円板の境界条件の実験的同定法*
(線形の軸対称問題の場合)安田 仁彦^{*1}, 崔 勇 俊^{*2}Experimental Identification Technique for Boundary Conditions
of a Circular Plate
(Linear Axisymmetrical Problems)

Kimihiro YASUDA and Cui Yong JUN

As a basis for developing experimental identification techniques for boundary conditions of a plate, a technique applicable to a circular plate in linear axisymmetrical problems is proposed. The proposed technique enables one to determine, using data of dynamic responses of a plate, the boundary conditions in terms of spring constants, damping coefficients, and equivalent masses and moments of inertia. Numerical simulation is conducted, and the applicability of the proposed technique is confirmed.

Key Words: Vibration, Boundary Conditions, Circular Plate, Axisymmetrical Problem, Linear System, Dynamic Response

1. ま え が き

機械・機器・構造物の高速化, 高性能化, 軽量化に対する要求とともに, これらの対象物の動的問題に対する数学モデルを精度よく作成することがますます重要となってきた。このため, 理論的モデル化の結果と対象物の動的応答の実験データを融合して, よりよい数学モデルを作成しようとする実験的同定が大きな関心を呼んでいる。

実験的同定の問題のうち, 境界条件の同定については, 必要性は指摘されながら⁽¹⁾⁽²⁾, これを扱った研究は少ない。前報で著者の一人は, はりを対象にして, 本体の動的応答の実験データを用いて境界条件を同定する方法に関する基礎的検討を行った⁽³⁾。

この研究は, 板のような二次元的構造物の境界条件の同定の問題の基礎的検討を目的にする。このため簡単な場合として円板を取上げ, 軸対称問題に対して, 境界条件を実験的に同定する方法を提案する。前報のはりの場合と同じように, 境界部に外力を加えたり境

界部の応答を測定できない場合を想定する。数値シミュレーションにより, 提案した同定法の有効性を検討する。

2. 実験的同定法の提案

2・1 問題設定 機械・機器・構造物の構成要素としてしばしば円板が用いられる。いま円板単独での特性は既知であるが, 組立状態での円板の境界条件が未知のため, これを実験的に同定したいとする。

実験的同定のため, 図1に示すように, 境界部はたわみと傾きに対するばねとダンパでモデル化されるものとする。ばねは線形であるとし, たわみに対するばね定数を k_w , 傾きに対するばね定数を k_θ とおく。またダンパは粘性減衰を与えるものとし, たわみに対する減衰係数を c_w , 傾きに対する減衰係数を c_θ とおく。他の減衰, 例えば構造減衰が作用する場合にも以下と同じように扱うことができる。問題によっては境

Fig.1 Circular plate

* 原稿受付 1995年2月28日。

^{*1} 正員, 名古屋大学工学研究科 (〒464-01 名古屋市中種区不老町)。^{*2} 准員, 名古屋大学大学院。

境界部に等価な質量と慣性モーメントを考える必要があるので、これらを m および I とする。このとき境界条件の実験的同定とは、円板の動的応答の実験データを用いて、ばね定数 k_w, k_θ , 減衰係数 c_w, c_θ および等価な質量と慣性モーメント m, I の未知パラメータを定めることである。

実験的同定の前提として、境界部に外力を加えたり境界部の動的応答を測定することが困難な場合を想定し、円板の本体に外力を加えて得られる本体の動的応答の実験データのみが利用できるとする。

2.2 運動方程式とその解 実験的同定法の提案のため、円板の運動方程式とその解を考える。円板は密度 ρ , 縦弾性係数 E , ポアソン比 ν の材料からなり、半径 a , 厚さ h とする。静止時の円板の中心を原点 O とし、極座標 (r, θ) を定める。横方向の外力 f によってたわみ w を生じるものとする。軸対称問題では f, w はいずれも座標 r と時間 t の関数である。円板の本体に粘性減衰が作用する場合を考え、減衰係数を C とおく。このとき運動方程式は

$$D\nabla^4 w + C\frac{\partial w}{\partial t} + \rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = f \quad (1)$$

となる。ここに

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} \quad (2)$$

であり、また

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \quad (3)$$

である。

境界条件は、 $r=a$ において

$$\begin{aligned} D\frac{\partial}{\partial r}(\nabla^2 w) &= k_w w + c_w \frac{\partial w}{\partial t} + m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \\ D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{\nu}{r}\frac{\partial w}{\partial r}\right) &= -k_\theta \frac{\partial w}{\partial r} - c_\theta \frac{\partial^2 w}{\partial t \partial r} - I \frac{\partial^3 w}{\partial t^2 \partial r} \end{aligned} \quad (4)$$

