周波数領域におけるモード特性同定法の研究*

(第1報, 線形項と非線形項の分離)

岩原光男^{*1}, 長松昭男^{*2}

Research for Identification of Modal Parameters in Frequency Domain (1st Report, Separation of Linear Parameters and Nonlinear Parameters)

Mitsuo IWAHARA and Akio NAGAMATSU

Only the natural frequencies and the modal damping ratios are the unknown parameters in the iterative process, and the natural modes and the residual terms are determined from these unknown parameters. The number of unknown parameters is smaller, and convergence of solution in the iterative process is better in the presented approach than in the conventional one. It is clarified by simulation that the presented approach is especially useful in cases where many data are referred to simultaneously.

Key Words: Experimental Modal Analysis, Free Vibration, Fast Fourier Transform, Frequency Response Function

1. 緒言

実験モード解析におけるモード特性の同定を大きく分類すると時間領域における方法と周波数領域における方法とになる⁽¹⁾。両者共に多くの方法を含むが、それらの中でVan Loonによって提案された周波数領域法は⁽²⁾、日本では偏分反復法と呼ばれ、特に広く使用されている⁽³⁾。この方法の特徴は、単に線形方程式を解く操作を繰り返すことにより正確なモード特性が得られることである。しかし、全モード特性の初期値が必要であり、また発散のため解が得られない場合がある。特に変数が増加する多点参照の場合には、初期値の決定に手間がかかる、収束性が悪化する、計算時間がかかる、という欠点を有する。

上述のLoonによる方法の欠点を是正するモード特性同定法が、一般粘性減衰の仮定の下で鄭等により提案されている⁽⁴⁾。本報告では、この手法の有効性を検証し、一般ヒステリシス減衰に拡張し、さらに幾つかの改良と考察を加える。

モード特性は線形項と非線形項とに分けられる。前

者は固有モード、剰余剛性、剰余質量であり、後者は固有振動数とモード減衰率である。本方法では、重みつき残差2乗和の最小条件を導入することにより、線形項を非線形項の関数として表現している。そのために、求めるべき未知数は非線形項だけになり、Loonの方法よりその数が大幅に縮小できる。またこの関数を用いれば、線形項の初期値が非線形項の初期値から求められるので、前者の初期値は不必要になる。後者の初期値の決定は前者よりはるかに簡単なので、これは本手法の大きい利点になる。また本手法は、多点参照において、未知数の数が単点参照と変わらないことから、計算時間の面でLoonの方法よりはるかに有利になる。本手法の収束性、精度、計算時間に関して、計算データと実験データの両方を使用して検証を行う。

2. 周波数応答関数

2・1 一般粘性減衰 Q自由度系における点pと点q間のコンプライアンス周波数応答関数 $G(\omega)$ は一般粘性減衰の仮定下で次式となる。jは虚数単位、 ω は角振動数、*は共役複素数を表す。

$$G(\omega) = \sum_{r=1}^Q \left(\frac{\phi_{rp} \phi_{rq}}{j\omega - \lambda_r} + \frac{\phi_{rp}^* \phi_{rq}^*}{j\omega - \lambda_r^*} \right) \quad (1)$$

上式における分子、分母に次式を代入する。

* 原稿受付 1994年12月27日。

*¹ 正員, (株)いすゞ中央研究所 (〒252 藤沢市土棚8)。

*² 正員, 東京工業大学 (〒152 東京都目黒区大岡山2-12-1)。

$$\left. \begin{aligned} \lambda_r &= -\sigma_r + j\omega_{dr} \\ \phi_{rp}\phi_{rq} &= U_r + jV_r \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

