バイスペクトルによる非線形振動系の同定*

松本 宏 行^{*1}, 山 川 新 二^{*2}

Identification of Nonlinear Vibration System by Bispectrum Analysis

Hiroyuki MATSUMOTO and Shinji YAMAKAWA

The authors propose in this paper a statistical method to identify nonlinear systems subjected to random vibration with the higher-order spectra (HOS). The authors calculate autobispectra and crossbispectra of input and output signals first, and then estimate amplitudes of the fundamentals and phase relations between them. Coefficients of polynomials which represent nonlinear restoring and damping forces are finally obtained from those amplitudes and phase relations. A mathematical expression management program "REDUCE" is used to determine mutual relationships among the coefficients. These analyses are executed on simulation data.

Key Words: Nonlinear Vibration, Identification, Random Vibration, Spectrum Analysis, Algebraic Manipulation

1. は じ め に

本論文では、非線形系不規則振動における特性を同定する一手法として、高次スペクトルの一つである、バイスペクトル解析⁽¹⁾による統計的な同定法を提案する。

目的としては、主に二つに分けられる。

一つは、非線形系のモデルの表現についてである。実際に、対象とする振動系の同定を行う場合、既存のモデルからの類推あるいはノウハウなどを元に経験からモデルづくりが行われてきたように思える。しかし、そのような経験が役立たないような未知のモデルあるいは、複雑なモデルではその取扱いに限界が生ずると考える。対象とする構造物の特性が未知の場合に、一定のデータ処理を行うことにより、特性を把握する手がかりとなる、あるいは現象を明らかにすることが可能な処理方法の開発、そのモデルの構築が必要となる。今回の報告では、非線形系が不規則振動を受ける場合におけるそのモデルとして、減衰力およびばねに

よる復元力ともにそれぞれ、速度および変位の多項式で表現したモデルを採用する⁽²⁾。このモデル化を行うことで、非線形系のかなりの部分は近似的に表現できると考える。

二つめとして、非線形振動系における同定においてバイスペクトル解析の有効性を提示することにある。従来、不規則入力を受ける振動系の同定は、ほとんど線形系あるいは線形系に置き換えて取扱われてきた。

しかし、一般に、非線形性を有する振動系を通過するガウス性の不規則振動の特性は、くせのある、いわゆる非ガウス性の特性を持つ応答となる。未知な非線形系の構造すなわち、減衰力、復元力の特性を同定するには、観測した振動データの統計的特性を把握することが重要である。従来の線形系で広く利用されているパワースペクトル解析は、二次までの統計量について議論しているにすぎない。実際に機械構造物に存在する現象は、非線形特性を有するものが多く、それらの有意な特性を把握するには、よりいっそうの詳細な解析が必要となる。

一般に、非ガウス性を有するデータは、三次以上の統計量が含まれることから、高次スペクトルを用いた統計的手法を導入する。なかでも、バイスペクトルは三次のスペクトルであり、二つの周波数成分間の従属

* 原稿受付 1994年9月16日。

^{*1} 准員、工学院大学大学院 (〒163-91 東京都新宿区西新宿1-24-2)。

^{*2} 正員、工学院大学工学部。

性を表現し、非線形系での高調波振動に代表される特性を把握することが可能である。

バイスペクトルに関連した研究は、波浪⁽³⁾、歯車の異常音の検出⁽⁴⁾、低 S/N 信号の軸受の解析⁽⁵⁾、路面走行時の自動車の車軸の上下加速度の波形の把握⁽⁶⁾など、主に対象とする系から得られたデータの振幅、位相の従属関係を解析したものが多い。入出力を考慮した、すなわちクロスバイスペクトルを用いて非線形伝達特性を解析し、系の同定を行った報告はあまりなされていないようである。

非対称形非線形特性を有する振動系を対象として、非ガウス性を考慮した同定手法である、バイスペクトル解析の適用を行い、その可能性を数値シミュレーションにおいて示した。以上がこの研究の目的および主な構成である。

2. 理 論

2.1 バイスペクトル解析 バイスペクトルとは、二つの周波数のスペクトルという意味であり、着目している周波数成分間の位相関係を表現する。取扱う時間データ $y(t)$ に対して、三次の自己相関関数 $C(\tau_1, \tau_2)$ およびオートバイスペクトル $B(f_1, f_2)$ は、以下の式で定義される。

$$C(\tau_1, \tau_2) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} y(t) y(t + \tau_1) y(t + \tau_2) dt \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$B(f_1, f_2) = \int_{-\infty}^{\infty} C(\tau_1, \tau_2) \exp[-j2\pi(f_1\tau_1 + f_2\tau_2)] d\tau_1 d\tau_2 \quad \dots\dots\dots (2)$$