が満たされることである。

外力として、角振動数 ω の調和外力

$$f = F(r) \cos \omega t \quad (5)$$

を作用させるものとする。ここに $F(r)$ は調和外力の大きさを表し、座標 r の関数である。このとき応答 w は

$$w = W(r) \cos \omega t + W^*(r) \sin \omega t \quad (6)$$

の形をとる。ここに $W(r), W^*(r)$ は座標 r の未知関数で、 r の位置における振幅の $\cos$ 成分、 $\sin$ 成分の振幅を表す。式(6)を式(1)に代入し、

$$\alpha^4 = \frac{\rho h \omega^2}{D}, \quad \beta^4 = \frac{C \omega}{D} \quad (7)$$

を導入すると、 $W(r), W^*(r)$ を定める式として

$$\nabla^4 W(r) + \beta^4 W^*(r) - \alpha^4 W(r) = \frac{F(r)}{D},$$

$$\nabla^4 W^*(r) - \beta^4 W(r) - \alpha^4 W^*(r) = 0 \quad (8)$$

を得る。この式の一般解を求めよう。

まず式(8)の右辺を零とおいて得られる同次方程式の一般解を求める。このため零次の円柱関数 Z_0 を用いて、求める解を

$$W(r) = AZ_0(\lambda r), \quad W^*(r) = A^*Z_0(\lambda r) \quad (9)$$

の形におく。ここに A, A^*, λ は定数である。これが解となるための条件は

$$\left. \begin{aligned} (\lambda^4 - \alpha^4)A + \beta^4 A^* &= 0 \\ -\beta^4 A + (\lambda^4 - \alpha^4)A^* &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

である。したがって

$$(\lambda^4 - \alpha^4)^2 + \beta^8 = 0 \quad (11)$$

が満たされるとき、式(9)は求める解となる。この式の根 λ は

$$\begin{aligned} \lambda &= \pm(a_0 + jb_0), \pm(b_0 - ja_0), \pm(a_0 - jb_0), \\ &\quad \pm(b_0 + ja_0) \end{aligned} \quad (12)$$

の形におくことができる。ここで a_0, b_0 は式(11)から容易に求められる。これらの根は、

$$\left. \begin{aligned} \rho_0 \cos \phi_1 &= a_0, \rho_0 \sin \phi_1 = b_0 \\ \rho_0 \cos \phi_2 &= b_0, \rho_0 \sin \phi_2 = a_0 \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

で定められる ρ_0, ϕ_1, ϕ_2 を用いて

$$\begin{aligned} \lambda &= \pm \rho_0 e^{+j\phi_1}, \pm \rho_0 e^{-j\phi_2}, \\ &\quad \pm \rho_0 e^{-j\phi_1}, \pm \rho_0 e^{+j\phi_2} \end{aligned} \quad (14)$$

の形におくこともできる。以下ここではこの形の根を用いる。これらの各根に対し、 A, A^* の比

$$\kappa = \frac{A^*}{A} = -\frac{\lambda^4 - \alpha^4}{\beta^4} \quad (15)$$

を求めると、前の2組、後の2組の根に対しそれぞれ

$$\kappa = -j, +j \quad (16)$$

を得る。以上から、 $r \rightarrow 0$ で特異とならない一般解として

$$\left. \begin{aligned} W(r) &= A_1 J_0(\rho_0 e^{j\phi_1} r) + A_2 J_0(\rho_0 e^{-j\phi_2} r) \\ &\quad + A_3 J_0(\rho_0 e^{-j\phi_1} r) + A_4 J_0(\rho_0 e^{j\phi_2} r) \\ W^*(r) &= -A_1 j J_0(\rho_0 e^{j\phi_1} r) - A_2 j J_0(\rho_0 e^{-j\phi_2} r) \\ &\quad + A_3 j J_0(\rho_0 e^{-j\phi_1} r) + A_4 j J_0(\rho_0 e^{j\phi_2} r) \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

を得る。ここに $A_i (i=1, 2, 3, 4)$ は任意定数である。この式で $J_0(\rho_0 e^{j\phi_1} r), J_0(\rho_0 e^{j\phi_2} r)$ などを実部と虚部分け、

$$\left. \begin{aligned} J_0(\rho_0 e^{\pm j\phi_1} r) &= u_{01}(r) \pm jv_{01}(r) \\ J_0(\rho_0 e^{\pm j\phi_2} r) &= u_{02}(r) \pm jv_{02}(r) \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

