	2.23042E+05	-3.48063E+01	-6.33818E+03	2.07144E+06	8.46555E+06	0.00000E+00	3.71483E+06	3.12780E+06	2.69717E+03	5.88802E+01
M_{X_1}	1.36986E+02	-6.89306E+01	0.00000E+00	-4.94734E+01	-1.88929E+01	6.33818E+03	7.6968E+02	-1.84074E+07	-4.76851E+06	0.00000E+00	3.62147E+05	2.69717E+03	5.43830E+05	-3.22359E+03
M_{Y_1}	1.36986E+02	-6.89306E+01	0.00000E+00	-4.94734E+01	-1.88929E+01	6.33818E+03	7.6968E+02	-4.69317E+01	-3.13934E+01	0.00000E+00	6.80032E+01	5.88802E+01	-3.22359E+03	8.06774E+02

表2b 翼断面梁(図3)全剛性マトリックス(回転)—その2

	U_1	V_1	W_1	Θ_{X_1}	Θ_{Y_1}	Φ_1	φ_1	U_2	V_2	W_2	Θ_{X_2}	Θ_{Y_2}	Φ_2	φ_2
S_{X_1}	*	*	*	*	*	*	*	-6.02598E+08	-2.13037E+08	0.00000E+00	2.60281E+07	1.74569E+07	7.24555E+06	9.00541E+01
S_{Y_1}	*	*	*	*	*	*	*	-2.13037E+08	-2.86029E+08	0.00000E+00	1.74569E+07	8.74892E+04	2.24248E+06	-1.00324E+02
P_1	*	*	*	*	*	*	*	0.00000E+00	0.00000E+00	-2.80758E+09	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
M_{X_1}	*	*	*	*	*	*	*	-2.60281E+07	-1.74569E+07	0.00000E+00	-1.43154E+06	-8.52151E+05	3.01164E+05	-1.12439E+01
M_{Y_1}	*	*	*	*	*	*	*	-1.74569E+07	-8.74892E+04	0.00000E+00	-8.52151E+05	-1.65256E+05	2.20344E+05	-1.10734E+01
T_1	*	*	*	*	*	*	*	7.24555E+06	2.24248E+06	0.00000E+00	-3.01164E+05	-2.20344E+05	-1.97421E+05	3.11459E+03
M_{X_1}	*	*	*	*	*	*	*	-9.00541E+01	1.00324E+02	0.00000E+00	-1.12439E+01	-1.10734E+01	-3.11459E+03	7.68464E+01
S_{X_2}	-6.02598E+08	-2.13037E+08	0.00000E+00	-2.60281E+07	-1.74569E+07	7.24555E+06	-9.00541E+01	9.58459E+08	4.18788E+08	0.00000E+00	-1.14319E+07	-3.50187E+06	-1.07851E+07	-5.34995E+01
S_{Y_2}	-2.13037E+08	-2.86029E+08	0.00000E+00	-1.74569E+07	8.74892E+04	2.24248E+06	1.00324E+02	4.18788E+08	5.22191E+08	0.00000E+00	-3.50187E+06	6.39948E+06	-4.05926E+06	6.77047E+01
P_2	0.00000E+00	0.00000E+00	-2.80758E+09	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	4.81812E+09	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
M_{X_2}	2.60281E+07	1.74569E+07	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	1.00000E+00	0.00000E+00	4.81812E+09	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
M_{Y_2}	1.74569E+07	-8.74892E+04	0.00000E+00	-1.43154E+06	-8.52151E+05	-3.01164E+05	-1.12439E+01	-1.14319E+07	-3.50187E+06	0.00000E+00	6.54810E+06	3.34165E+06	1.66728E+05	8.10897E+00
T_2	7.24555E+06	2.24248E+06	0.00000E+00	-8.52151E+05	-1.65256E+05	-2.20344E+05	-1.10734E+01	-3.50187E+06	6.39948E+06	0.00000E+00	3.34165E+06	2.90184E+06	7.80562E+04	3.14498E+01
M_{X_2}	1.36986E+02	-6.89306E+01	0.00000E+00	-4.94734E+01	-1.88929E+01	6.33818E+03	7.6968E+02	-1.07851E+07	-4.05926E+06	0.00000E+00	1.66728E+05	7.80562E+04	2.76069E+05	-2.09163E+03
M_{Y_2}	1.36986E+02	-6.89306E+01	0.00000E+00	-4.94734E+01	-1.88929E+01	6.33818E+03	7.6968E+02	-5.34995E+01	6.77047E+01	0.00000E+00	8.10897E+00	3.14498E+01	-2.09163E+03	3.08157E+02