すなわち、バイスペクトルは、三次の相関関数を二次元フーリエ変換することで求められる。あるいは、式(3)のように時系列を直接フーリエ変換し、三次積で表現することもできる。

$$B_{YYY}(f_1, f_2) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} E$$

$$\times [Y(f_1) Y(f_2) Y^*(f_1 + f_2)] \quad \dots\dots\dots (3)$$

ここで、* は、複素共役を示す。

バイスペクトルは、二つの周波数の従属関係を表す複素数の関数である。

オートバイスペクトルについては、取扱う時間データが実数であり、定常という仮定のもとで対称性が成立する。全体の領域を考慮する必要はなく、図1に示す12分割された範囲のうち、任意の一つの範囲を算出すればすべてを求めたのと等価になる。しかし、クロスバイスペクトルの場合は、非対称となる場合もあるので注意する必要がある。

また、入出力の伝達特性を考慮した二次のスペクトルであるクロスパワースペクトルが定義されたのと同様な考え方から、クロスバイスペクトルも定義することができる。入出力の組合せにより六とおりの表現が得られるが、ここでは、そのうちの2種類のクロスバイスペクトルの定義を示す。

$$B_{XYX}(f_1, f_2) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} E \times [X(f_1) Y(f_2) Y^*(f_1 + f_2)] \quad \dots\dots\dots (4)$$

$$B_{XXY}(f_1, f_2) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} E \times [X(f_1) X(f_2) Y^*(f_1 + f_2)] \quad \dots\dots\dots (5)$$

実際には、取扱うデータの成分間の従属性をいかに考慮するかにより、クロスバイスペクトルの種類が選択されると思われる。ここで、バイスペクトルの結果を判断するときに、取扱うデータの絶対的な大きさに依存しないように、また統計的にどの程度意味があるか判断する必要がある。バイスペクトルの大きさをその関係する成分であるパワースペクトルで割ったものを次に示すひずみ度関数で定義する。

$$S_{YYY}(f_1, f_2) = \frac{B_{YYY}(f_1, f_2)}{\sqrt{P_{YY}(f_1) P_{YY}(f_2) P_{YY}(f_1 + f_2)}} \quad \dots\dots\dots (6)$$

ひずみ度関数の値の大小により、位相の従属関係の有無の判断ができることから、これらの一つの尺度となることがわかる。

2.2 バイスペクトル解析の計算 バイスペクトルが具体的にどのような条件で値を持つかは、複合正弦波の場合について示すことができる。ここでは、クロスバイスペクトルの場合も含めて示すことにする。

例えば、対象とするデータ $y(t)$ が、以下の式で表されるとする。

$$y(t) = B_1 \sin(2\pi ft) + A_2 \cos(2\pi(2f)t) \quad \dots\dots (7)$$

オートバイスペクトル $B_{YYY}(f_1, f_2)$ は $-B_1^2 A_2 / 8$ となる。

図1 バイスペクトルの領域(対称性)

ある周波数に関して、入力および出力を次のように仮定する。

$$x(t) = F \sin(2\pi ft) \quad \dots\dots\dots (8)$$

$$y(t) = \sum_{k=0}^{N=3} A_k \cos(2k\pi ft) + \sum_{k=0}^{N=3} B_k \sin(2k\pi ft) \quad \dots\dots\dots (9)$$

入出力データより、クロスバイスペクトルは以下のように値を持つことがわかる。

$$\text{Re}[B_{xy}(f, f)] = -\frac{F^2 A_2}{8} \quad \dots\dots\dots (10)$$

$$\text{Im}[B_{xy}(f, f)] = -\frac{F^2 B_2}{8} \quad \dots\dots\dots (11)$$

$$\text{Re}[B_{xy}(f, 2f)] = \frac{A_2 B_3 - A_3 B_2}{8} \quad \dots\dots\dots (12)$$

$$\text{Im}[B_{xy}(f, 2f)] = -\frac{A_2 A_3 + B_2 B_3}{8} \quad \dots\dots\dots (13)$$