とおけば、式(17)は

$$\left. \begin{aligned} W(r) &= C_1 u_{01}(r) + C_2 v_{01}(r) \\ &\quad + C_3 u_{02}(r) + C_4 v_{02}(r) \\ W^*(r) &= -C_2 u_{01}(r) + C_1 v_{01}(r) \\ &\quad + C_4 u_{02}(r) - C_3 v_{02}(r) \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

となる。ここに $C_i (i=1, 2, 3, 4)$ は任意定数である。

次に式(8)の特解を求める。 $W(r)$, $W^*(r)$, $F(r)$ のハンケル変換を $\bar{W}(\xi)$, $\bar{W}^*(\xi)$, $\bar{F}(\xi)$ で表すと、式(8)から

$$\left. \begin{aligned} (\xi^4 - \alpha^4) \bar{W}(\xi) + \beta^4 \bar{W}^*(\xi) &= \frac{\bar{F}(\xi)}{D} \\ -\beta^4 \bar{W}(\xi) + (\xi^4 - \alpha^4) \bar{W}^*(\xi) &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (20)$$

を得る。したがって

$$\left. \begin{aligned} \bar{W}(\xi) &= \frac{\bar{F}(\xi)}{D} \frac{\xi^4 - \alpha^4}{(\xi^4 - \alpha^4)^2 + \beta^8} \\ \bar{W}^*(\xi) &= \frac{\bar{F}(\xi)}{D} \frac{\beta^4}{(\xi^4 - \alpha^4)^2 + \beta^8} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (21)$$

が得られ、特解として

$$\left. \begin{aligned} W(r) &= \frac{1}{D} \int_0^\infty \bar{F}(\xi) \frac{\xi^4 - \alpha^4}{(\xi^4 - \alpha^4)^2 + \beta^8} \xi J_0(\xi r) d\xi \\ W^*(r) &= \frac{1}{D} \int_0^\infty \bar{F}(\xi) \frac{\beta^4}{(\xi^4 - \alpha^4)^2 + \beta^8} \xi J_0(\xi r) d\xi \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (22)$$

を得る。 $\bar{F}(\xi)$ は、外力 $F(r)$ を与えればハンケル変換の定義式

$$\bar{F}(\xi) = \int_0^\infty r F(r) J_0(\xi r) dr \dots\dots\dots (23)$$

によって求められる。例えば半径 r_f 上で一定の値をとり、大きさが F_0 である調和外力に対しては

$$\bar{F}(\xi) = \frac{F_0}{2\pi} J_0(r_f \xi) \dots\dots\dots (24)$$

となる。この式で特に $r_f \rightarrow 0$ とすれば

$$\bar{F}(\xi) = \frac{F_0}{2\pi} \dots\dots\dots (25)$$

となる。これを用いれば、円板中心に集中外力が作用するときの特解は

$$\left. \begin{aligned} W(r) &= \frac{F_0}{2\pi D} \int_0^\infty \frac{\xi^4 - \alpha^4}{(\xi^4 - \alpha^4)^2 + \beta^8} \xi J_0(\xi r) d\xi \\ W^*(r) &= \frac{F_0}{2\pi D} \int_0^\infty \frac{\beta^4}{(\xi^4 - \alpha^4)^2 + \beta^8} \xi J_0(\xi r) d\xi \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (26)$$

となる。以下このような特解を $G(r)$, $G^*(r)$ とおく。

以上から、式(8)の一般解は

$$\left. \begin{aligned} W(r) &= C_1 u_{01}(r) + C_2 v_{01}(r) + C_3 u_{02}(r) \\ &\quad + C_4 v_{02}(r) + G(r) \\ W^*(r) &= -C_2 u_{01}(r) + C_1 v_{01}(r) + C_4 u_{02}(r) \\ &\quad - C_3 v_{02}(r) + G^*(r) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (27)$$

となる。定数 $C_i (i=1, 2, 3, 4)$ は境界条件によって定められる。

2・3 実験的同定法 以上によって準備が整ったので、円板の動的応答の実験データから、円板の境界条件を同定する方法を考える。前述のように円板の特性はあらかじめ測定されているとする。