表2c 翼断面梁(図3)全剛性マトリックス(回転)—その3— $K_{12}^{(3)}$ $K_{21}^{(3)}$ $K_{22}^{(3)}$

	U_2	V_2	W_2	Θ_{Y2}	Φ_2	φ_2	U_3	V_3	W_3	Θ_{Y3}	Φ_3	φ_3
S_{X2}	*	*	*	*	*	*	-3.55861E+08	-2.05752E+08	0.00000E+00	1.45963E+07	1.39550E+07	3.53957E+06
S_{Y2}	*	*	*	*	*	*	-2.05752E+08	-2.36298E+08	0.00000E+00	1.39550E+07	6.48697E+06	1.81702E+06
P_2	*	*	*	*	*	*	0.00000E+00	0.00000E+00	-2.00437E+09	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
M_{X2}	*	*	*	*	*	*	-1.45963E+07	-1.39550E+07	0.00000E+00	-4.90885E+05	-4.62031E+05	1.34436E+05
M_{Y2}	*	*	*	*	*	*	-1.39550E+07	-6.48697E+06	0.00000E+00	-4.62031E+05	-2.22397E+05	-3.02624E+00
T_2	*	*	*	*	*	*	3.53957E+06	1.81702E+06	0.00000E+00	-1.34436E+05	-1.42288E+05	-7.87673E+04
$M_{\omega 2}$	*	*	*	*	*	*	-3.65546E+01	3.26193E+01	0.00000E+00	-1.58299E+00	-3.02624E+00	-1.02296E+03
S_{X3}	-3.55861E+08	-2.05752E+08	0.00000E+00	-1.45963E+07	3.53957E+06	-3.65546E+01	3.55861E+08	2.05752E+08	0.00000E+00	-1.45963E+07	-1.39550E+07	-3.53957E+06
S_{Y3}	-2.05752E+08	-2.36298E+08	0.00000E+00	-1.39550E+07	1.81702E+06	3.26193E+01	2.05752E+08	2.36241E+08	0.00000E+00	-1.39550E+07	-6.48697E+06	-1.81690E+06
P_3	0.00000E+00	0.00000E+00	-2.00437E+09	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	2.00432E+09	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
M_{X3}	1.45963E+07	1.39550E+07	0.00000E+00	-4.90885E+05	-1.34436E+05	-1.58299E+00	-1.45963E+07	-1.39550E+07	0.00000E+00	2.21026E+06	1.45813E+06	1.34436E+05
M_{Y3}	1.39550E+07	6.48697E+06	0.00000E+00	-4.62031E+05	-1.42288E+05	-3.02624E+00	-1.39550E+07	-6.48697E+06	0.00000E+00	1.45813E+06	1.36297E+06	1.42288E+05
T_3	3.53957E+06	1.81702E+06	0.00000E+00	1.34436E+05	1.42288E+05	-7.87673E+04	-3.53957E+06	-1.81690E+06	0.00000E+00	1.34436E+05	1.42288E+05	7.87291E+04
$M_{\omega 3}$	3.65546E+01	-3.26193E+01	0.00000E+00	-1.58299E+00	1.02296E+03	2.23043E+01	-3.65546E+01	3.26193E+01	0.00000E+00	-4.95681E-01	7.37593E+00	-1.02296E+03

