回転しているねじれた薄板の自由振動解析*

築地 恒夫^{*1}, 修行 稔^{*2}, 山下 務^{*2}

Free Vibration Analysis of Rotating Thin Twisted Plates

Tsuneo TSUIJI, Minoru SHUGYO and Tsutomu YAMASHITA

Free vibrations of rotating cantilevered thin twisted plates are investigated. First, the exact strain-displacement relationships in large deflections of thin twisted plates are derived and the principle of virtual work for free vibrations of rotating cantilevered thin twisted plates is formulated. Then, a numerical procedure based on the Rayleigh-Ritz method is proposed using algebraic polynomials as assumed displacement functions. The results of the present analysis are compared with those obtained using the finite-element method to verify the usefulness of derived equations. Finally, effects of rotation, setting angle and setting length on frequency parameters are studied for typical thin twisted plates.

Key Words: Free Vibration, Rotating Thin Twisted Plate, Strain-Displacement Relational Principle of Virtual Work, Rayleigh-Ritz Method

1. はじめに

高速回転している軸流回転機翼の振動特性が、遠心力の影響を受けて変化することはよく知られた事実であり、しかも工学的に重要な問題であるため、従来から多くの研究が行われている。特に、翼をねじれた薄板にモデル化し、そのような翼モデルの振動特性に及ぼす回転速度の影響を論じた解析的な研究は多数発表されている。それぞれ異なった剛性マトリックスを使用した有限要素法による解析^{(1)~(5)}、また、レイリー・リッツ法による解析法の提案⁽⁶⁾などがある。

しかし、有限要素法による振動解析結果は、回転していないねじれた板の低次振動でさえ、使用する剛性マトリックスの違いによってかなりの差が生じ⁽⁷⁾、また、文献(6)に提案されているレイリー・リッツ法による解析法は、浅い殻理論に基づいているため、ねじれの大きな板には適用できない。

そこで、本報告ではより精度の高い解析法の開発を目指して、まず、ねじれた薄板の正確な非線形ひずみ・変位関係を誘導し、数値解析の基礎式となる遠心

力場にあるねじれた薄板の自由振動に関する仮想仕事の原理を定式化する。次に、導いた仮想仕事の原理を用い、レイリー・リッツ法による振動解析法を提案するとともに、本法によって得られた結果と既存の解析解とを比較して、導いたひずみ・変位関係および仮想仕事の原理が、遠心力場にあるねじれた板の自由振動解析に有用であることを明らかにする。最後に、代表的なねじれた薄板の振動特性に及ぼす回転速度および板の取付け角度、取付け長さの影響を検討する。

2. 基礎式の誘導

回転しているねじれた薄板の座標軸、寸法を図1に示す。板の中央面内で、板の長さ方向に x 軸、 x 軸に垂直に x 軸からの距離を y 、中央面に垂直に中央面か

Fig. 1 A rotating thin twisted plate

* 原稿受付 1995 年 4 月 19 日.

*1 正員, 長崎大学工学部 (〒852 長崎市文教町 1-14).

*2 長崎大学工学部.

らの距離を z とし, x, y, z 軸が右手系をなすように定める。板は x 軸まわりに一定のねじれ率 k でねじれ (板先端のねじれ角は $ka=K$)、長さ a 、幅 b 、板厚 t である。図 1 に示すように板は Z 軸まわりに速度 Ω (rad/s) で回転し, Z 軸から x_0 (板の取付け長さ) だけ離れた位置で, y 軸が水平方向と α (板の取付け角) だけ

傾いて固定されているものとする。

ねじれた薄板の非線形ひずみ・変位関係を文献(8)に示した手順に従って導く。まず, ねじれた板の非線形ひずみテンソル $f_{i,j}$ ($i, j=1, 2, 3$) は次のようである⁽⁸⁾。