ここで, σ_r , ω_{dr} , ϕ_{rp} は r 次固有モードのモード減衰率, 固有角振動数, p 点における振幅を表す。

$G(\omega)$ を実数部と虚数部に分け, 考慮するモード数を n として, これ以外のモードの影響を剰余項 C , D , E , F で近似する。

$$G(\omega) = G_R(\omega) + jG_I(\omega) \quad (3)$$

$$\left. \begin{aligned} G_R(\omega) &= \sum_{r=1}^n \left\{ \frac{U_r \sigma_r + V_r \cdot (\omega - \omega_{dr})}{a_r} + \frac{U_r \sigma_r - V_r \cdot (\omega + \omega_{dr})}{b_r} \right\} - \frac{C}{\omega^2} + E \\ G_I(\omega) &= \sum_{r=1}^n \left\{ \frac{-U_r \cdot (\omega - \omega_{dr}) + V_r \sigma_r}{a_r} - \frac{U_r \cdot (\omega + \omega_{dr}) + V_r \sigma_r}{b_r} \right\} - \frac{D}{\omega^2} + F \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

ここで a_r と b_r は次式である。

$$\left. \begin{aligned} a_r &= \sigma_r^2 + (\omega - \omega_{dr})^2 \\ b_r &= \sigma_r^2 + (\omega + \omega_{dr})^2 \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

2・2 一般ヒステリシス減衰 一般ヒステリシス減衰の場合のコンプライアンス周波数応答関数は次式となる。

$$G(\omega) = \sum_{r=1}^n \frac{\phi_{rp}\phi_{rq}}{-\omega^2 + k_r(1 + jg_r)} \quad (6)$$

ここで, k_r , g_r は r 次固有モードにおけるモード剛性, ヒステリシス減衰係数である。式(2)の下半分の式を使用すれば, 式(6)の実数部と虚数部は次式となる。

$$\left. \begin{aligned} G_R(\omega) &= \sum_{r=1}^n \left(\frac{U_r a_r + V_r b_r}{a_r^2 + b_r^2} \right) - \frac{C}{\omega^2} + E \\ G_I(\omega) &= \sum_{r=1}^n \left(\frac{V_r a_r - U_r b_r}{a_r^2 + b_r^2} \right) - \frac{D}{\omega^2} + F \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

$$\left. \begin{aligned} a_r &= k_r - \omega^2 \\ b_r &= k_r \cdot g_r \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

3. モード特性の同定

一般ヒステリシス減衰の仮定の下で説明する。この手法は, 2章を参照して数式の一部を変更するだけで簡単に一般粘性減衰に適用できる。

式(7)で表現される周波数応答関数の中に含まれるモード特性を, 振動試験により得られる周波数応答関数の実験データに最も適合するように同定する。まず実験データ A_{Rj} , A_{Ij} と式(7)の理論式との差を, 実験データに混入する誤差とし, その影響を最小にすることを考える。そのためには, 実験で得られる周波数応答関数に混入している誤差が正規分布であると仮定すれば, 次に示す尤度 R が最大になればよい。

$$R = \prod_{i=1}^N \prod_{j=1}^m \left[\frac{1}{(2\pi)^{1/2} \tau_{Rj}(\omega_i)} \times \exp \left\{ -\frac{(A_{Rj}(\omega_i) - G_{Rj}(\omega_i))^2}{2 \tau_{Rj}^2(\omega_i)} \right\} \times \frac{1}{(2\pi)^{1/2} \tau_{Ij}(\omega_i)} \times \exp \left\{ -\frac{(A_{Ij}(\omega_i) - G_{Ij}(\omega_i))^2}{2 \tau_{Ij}^2(\omega_i)} \right\} \right] \quad (9)$$

N は対象周波数範囲内の周波数点の数, m は同時に参照する周波数応答関数の数である。 $\tau_{Rj}^2(\omega_i)$ と $\tau_{Ij}^2(\omega_i)$ は, 角振動数 $\omega = \omega_i$ において実験で得られる周波数応答関数の母分散の実部と虚部である。有限回の実験では, 母分散の厳密な値を得ることはできないので, ここではその代りに, 実験で得られる A_{Rj} と A_{Ij} の分散を $\tau_{Rj}^2(\omega_i)$ と $\tau_{Ij}^2(\omega_i)$ の分散の近似値として使用する。式(9)における尤度 R が最大になるためには, 次の重みつき残差 2 乗和 S が最小になればよい。

$$S = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^m \left[W_{Rj}(\omega_i) \{G_{Rj}(\omega_i) - A_{Rj}(\omega_i)\}^2 + W_{Ij}(\omega_i) \{G_{Ij}(\omega_i) - A_{Ij}(\omega_i)\}^2 \right] \quad (10)$$