これらの式からわかるように、対象とする系において基本波に対して二次波成分の位相関係が存在するとき、オートバイスペクトル並びにクロスバイスペクトルとも値を持つことがわかる。

また反対に、バイスペクトルが値を持たないのは、対象とする系が線形か、あるいは偶数次の成分が存在しない奇数次成分のみを有する対称形非線形特性の場合である。

しかし、実際の系では奇数次のみを有することは少なく、多くの場合はバイスペクトル解析により、広いクラスの非線形系特性の把握が可能であると予想される。

2・3 バイスペクトルの推定 バイスペクトルおよびクロスバイスペクトルの推定方法の説明をする。定義どおりに三次の自己相関関数(相関変換法)から二次元のフーリエ変換を行うと、計算時間が増大する。また、実際にバイスペクトルで注目している部分は、バイスペクトル全領域の中のある断面であり、部分的に推定の可能な直接FFTを行い、三次積により推定する方法が適していると思われる。

図2 バイスペクトル推定のための二次元スペクトル窓

また、パワースペクトル、クロスパワースペクトルの推定のとき、FFTによる直接法を用いると、統計的誤差が問題となった。その誤差を防ぐ方法として、集合平均や周波数領域による平滑化が行われた。

バイスペクトルの推定の場合も同様に、生のバイスペクトルは統計的誤差が問題となるので、二次元のスペクトル窓を用いて、周波数領域による平滑化を行い、平滑化したバイスペクトルを同定手法に利用した。

バイスペクトルの二次元窓の具体的な形は、図2のように45度方向を軸方向として六角形の範囲で一様な重みを掛けて平均している。

3. 同定手法

同定手法は、二つの部分で構成される。はじめに、入出力データより基本波および高調波成分をパワースペクトル、バイスペクトル解析により推定する。次に、求められた周波数成分より、調和バランス法の考えを利用して各パラメータを決定する。以下、順に説明する。

3・1 各周波数成分の推定 基本波成分および高調波成分の推定はパワースペクトルならびに、クロスバイスペクトルから求めることができる。例えば、入出力の時系列を用いて、推定される基本波と二次波はそれぞれ以下になる。

$$A_1 = \frac{-2 \text{Im}[P_{xy}(f)]}{\sqrt{P_{xx}(f)}} \quad \dots\dots\dots (14)$$

$$B_1 = \frac{2 \text{Re}[P_{xy}(f)]}{\sqrt{P_{xx}(f)}} \quad \dots\dots\dots (15)$$

$$A_2 = \frac{-2 \text{Re}[B_{xy}(f, f)]}{P_{xx}(f)} \quad \dots\dots\dots (16)$$

$$B_2 = \frac{-2 \text{Im}[B_{xy}(f, f)]}{P_{xx}(f)} \quad \dots\dots\dots (17)$$

別の方法として、応答時系列を基準にして、パワースペクトルおよびオートバイスペクトルの推定から各

図3 1自由度非線形振動系

周波数成分の推定を行うこともできる。

3.2 パラメータの当てはめ 得られた周波数特性についてパラメータを当てはめる。対象とする1自由度非線形振動系における線形項に相当する質量、減衰定数およびばね定数を m, c_1, k_1 とし、その系に外力 $f(t)$ を作用させたときの運動方程式を

$$m\ddot{y} + c_1\dot{y} + k_1y + N(y, \dot{y}) = f(t) \quad (18)$$

とおく。ここで $N(y, \dot{y})$ は非線形特性を表す。さらに、1自由度非線形振動系を減衰力およびばねによる復元力を速度および変位による多項式によるモデル化を行う。

$$m\ddot{y} + c_1\dot{y} + c_2\dot{y}^2 + c_3\dot{y}^3 + k_1y + k_2y^2 + k_3y^3 = f(t) \quad (19)$$

非線形特性は、対称性、非対称性を考慮にいと、べき級数すなわち多項式による表現をすることで、広いクラスの非線形特性を近似することが可能になると思われる。

よって、本論文で述べる不規則振動入力を受ける非線形振動系の同定問題は、バイスペクトル解析等で求められた周波数成分から、式(19)の係数を決定する問題になる。ここでは、調和バランス法の考え方をを用いて、非線形振動系の係数を決定する方法を採用した。