実験的同定のため、式(5)の形の調和外力を円板に作用させる。角振動数 ω と大きさ $F(r)$ は適当に定める。円板の N 個の点 $r=r_i (i=1, 2, \dots, N)$ において、この外力に対する定常状態の動的応答のたわみの $\cos$ 成分、 $\sin$ 成分の振幅を測定し、その値を $W(r_i)$, $W^*(r_i)$ とおく。これは式(27)を満たしているから

$$\left. \begin{aligned} u_{01}(r_i) C_1 + v_{01}(r_i) C_2 + u_{02}(r_i) C_3 + v_{02}(r_i) C_4 \\ = W(r_i) - G(r_i) \\ -u_{01}(r_i) C_2 + v_{01}(r_i) C_1 + u_{02}(r_i) C_4 - v_{02}(r_i) C_3 \\ = W^*(r_i) - G^*(r_i) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (28)$$

が成り立つ。これは $C_i (i=1, 2, 3, 4)$ に関する線形方程式である。したがって測定点の数 N を2として、 $r=r_1, r_2$ に対して式(28)の方程式を連立させて解けば、 C_i を定めることができる。実際には測定データにノイズが含まれることを考慮して、 N を2より大きくした場合のデータを用いて、式(28)の形の方程式に最小二乗法を適用して C_1, C_2, C_3, C_4 を定める。それらを式(27)に代入して $W(r)$, $W^*(r)$ を定める。この結果を式(6)に代入して w を定め、それを式(4)に代入して両辺の $\cos$ 成分、 $\sin$ 成分の係数を等しいと置いて、境界条件の未知パラメータに関する方程式を得る。円板に作用させる調和外力の大きさ $F(r)$ を変えて同じようにして方程式を求め、未知パラメータに関する十分な数の方程式を求める。このようにして得られる連立方程式に再び最小二乗法を適用して未知パラメータを定める。もし未知パラメータが角振動数 ω に依存しないと考えられる場合には、 ω を変えて得られる方程式も含め最小二乗法を適用する。以上が提案する同定法である。

3. 数値シミュレーション

2章で提案した実験的同定法の有効性を、数値シミュレーションによって確かめることにする。このため、数値的に得た動的応答のデータを実験データとみなし、このデータを用いて提案した同定法によって未知パラメータを定め、パラメータのものと値と比較する方法をとる。

数値計算のため、円板の諸元を

$$\left. \begin{aligned} \text{半径 } a &= 200 \text{ mm} \\ \text{厚さ } h &= 0.3 \text{ mm} \\ \text{縦弾性係数 } E &= 2.06 \times 10^{11} \text{ Pa} \\ \text{密度 } \rho &= 7.84 \times 10^3 \text{ kg/m}^3 \\ \text{減衰係数 } C &= 1 \text{ Ns/m}^2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (29)$$

とする。

3・1 境界部の等価質量, 等価慣性モーメントを考慮する必要がない場合 境界部が軽いものからできている場合のように, 境界部の等価質量や等価慣性モーメントを考慮する必要がない場合をはじめに考える。

数値シミュレーションのため, 境界におけるパラメータの値を

$$\left. \begin{aligned} k_w &= 1 \times 10^4 \text{ N/m}, k_\theta = 6 \times 10^2 \text{ Nm/rad} \\ c_w &= 5 \text{ Ns/m}, c_\theta = 3 \text{ Nms/rad} \end{aligned} \right\} \dots (30)$$

と定める。また外力は円板中心に作用する集中調和外力とし, その大きさ F_0 を

$$F_0 = 0.1 \text{ N} \dots (31)$$

とする。

動的応答の数値例として, 外力の振動数 ω を $\omega =$

Fig. 2 Response of circular plate ($\omega = 105 \text{ rad/s}$)

Fig. 3 Points of measurement

105 rad/s とした場合に得られた結果を示すと図2のようになった。図2は, 周期 T を8等分した各時刻における円板のたわみを横軸に r をとって示したものである。このような動的応答を実験データとみなす。

応答の測定点を, 図3に示すように, 円板の中心および半径を4等分する三つの分割点をあわせた四つの点 r_i ($i=1, 2, 3, 4$) とする。

同定に用いる外力の角振動数 ω を定めるため, ω を 0 rad/s から 400 rad/s の範囲で変化させて応答を求めた。例として点 r_3 におけるたわみの振幅 $(W)_3$ を ω

Fig. 4 Amplitude at point r_3

Fig. 5 Deflection at points of measurement

Table 1 Value of C_i ($i=1, 2, 3, 4$)