ここで h を比例定数として

$$\left. \begin{aligned} W_{Rj}(\omega_i) &= \frac{h}{2 \tau_{Rj}^2(\omega_i)} \\ W_{Ij}(\omega_i) &= \frac{h}{2 \tau_{Ij}^2(\omega_i)} \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

W_{Rj} と W_{Ij} は, 式(10)の最小 2 乗法の重み係数である。式(11)より, モード特性の同定に使用する重み係数としては分散の逆数に比例する量を採用すると, 統計的に正しいことがわかる。

式(7)中のモード特性の変数を線形項と非線形項に分ける。非線形項 k_r と g_r は式(7)の分母中にも出てくる変数であり、その数は $2n$ になる。線形項 U, V, C, D, E, F は、式(7)の分子にだけ現れる変数であり、その数は $(2n+4)m$ になる。重みつき残差 2 乗和 S が極小値をとる時、 S の線形項による偏微分係数は零となり、次式が成立する。

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \left[W_{Rj}(\omega_i) \{G_{Rj}(\omega_i) - A_{Rj}(\omega_i)\} \frac{\partial G_{Rj}(\omega_i)}{\partial U_{rj}} \right. \\ \left. + W_{Ij}(\omega_i) \{G_{Ij}(\omega_i) - A_{Ij}(\omega_i)\} \frac{\partial G_{Ij}(\omega_i)}{\partial U_{rj}} \right] &= 0 \\ \sum_{i=1}^N \left[W_{Rj}(\omega_i) \{G_{Rj}(\omega_i) - A_{Rj}(\omega_i)\} \frac{\partial G_{Rj}(\omega_i)}{\partial V_{rj}} \right. \\ \left. + W_{Ij}(\omega_i) \{G_{Ij}(\omega_i) - A_{Ij}(\omega_i)\} \frac{\partial G_{Ij}(\omega_i)}{\partial V_{rj}} \right] &= 0 \\ \sum_{i=1}^N \left[W_{Rj}(\omega_i) \{G_{Rj}(\omega_i) - A_{Rj}(\omega_i)\} \left(\frac{-1}{\omega_i^2} \right) \right] &= 0 \\ \sum_{i=1}^N \left[W_{Ij}(\omega_i) \{G_{Ij}(\omega_i) - A_{Ij}(\omega_i)\} \left(\frac{-1}{\omega_i^2} \right) \right] &= 0 \\ \sum_{i=1}^N W_{Rj}(\omega_i) \{G_{Rj}(\omega_i) - A_{Rj}(\omega_i)\} &= 0 \\ \sum_{i=1}^N W_{Ij}(\omega_i) \{G_{Ij}(\omega_i) - A_{Ij}(\omega_i)\} &= 0 \end{aligned} \quad (r=1 \sim n, j=1 \sim m) \quad (12)$$

ここで各微分係数を次式に示す。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial G_{Rj}(\omega_i)}{\partial U_{rj}} &= \frac{a_r}{a_r^2 + b_r^2} \\ \frac{\partial G_{Ij}(\omega_i)}{\partial U_{rj}} &= \frac{-b_r}{a_r^2 + b_r^2} \\ \frac{\partial G_{Rj}(\omega_i)}{\partial V_{rj}} &= \frac{b_r}{a_r^2 + b_r^2} \\ \frac{\partial G_{Ij}(\omega_i)}{\partial V_{rj}} &= \frac{a_r}{a_r^2 + b_r^2} \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

式(12)は、 G_{Rj} と G_{Ij} に関する線形方程式であり、また G_{Rj} と G_{Ij} は線形項の線形結合なので、線形項に関する線形方程式となり、その数は線形項の数と一致する。そこで、非線形項である k_r と g_r が与えられ

ると式(12)と式(13)より線形項を求めることができる。このことから、モード特性のうち k_r と g_r だけを未知数とすればよいことがわかる。ここで、 k_r と g_r の非線形項をまとめて γ_k ($k=1 \sim 2n$) と表す。式(12)を γ_k で微分すれば次式を得る。