表3 翼断面梁(図3)慣性マトリックス

(a) $M_{11}^{(1)}$											
	U_0	V_0	W_0	Θ_{X0}	Θ_{Y0}	Φ_0	φ_0				
S_{X0}	9.57646E-01	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	1.45966E-02	0.00000E+00	S_{X1}	1.51764E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
S_{Y0}	0.00000E+00	9.57646E-01	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	1.29573E-03	0.00000E+00	S_{Y1}	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
P_0	0.00000E+00	0.00000E+00	9.57646E-01	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	P_1	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
M_{X0}	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	1.51236E-03	-3.98758E-04	0.00000E+00	0.00000E+00	M_{X1}	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
M_{Y0}	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	-3.98758E-04	2.02583E-04	0.00000E+00	0.00000E+00	M_{Y1}	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
T_0	1.45966E-02	1.29573E-03	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	1.71495E-03	0.00000E+00	T_1	2.16737E-02	4.03941E-04	0.00000E+00
$M_{\omega 0}$	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	3.47415E-08	$M_{\omega 1}$	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
(b) $M_{22}^{(1)} + M_{11}^{(2)}$											
	U_1	V_1	W_1	Θ_{X1}	Θ_{Y1}	Φ_1	φ_1				
S_{X1}	1.51764E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	2.16737E-02	0.00000E+00	S_{X2}	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
S_{Y1}	0.00000E+00	1.51764E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	4.03941E-04	0.00000E+00	S_{Y2}	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
P_1	0.00000E+00	0.00000E+00	1.51764E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	P_2	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
M_{X1}	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	2.08737E-03	-6.71585E-04	0.00000E+00	0.00000E+00	M_{X2}	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
M_{Y1}	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	-6.71585E-04	3.72177E-04	0.00000E+00	0.00000E+00	M_{Y2}	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
T_1	2.16737E-02	4.03941E-04	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	2.45955E-03	0.00000E+00	T_2	4.45236E-03	-8.06156E-04	0.00000E+00
$M_{\omega 1}$	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	4.35357E-08	$M_{\omega 2}$	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
(c) $M_{22}^{(2)} + M_{11}^{(3)}$											
	U_2	V_2	W_2	Θ_{X2}	Θ_{Y2}	Φ_2	φ_2				
S_{X2}	9.59788E-01	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	1.15295E-02	0.00000E+00	S_{X3}	3.99791E-01	0.00000E+00	0.00000E+00
S_{Y2}	0.00000E+00	9.59788E-01	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	-1.69794E-03	0.00000E+00	S_{Y3}	0.00000E+00	3.99791E-01	0.00000E+00
P_2	0.00000E+00	0.00000E+00	9.59788E-01	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	P_3	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
M_{X2}	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	8.44281E-04	-4.64324E-04	0.00000E+00	0.00000E+00	M_{X3}	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
M_{Y2}	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	-4.64324E-04	3.27584E-04	0.00000E+00	0.00000E+00	M_{Y3}	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
T_2	1.15295E-02	-1.69794E-03	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	1.17187E-03	0.00000E+00	T_3	4.45236E-03	-8.06156E-04	0.00000E+00
$M_{\omega 2}$	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	1.14935E-08	$M_{\omega 3}$	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
(d) $M_{22}^{(3)}$											
	U_3	V_3	W_3	Θ_{X3}	Θ_{Y3}	Φ_3	φ_3				
S_{X3}	3.99791E-01	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	4.45236E-03	0.00000E+00	S_{X4}	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
S_{Y3}	0.00000E+00	3.99791E-01	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	-8.06156E-04	0.00000E+00	S_{Y4}	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
P_3	0.00000E+00	0.00000E+00	3.99791E-01	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	P_4	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
M_{X3}	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	2.69270E-04	-1.91497E-04	0.00000E+00	0.00000E+00	M_{X4}	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
M_{Y3}	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	-1.91497E-04	1.57990E-04	0.00000E+00	0.00000E+00	M_{Y4}	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
T_3	4.45236E-03	-8.06156E-04	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	4.27260E-04	0.00000E+00	T_4	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
$M_{\omega 3}$	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	2.69932E-09	$M_{\omega 4}$	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00