C_1	-3.2852×10^{-3}
C_2	-2.5302×10^{-3}
C_3	-2.4656×10^{-4}
C_4	1.8815×10^{-4}

Table 2 Results of identification

Parameters	Original	Identified
$k_w(\text{N/m})$	1.0×10^4	1.0000×10^4
$k_\theta(\text{Nm/rad})$	6.0×10^2	6.0000×10^2
$c_w(\text{Ns/m})$	5.0	5.0000
$c_\theta(\text{Nms/rad})$	3.0	2.9999
$m(\text{kg})$	0.0	3.50×10^{-15}
$I(\text{kgm}^2)$	0.0	-2.75×10^{-14}

Table 3 Value of C_i ($i=1, 2, 3, 4$)

C_1	9.3682×10^{-5}
C_2	-2.0641×10^{-5}
C_3	-6.9503×10^{-6}
C_4	3.6718×10^{-6}

Table 4 Results of identification

Parameters	Original	Identified
$k_w(\text{N/m})$	1.0×10^4	9.9999×10^3
$k_\theta(\text{Nm/rad})$	6.0×10^2	6.0000×10^2
$c_w(\text{Ns/m})$	5.0	5.0000
$c_\theta(\text{Nms/rad})$	3.0	3.0000
$m(\text{kg})$	1.0×10^1	9.9999
$I(\text{kgm}^2)$	1.0×10^2	1.0000×10^2

の関数として示すと図4のようになった。この図から、円板の共振点は103 rad/sと288 rad/sの付近にあることがわかる。そこでここでは、1次の共振点付近の105 rad/sを同定に用いる外力の角振動数とする。

この角振動数に対して、各測定点におけるたわみの時間変化を求めたところ図5のようになった。図の w_i ($i=1, 2, 3, 4$)は点 $r=r_i$ におけるたわみを表す。このデータから、振動のcos成分とsin成分を求めたところ図6のようになった。この図で W_i, W_i^* は $W(r_i)$, $W^*(r_i)$ を表し、また右肩の正負の符号は各成分の値の正負を示す。この結果を式(28)に代入し、 C_i ($i=1, 2, 3, 4$)を求めたところ、表1のような結果が得られた。これを式(27)に代入し、その結果を式(6)に代入し、さらにそれを式(4)に代入して未知パラメータを

Fig. 6 cos and sin components of deflection

Fig. 7 Amplitude at point r_3

定めたところ、表2のような結果が得られた。表から、同定によるパラメータの値は式(30)で与えられるものと値と一致し、したがって提案した同定法が有効であることがわかった。

3.2 境界部の等価質量、等価慣性モーメントを考慮する必要がある場合 ここでは境界部の等価質量、等価慣性モーメントを考慮する必要がある、一般の場合を取上げる。

数値シミュレーションのため円板の諸元、外力、応答の測定位置などは3.1節と同じとする。境界におけるパラメータのうち $k_w, k_\theta, c_w, c_\theta$ は3.1節と同じ値とし、等価質量 m 、等価慣性モーメント I を

$$m=10 \text{ kg}, I=100 \text{ kg}\cdot\text{m}^2 \dots\dots\dots (32)$$

と定める。

以上の場合に、例えば $r=r_3$ の位置における円板のたわみの振幅 $(W)_3$ は図7のようになった。同定に用いる外力の角振動数は前と同じ $\omega=105 \text{ rad/s}$ とした。前と同じ取扱いによって定数 C_i ($i=1, 2, 3, 4$)を定めたところ、表3に示す結果を得た。これを用いて境界

部の未知パラメータを求めたところ、表4のような結果を得た。表から、同定によるパラメータはもとの値によく一致し、したがってこの場合にも提案した同定法が有効であることがわかった。

4. む す び

境界条件の実験的同定法の基礎的な検討を目的として円板を取上げ、軸対称問題に対して、境界条件を同定する新しい方法を提案した。提案した同定法は、境界部をばね、ダンパおよび等価な質量と慣性モーメン

トで置き換え、それらの大きさを、円板の本体の調和外力に対する動的応答のデータを用いて定めるものである。数値シミュレーションによって、提案した同定法が有効であることを確認した。

文 献

- (1) 田中・三枝, 振動モデルとシミュレーション, (1984), 281, 応用技術出版.
- (2) 長松・大熊, 部分構造合成法, (1991), 26, 培風館.
- (3) 安田・後藤, はりの境界条件の実験的同定法(境界条件が線形の場合), 機論, 60-570, C(1994), 482-489.