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^N \left\{ W_{Rj}(\omega_i) \frac{\partial G_{Rj}(\omega_i)}{\partial U_{rj}} \frac{\partial H_{Rj}(\omega_i)}{\partial \gamma_k} \right. \\ \left. + W_{Ij}(\omega_i) \frac{\partial G_{Ij}(\omega_i)}{\partial U_{rj}} \frac{\partial H_{Ij}(\omega_i)}{\partial \gamma_k} \right\} &= 0 \\ \sum_{i=1}^N \left\{ W_{Rj}(\omega_i) \frac{\partial G_{Rj}(\omega_i)}{\partial V_{rj}} \frac{\partial H_{Rj}(\omega_i)}{\partial \gamma_k} \right. \\ \left. + W_{Ij}(\omega_i) \frac{\partial G_{Ij}(\omega_i)}{\partial V_{rj}} \frac{\partial H_{Ij}(\omega_i)}{\partial \gamma_k} \right\} &= 0 \\ \sum_{i=1}^N \left\{ \left(\frac{-1}{\omega_i^2} \right) W_{Rj}(\omega_i) \frac{\partial H_{Rj}(\omega_i)}{\partial \gamma_k} \right\} &= 0 \\ \sum_{i=1}^N \left\{ \left(\frac{-1}{\omega_i^2} \right) W_{Ij}(\omega_i) \frac{\partial H_{Ij}(\omega_i)}{\partial \gamma_k} \right\} &= 0 \\ \sum_{i=1}^N \left\{ W_{Rj}(\omega_i) \frac{\partial H_{Rj}(\omega_i)}{\partial \gamma_k} \right\} &= 0 \\ \sum_{i=1}^N \left\{ W_{Ij}(\omega_i) \frac{\partial H_{Ij}(\omega_i)}{\partial \gamma_k} \right\} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

ここで H_{Rj} 、 H_{Ij} は G_{Rj} 、 G_{Ij} と同じ周波数応答関数の理論式の実部と虚部であるが、式(12)の下で非線形項だけの関数となっているので表現を変えている。したがって H_{Rj} 、 H_{Ij} の非線形項による微分係数は

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial H_{Rj}(\omega_i)}{\partial \gamma_k} &= \frac{\partial G_{Rj}(\omega_i)}{\partial \gamma_k} \\ &+ \sum_{r=1}^n \left\{ \frac{\partial G_{Rj}(\omega_i)}{\partial U_{rj}} \frac{\partial U_{rj}}{\partial \gamma_k} + \frac{\partial G_{Rj}(\omega_i)}{\partial V_{rj}} \frac{\partial V_{rj}}{\partial \gamma_k} \right\} \\ &+ \frac{\partial G_{Rj}(\omega_i)}{\partial C_j} \frac{\partial C_j}{\partial \gamma_k} + \frac{\partial G_{Rj}(\omega_i)}{\partial E_j} \frac{\partial E_j}{\partial \gamma_k} \\ \frac{\partial H_{Ij}(\omega_i)}{\partial \gamma_k} &= \frac{\partial G_{Ij}(\omega_i)}{\partial \gamma_k} \\ &+ \sum_{r=1}^n \left\{ \frac{\partial G_{Ij}(\omega_i)}{\partial U_{rj}} \frac{\partial U_{rj}}{\partial \gamma_k} + \frac{\partial G_{Ij}(\omega_i)}{\partial V_{rj}} \frac{\partial V_{rj}}{\partial \gamma_k} \right\} \\ &+ \frac{\partial G_{Ij}(\omega_i)}{\partial D_j} \frac{\partial D_j}{\partial \gamma_k} + \frac{\partial G_{Ij}(\omega_i)}{\partial F_j} \frac{\partial F_j}{\partial \gamma_k} \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

となる。式(15)を式(14)に代入すると、式(14)は線形

項の γ_k に関する微分係数の線形方程式になる。これを解くことにより、線形項の γ_k に関する微分係数を求めることができる。その結果を用いれば、式(15)の微分係数を計算できる。ここで未知数は γ_k ($k=1 \sim 2n$) だけになる。