表 1 同定計算に使用したパラメータ

m	c_1	k_1	k_2	k_3
1.0	5.00	4.00E+3	-8.00E+5	0.0
kg	Ns/m	N/m	N/m ²	N/m ³

表 2 数値シミュレーションに使用したパラメータ

Sampling Time Δt	0.01sec
Samples Number N	1024 samples
Total time $T(=N \Delta t)$	10.24sec
Nyquist Frequency $f_n (= 1/2 \Delta t)$	50.0Hz
Bandwidth Frequency Δf	0.097 Hz

図 4 応答変位の時刻歴波形

その方法の概要を説明する。

ある周波数に関して、入力および出力を

$$f(t) = F \sin(2\pi ft) \quad (20)$$

$$y(t) = \sum_{k=0}^{N=3} A_k \cos(2k\pi ft) + \sum_{k=0}^{N=3} B_k \sin(2k\pi ft) \quad (21)$$

のように表現する。

式(20), (21)を式(19)に代入し、調和バランス法により、各周波数成分ごとの方程式を立てて、行列形式にまとめると以下ようになる。

$$[A][P] = \{F\} \quad (22)$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad (23)$$

$$\{P\} = \{m c_1 c_2 c_3 k_1 k_2 k_3\}^T \quad (24)$$

$$\{F\} = \{F_0 F_1 F_2 \cdots F_m\}^T \quad (25)$$

未知パラメータの数を式(22)に含まれる方程式に等しいか、あるいは多くすれば最小二乗法を用いて解くことが可能となる。

$$\{P\} = ([A]^T [A])^{-1} [A]^T \{F\} \quad (26)$$

なお、行列 A の各要素は、三角関数の計算が全計算の大部分を占める。三角関数の直交性あるいは、対称性をうまく利用して求めたとしても、符号や係数のまちがいのおそれがある。今回の計算には、数式処理システム REDUCE(Ver. 3.4)を利用して、行列 A の各要素の計算を実行した。

4. 数値シミュレーション

提案した同定手法の有効性を確認するため、数値シミュレーションを行い、バイスペクトル解析の有効性を確認した。

まず、非線形振動系に入力するガウス性ランダムデータを計算機上で作成する。作成方法は、一様乱数を正規乱数に変換する方法としてボックス・ミュラー法⁷⁾に従った。

ボックス・ミュラー法によって作成したガウス性ランダムデータを加振力とし、非線形系振動系に入力し、出力である変位の時刻歴応答を数値積分法により算出した。数値積分法は、ルンゲ・クッタ四次法を使用した。データ点数1024、時間刻みを0.01sとした。非線形系のパラメータは、質量は既知として($m=1.0$ kg)、表1に示すパラメータとした。

加振力および応答変位のデータから、パワースペクトル、バイスペクトル等の解析計算を実行した。数値シミュレーションに使用したパラメータを表2に示

す。

応答変位の時刻歴応答, オートパワースペクトルそしてコヒーレンス関数を図4, 5, そして図6に示す。

図4より, 応答変位の時刻歴波形は, 下向きにやや尖ったくせのある波形であることが観察される。また, 図6よりコヒーレンス関数は10 Hz および20 Hz 付近で大きく下へ落ち込み, 1より小さい値となっている。一般に, コヒーレンス関数が1より小さくなる要因の一つに, 入出力を関係づける系が線形でないことが挙げられる⁽⁸⁾が, このシミュレーション結果は, そのことを逆に裏付けるものであることがわかる。

次に, 応答変位のオートパイスベクトル $B_{YY}(f, f)$, および加振力と応答変位間のクロスパイスベクトル B_{XY} の計算結果を図7, 8に示す。

オートパイスベクトルの結果より, 10 Hz 付近で卓越したピークが観察される。図7の応答変位のオートパイスベクトル B_{YY} および図8の加振力と応答変位に関するクロスパイスベクトル B_{XY} のそれぞれについて共振周波数10 Hz 付近のピークをもとに, 10 Hz と20 Hz の従属関係が存在することが推定できる。

図5 応答変位のパワースペクトル

図6 コヒーレンス関数

なお, 図8の4.5 Hz 付近にクロスパイスベクトルの一つのピークが存在するが, これは4.5 Hz 付近に二次高調波も存在し, かつ9 Hz 付近の一次成分も存在するためその値が大きくなったものと考えられる。ただし, クロスパイスベクトルを基準化した相互ひずみ度関数 S_{XY} の値は, $S_{XY}(4.3, 4.3)=0.37$ と小さな値であり, このピークはそれぞれの成分の絶対値の大きさに依存したものと考えられる。共振周波数(9.7 Hz)では, 相互ひずみ度関数 S_{XY} は1に近い大きな