周波数応答関数の理論式を γ_k に関してテイラー展開し、その1次微分項まで採用すると次式になる。

$$\left. \begin{aligned} H_{Rj}(\omega_i, \gamma_k + \Delta\gamma_k) &= H_{Rj}(\omega_i, \gamma_k) \\ &+ \sum_{k=1}^{2n} \frac{\partial H_{Rj}(\omega_i)}{\partial \gamma_k} \cdot \Delta\gamma_k \\ H_{Ij}(\omega_i, \gamma_k + \Delta\gamma_k) &= H_{Ij}(\omega_i, \gamma_k) \\ &+ \sum_{k=1}^{2n} \frac{\partial H_{Ij}(\omega_i)}{\partial \gamma_k} \cdot \Delta\gamma_k \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

式(16)が実験データと等しいとすると次式になる。

$$\left. \begin{aligned} A_{Rj}(\omega_i) &= H_{Rj}(\omega_i, \gamma_k + \Delta\gamma_k) \\ A_{Ij}(\omega_i) &= H_{Ij}(\omega_i, \gamma_k + \Delta\gamma_k) \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

式(16)、式(17)を繰り返し計算することにより γ_k を求めることができる。

Fig.1 本手法の流れ線図

本手法の流れ線図を図1に示す。まず最初に、周波数応答関数の実験値 (A_{Rj} と A_{Ij}) とその分散が入力され、非線形項 γ_k (一般粘性減衰の場合は ω_d と σ , 一般ヒステリシス減衰の場合は k_r と g_r) の初期値が決定される。非線形項の初期値の決定には、例えば1自由度曲線適合法等が使用できる⁽⁵⁾。次に式(8)により a_r と b_r が計算され、式(11)により重み W_{Rj} と W_{Ij} が、また式(13)により周波数応答関数の理論式の線形項 (U_{Rj} と V_{Rj}) に関する微分係数が計算される。さらに式(7)と式(12)より線形項が計算される。式(14)と式(15)より線形項の γ_k に関する微分係数が計算される。式(12)の条件下における周波数応答関数の理論式の γ_k に関する微分係数は式(15)により計算される。 $\Delta\gamma_k$ は式(16)、式(17)を解くことにより得られる。次に $\gamma_k + \Delta\gamma_k$ を次のステップにおける γ_k の初期値として繰り返し計算を行い、 $\Delta\gamma_k$ が零に向かって収束すれば計算を終了する。

従来のLoonの方法では、 $q=2n+(2n+4)m$ 個の全モード特性を未知数とする必要があるが、本手法では未知数は非線形項のみの $2n$ 個に縮小される。このように本手法では、多点参照時に用いる周波数応答関数の数 m が増加しても、未知数の数は変わらない。周波数領域における他の多点参照方法としては、固有値解析を行うボルドの方法⁽⁶⁾⁽⁷⁾等があるが、本手法の計算手順はそれらよりも簡明であり、単に線形方程式を繰り返して解くだけでモード特性を得ることが出来る。

4. 計算時間、収束性、精度

振動実験で得られる周波数応答関数には実験誤差が混入しているので、それからモード特性を正確に同定するためには、なるべく多数の周波数応答関数を同時に考慮する方が精度が良い。近年の多チャンネルデータ処理装置及び軽量な3軸加速度検出器の発達により、実験で多数の周波数応答関数を得ることが容易になっている。多数の周波数応答関数を同時に考慮してモード特性を抽出する場合に問題となるのは、同定に必要な計算時間と収束性である。ここでは実際の実験データ及び模擬実験データを使用して、本手法の計算時間と収束性に関する優位性を検証する。

4.1 計算時間 打撃ハンマで平板を加振し、3軸加速度計で応答を測定して得た実験データを使用してモード特性の同定を試みる。各周波数応答関数毎に、573個の周波数点のデータを用いて5個の固有モードのモード特性を同定する。使用する電算機はIBM9021 (約48mips) である。

従来のLoonの方法と本手法の計算時間の比較を、表1と図2に示す。表1において考慮する周波数応答関数が1個の時には、本手法は従来の方法より計算時間が長くて不利である。これは、本手法では同定するモード特性を非線形項だけに一度縮小するので、そのための計算時間が必要となるからである。しかし、考慮する周波数応答関数の数が増加すると、従来の方法では計算時間が急増する。そして、考慮する周波数応答関数が4個以上になると、本手法の計算時間の方が短くなる。考慮する周波数応答関数が50個の場合には、従来の方法では計算時間が長すぎて計算できなかった。実際の実験において得られる周波数応答関数の数は、200程度になることがしばしばあるが、従来のLoonの方法ではこれらを同時に考慮してモード特性を抽出することは、実用上困難である。また、Loonの方法以外の手法でこの問題を解決している手法としては、文献(6),(7),(8)等が知られている。

表1 多点参照時の計算時間 (sec.)

num. of FRF	1	2	4	10	20	50
conventional	1.2	4.8	16.2	197	1453	×
presented	3.6	7.2	14.4	35	70	174

図2 多点参照における計算時間

図2は表1を図示したものである。従来の方法における計算時間の急増は、解くべき行列の大きさが $2n + (2n+4)m$ 次元となり、周波数応答関数の数 m と共に大

きくなるために生じている。本手法では、 m が増加しても未知数である非線形項の数は $2n$ で一定であり、したがって解くべき逆行列の大きさも一定である。そして、この逆行列を使用する計算回数が m に比例して増加するだけなので、ほぼ直線的にゆっくり計算時間が増加している。図2には、減衰を粘性減衰とした場合について示しているが、ヒステリシス減衰としても計算時間は変わらない。

モデルの諸元	N0.	1	2	3	4	5
Mass(Kg)		1.	2.	3.	4.	5.
Stiffness(10^7 N/m)		1.	1.5	2.	1.5	1.

図3 5自由度モデル (F, Aは入出力を示す)

表2 有限要素法から得られるモード特性

Mode No.	$\Omega_r / 2\pi$ (Hz)	$(\phi \cdot 10^{-1})$	$(\phi \cdot 10^{-1})$
1	8.4	1.05	1.74
2	26.6	2.12	3.14
3	45.1	-2.98	-3.37
4	66.9	-5.37	-2.63
5	92.3	-7.53	4.34

4.2 収束性 収束性を検討するために、図3に示す5自由度モデルを対象にし、有限要素法による計算で作成した周波数応答関数を使用する。表2に有限要素法から得られたモード特性を示す。

周波数応答関数としては、50～950 Hzの901個のデータを模擬実験入力として使用する。収束性の指標としては、次式のように、入力データで基準化された残差2乗平均 Z を用いる。

$$Z = \frac{1}{N \times m} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^m \left[\left\{ \frac{G_{Rj}(\omega_i) - A_{Rj}(\omega_i)}{A_{Rj}(\omega_i)} \right\}^2 + \left\{ \frac{G_{Ij}(\omega_i) - A_{Ij}(\omega_i)}{A_{Ij}(\omega_i)} \right\}^2 \right] \quad (18)$$

収束性の比較のために、減衰と固有振動数の初期値を真値からずらして与え、繰り返し計算を行う。

まず一般ヒステリシス減衰の仮定の下で減衰の初期値を変化させて収束性を調査した結果を図4に示す。ヒステリシス減衰係数 g_r の初期値を真値の α 倍に変化させて繰り返し計算を行う。 ($\alpha = 2$, $u = -10$)

～4) 初期値が真値の4倍($u=2$)以上であると発散するが、それ以下であれば収束性は良い。ここでは示さないが、一般粘性減衰の仮定の下でも同様の結果になる。これから、減衰の初期値は真値より充分小さくしておけばよいといえる。