図7 応答変位に関するオートパイスベクトル

図8 加振力と応答変位に関するクロスパイスベクトル

図9 非線形系と線形系との比較(ひずみ度関数)

値となっており、基本波、二次波成分の高い従属性を表すものと判断できる。他のピークでは相互ひずみ度関数がこのような大きな値はないことがわかった。

また、非線形系と線形系($k_2=0$)のひずみ度関数の計算を実行した。図9からわかるように、線形系の場合のひずみ度関数はほとんど値を持たないことから、各周波数成分間に従属性がないことがわかる。これは、ひずみ度関数が周波数領域における非線形性の有無を判断⁽⁹⁾する一つの尺度として表せることを意味している。

これらの計算結果をもとに、パラメータ同定計算を行った。ここで、周波数成分の推定に関して、二通りの方法を用いた。それぞれ方法1, 2とし、以下に説明する。

方法1は、応答変位を基準にとり、パワースペクトル、オートバースペクトル B_{YY} などを用いて応答変位の基本波、二次波成分など各周波数成分を推定した。

方法2は、外力を基準にとり、応答変位に位相差を考慮してパワースペクトル、クロスパワースペクトルおよび、クロスバースペクトル B_{XY} を用いて式(14)から式(17)により共振周波数(約10 Hz)について応答変位の基本波、二次波成分など各周波数成分を推定した方法である。それぞれの方法で当てはめたパラメータの計算結果を表3に示す。

方法1については、変位応答の位相を基準に二次波成分の推定を行ったので、方法2と比べて当てはまりの良い結果となったのに対して、方法2は入力を基準にして、応答変位の二次波成分を推定したので、共振周波数付近で入力と応答の基本波の位相が90度ずれる現象を精度良く出していない結果だと思われる。

今回のシミュレーション計算は加振力とみなしたデータはガウス性を有するホワイトノイズであるが、さらに一般的な入力を取扱う場合には入出力相互の伝達特性を考慮する必要があるので、方法2による同定計算の精度向上が必要である。

5. おわりに

本研究では、不規則入力を受ける非線形振動系にお

表3 パラメータ同定計算結果

Item	m	c_1	k_1	k_2
True.	1.00	5.00	4.00E+3	-8.00E+5
Identified (Method 1)	1.00	5.97	3.78E+3	-8.79E+5
Identified (Method 2)	1.00	8.34	4.19E+3	-8.96E+5

ける新しい同定手法として、高次スペクトルの一つであるバースペクトル解析を用いて、数値シミュレーションを適用してその有効性を検討した。そのシミュレーション結果から次の結論を得ることができた。

(1) 非対称形非線形振動系を対象として、バースペクトル解析を適用した結果、基本波と二次波との位相関係を把握することが可能なことを示した。

(2) バースペクトル解析結果を用いて、各周波数成分からパラメータ同定計算を実行したところ、二つの方法ともほぼ妥当な結果を示すことができたが、一般入力を考慮すると、方法2による精度向上が必要であることがわかった。

(3) 周波数領域による非線形性の有無の判定にひずみ度関数による判定が可能であることを示した。

最後に、本研究のバースペクトル解析について、アドバイスをいただいた文部省統計数理研究所の北川源四郎教授に謝意を表す。

文 献

- (1) Bendat, J. S., *Nonlinear System Analysis & Identification from Random Data*, (1990), 108, Wiley-Interscience.
- (2) 安田・河村・渡辺, 機論, 53-495, C(1987), 2191.
- (3) Rosenblatt, M. and van Ness, J. W., *Annals Math. Statistics*, 36(1965), 1120.
- (4) 佐藤・佐々木, 機械の研究, 31-7(1979), 47.
- (5) 網田・久保木・北川, 機論, 57-539, C(1991), 2333.
- (6) 山川, 機論, 41-345(1975), 1394.
- (7) 清水・千葉, パソコンによるランダム信号処理, (1994), 340, 共立出版.
- (8) J. S.ベンダット, A. G.ピアソル共著(得丸・ほか5名訳), ランダムデータの統計的処理, (1976), 139, 培風館.
- (9) 長松, モード解析, (1985), 164, 培風館.