図4 g_r の初期値 (真値 $\times 2^u$) と収束性

次に減衰の初期値を粘性減衰の場合は減衰比0.001, ヒステリシス減衰の場合は減衰係数0.002に固定し, 固有振動数の初期値を真値から $\beta\%$ ずらして収束性を検討する。まず従来の方法の場合を図5に示す。粘性減衰でその真値が減衰比0.01, 0.05の場合を図5-a, 図5-cに, またヒステリシス減衰でその真値が減衰係数0.02, 0.1の場合を図5-b, 図5-dに示す。固有振動数の初期値が収束性に与える影響は減衰のそれと比較すると非常に大きい。すなわち, 減衰の初期値としては真値の0.001倍という小さい値を用いても収束性は良好であるが, 固有振動数の場合は初期値が真値から数%ずれると収束しなくなる。そしてその影響は, 減衰が小さく共振峰が急峻になるほど大きい。粘性減衰とヒステリシス減衰の差はほとんどない。従来の方法を使用する場合, 固有振動数の初期値を正確に求めなければならないことが経験的に知られているが, 図5はこの経験則を証明している。

次に本手法において固有振動数の初期値を真値から $\beta\%$ ずらした時の収束性の結果を図6に示す。これは従来の方法の図5に対応している。図5と図6を比較すれば, 減衰が大きい場合には, 固有振動数の初期値の真値からのずれが, 本手法では従来の方法の約2倍である7または8%以内で収束している。減衰が小さい場合にも, 固有振動数の初期値の真値からのずれが, 本手法では従来の方法の2倍である2%以内で収束し

ている。このことから, 本手法では収束する初期値の範囲が2倍になったといえる。

この収束性の向上の原因の1つは, 変数の数が非線形項だけに縮小されることである。他の原因は, 変数を縮小させる時に採用した線形項極小条件の下で非線形項を探索するためである。これを, 線形項と非線形項の全変数を設計変数として重みつき残差2乗和 S の最小値を探索する最適化問題として考えると, 本手法では, 設計変数空間において $\partial S / \partial \alpha_i = 0$ (α_i : 線形項) という S における谷筋に沿って水が流れる様に S の最小値を探索することになる。したがって, 従来の方法のように, 全変数を考慮して探索方向を決定するよりも, 収束性が改善される。

4.3 精度 ここでは, 減衰を比例粘性減衰または比例ヒステリシス減衰として検討している。比例粘性減衰の場合の線形項は

$$\left. \begin{aligned} U_r &= 0 \\ V_r &= \frac{-\phi_{rp} \phi_{r0}}{2\Omega_r (1 - \zeta_r^2)^{1/2}} \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

ここで, Ω_r , ζ_r は r 次固有モードの不減衰固有角振動数, モード減衰比を表す。一方, 比例ヒステリシス減衰の場合の線形項は

$$\left. \begin{aligned} U_r &= \phi_{rp} \phi_{r0} \\ V_r &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

まず, 入力データに誤差が混入していない場合には, 図5と図6からわかるように, 共に収束後の式(18)で表される Z は 10^{-8} 以下になっている。このように誤差がない場合の精度は極めて良いと言える。

次に, 入力データに不規則誤差が混入する場合について検討する。通常の応答計測では, 加速度計を用い, 時間領域においてデータを採取する。そこで, 時間領域において信号の2乗平均値の平方根の $e\%$ ($e = 0.5, 1, 2$) の雑音を, 加速度に混入させることを考える。そのために, 対象周波数範囲内のアクセランス振幅を2乗平均し, その平方根の $e\%$ の振幅の白色雑音を, 周波数領域で均一に混入させる。

通常, モード特性の同定はアクセランスを2回時間積分したコンプライアンスで行う。上記の方法で混入させた白色雑音の分散は, コンプライアンス上では $1/\omega^4$ に比例することになり, 統計的に正しい重みは ω^4 に比例するといえる。この重みと, 通常使用されるコンプライアンス振幅の逆数の重みを使用して, モード特性を同定する場合との比較を, 表3に示す。

図5 従来の方法における収束性

β : 固有振動数の初期値の真値からのずれ (%)

$\zeta_r = \sigma_r / \omega_{dr}$: モード減衰比 (一般粘性)

g_r : ヒステリシス減衰係数

図6 本方法における収束性

β : 固有振動数の初期値の真値からのずれ (%)

$\zeta_r = \sigma_r / \omega_{dr}$: モード減衰比 (一般粘性)

g_r : ヒステリシス減衰係数

減衰は一般粘性減衰としている。

表3 同定したモード特性の真値からの差(%)

上段は重み $=\omega^4$ ，下段は重み $=1/\text{振幅}$

a. 1.0%の白色雑音混入

Mode NO.	Ω (%)	ζ (%)	V (%)
1	-0.0341 -0.0700	2.26 -4.71	1.53 -5.31
2	-0.0003 -0.0078	0.32 -2.25	0.08 -2.59
3	-0.0015 -0.0051	0.16 -0.37	0.13 -0.41
4	0.0005 -0.0024	-0.10 0.33	-0.06 0.33
5	0.0004 0.0015	0.04 -0.44	0.03 -0.43

表3-b 0.5%白色雑音混入

Mode NO.	Ω (%)	ζ (%)	V (%)
1	0.0011 0.0021	0.50 2.11	0.53 2.15
2	0.0006 -0.0032	-0.04 -2.43	0.01 -2.45
3	0.0003 -0.0046	-0.07 1.05	0.04 -0.94
4	0.0004 -0.0071	-0.01 0.64	0.01 0.70
5	0.0000 0.0075	0.01 -0.85	0.02 -0.86

入力データに1%と0.5%の白色雑音を混入させた場合の精度を表3-aと表3-bに示す。統計的に正しい重みを使用することにより、全モードの全モード特性の誤差が大きく低減している。ここでは示していないが、混入する雑音を更に大きくすると、この重みによる差は、低次のモード特性から不規則になり、一定の傾向を示さなくなる。雑音のために精度が特に低下するのは、モード減衰比 ζ と線型項Vである。しかし、1%以下の雑音であれば、統計的に正しい重みを使用することにより、正確なモード形状(線型項V)を同定できる。実際の振動試験では、1%以上の雑音が増定データに混入した場合には、応答の乱れが一見して明らかになるので、測定者の判断で実験をやりにおすることが多い。図7に、雑音が混入したコンプライアンス入力と、統計的に正しい重みを使用して同定したモード特性から再生したコンプライアンスを示す。表3に示したような統計的に正しい重みを使用することによる耐雑音効果の向上は、式(10)の2乗形式を最小にする最小2乗法が、正しい重みにより最も確からしいモード特性を推定する最尤推定法となるために生じる。

図7 白色雑音1%混入時のコンプライアンス

点線：入力データ，実線：同定結果(重み $=\omega^4$)

5. 結論

実験モード解析におけるモード特性の同定のために、周波数領域において変数を非線形項だけに縮小する方法を検討した。これを一般粘性減衰系と一般ヒステリシス減衰系に適用した結果、以下のことが判明した。

- (1) 固有モードの初期値は不要であり、簡単に与えられる固有振動数と減衰の初期値だけでよい。
- (2) 多点参照の場合の計算時間は従来のLoonの方法よりもはるかに短い。
- (3) 初期値が真値からずれているときの収束性は、従来のLoonの方法のほぼ2倍であり、優れている。
- (4) 入力データに誤差がない場合の収束後の精度は極めて良い。
- (5) 入力データに誤差が混入すると、モード特性中最も有用なモード形状の同定精度が低下するが、統計的に正しい重みを使用することによりその低下を防止することができる。

6. 謝辞

日本での留学期間に研究に御協力いただいた韓国釜山国立大学教授 鄭 博士に対し、心から感謝します。

参考文献

1. 長松, "モード解析", 培風館, 1985.
2. Loon, V., "Modal Parameters of Mechanical Structures", Ph. Doctor dissertation, Katholieke Univ. Leuven, 1974.
3. 長松, "モード解析入門", コロナ社, 1993.
4. Jeong, W., 大熊, 長松, 機論, 54-505, C(昭63), 2077.
5. 岩原, 自動車技術会論文集, No. 32, 1986, p. 92.
6. Vold, H., Leuridan, J., 7th Seminar on Modal Analysis Katholieke Univ. Leuven, p. 1.
7. 吉村, 東京工業大学博士論文, 1988.
8. France Lembregts, Ph. Doctor dissertation, Katholieke Univ. Leuven, 1988.