$$\begin{aligned}
 f_{11} &= g \frac{\partial U}{\partial x} + k^2 y V - \frac{kz}{\sqrt{g}} \left(-k^2 y U + \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{k}{\sqrt{g}} W \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U}{\partial x} - \frac{ky}{\sqrt{g}} \frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 \\
 &\quad + \frac{1}{2} \left(-k^2 y U + \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{k}{\sqrt{g}} W \right)^2 + \frac{1}{2} \left(ky \frac{\partial U}{\partial x} + kV + \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial W}{\partial x} \right)^2, \\
 f_{22} &= \frac{\partial V}{\partial y} - \frac{kz}{\sqrt{g}} \left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{k^2 y}{g} U - \frac{k}{g\sqrt{g}} W \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U}{\partial y} - \frac{ky}{\sqrt{g}} \frac{\partial W}{\partial y} - \frac{k}{g\sqrt{g}} W \right)^2 \\
 &\quad + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V}{\partial y} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(ky \frac{\partial U}{\partial y} + kU + \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial W}{\partial y} - \frac{k^2 y}{g\sqrt{g}} W \right)^2, \\
 f_{33} &= \frac{\partial W}{\partial z} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U}{\partial z} - \frac{ky}{\sqrt{g}} \frac{\partial W}{\partial z} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V}{\partial z} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(ky \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial W}{\partial z} \right)^2, \\
 2f_{12} &= g \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} - 2 \frac{k}{\sqrt{g}} W - \frac{kz}{\sqrt{g}} \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{k^2 y}{g} V \right) + \left(\frac{\partial U}{\partial x} - \frac{ky}{\sqrt{g}} \frac{\partial W}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial U}{\partial y} - \frac{ky}{\sqrt{g}} \frac{\partial W}{\partial y} - \frac{k}{g\sqrt{g}} W \right) \\
 &\quad + \left(-k^2 y U + \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{k}{\sqrt{g}} W \right) \frac{\partial V}{\partial y} + \left(ky \frac{\partial U}{\partial x} + kV + \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial W}{\partial x} \right) \left(ky \frac{\partial U}{\partial y} + kU + \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial W}{\partial y} - \frac{k^2 y}{g\sqrt{g}} W \right), \\
 2f_{13} &= g \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{k}{\sqrt{g}} V + \frac{\partial W}{\partial x} - \frac{kz}{\sqrt{g}} \frac{\partial V}{\partial z} + \left(\frac{\partial U}{\partial x} - \frac{ky}{\sqrt{g}} \frac{\partial W}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial U}{\partial z} - \frac{ky}{\sqrt{g}} \frac{\partial W}{\partial z} \right) \\
 &\quad + \left(-k^2 y U + \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{k}{\sqrt{g}} W \right) \frac{\partial V}{\partial z} + \left(ky \frac{\partial U}{\partial x} + kV + \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial W}{\partial x} \right) \left(ky \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial W}{\partial z} \right), \\
 2f_{23} &= \frac{k}{\sqrt{g}} U + \frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial y} - \frac{kz}{\sqrt{g}} \frac{\partial U}{\partial z} + \left(\frac{\partial U}{\partial y} - \frac{ky}{\sqrt{g}} \frac{\partial W}{\partial y} - \frac{k}{g\sqrt{g}} W \right) \left(\frac{\partial U}{\partial z} - \frac{ky}{\sqrt{g}} \frac{\partial W}{\partial z} \right) \\
 &\quad + \frac{\partial V}{\partial y} \frac{\partial V}{\partial z} + \left(ky \frac{\partial U}{\partial y} + kU + \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial W}{\partial y} - \frac{k^2 y}{g\sqrt{g}} W \right) \left(ky \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial W}{\partial z} \right)
 \end{aligned}$$

.....(1)

ただし, $U(x, y, z)$, $V(x, y, z)$, $W(x, y, z)$ はねじれた板内任意点の, 中央面上基本ベクトル方向変位および中央面に垂直方向変位である。なお, g は次式で表される。

$$g = 1 + k^2 y^2 \dots\dots\dots(2)$$

直交直線座標系におけるフックの法則を適用するため, 局部直交直線座標 ($\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$) を導入し, この新しい座標系におけるひずみテンソルを次式から求める⁽⁹⁾。

$$2e_{ij} = \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^3 \frac{\partial \alpha^k}{\partial y^i} \frac{\partial \alpha^l}{\partial y^j} \cdot 2f_{kl} \dots\dots\dots(3)$$

ただし, 変換係数 $\partial \alpha^k / \partial y^i$ の値は付録 A の表 5 に示すとおりである。

式(3)から ($\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$) 座標系における工学ひずみ ϵ_{ij} ($i, j = \bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$) が次のように導かれる。

$$\begin{aligned}
 \epsilon_{\bar{x}\bar{x}} &= e_{11} = \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{k^2 y}{g} V + \frac{kz}{\sqrt{g}} \left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{k^2 y}{g} U - \frac{k}{g\sqrt{g}} W \right) \\
 &\quad + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{k^2 y}{g} V + \frac{kz}{\sqrt{g}} \left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{k^2 y}{g} U - \frac{k}{g\sqrt{g}} W \right) \right]^2 + \frac{1}{2g} \left[-k^2 y U + \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{k}{\sqrt{g}} W + \frac{kz}{\sqrt{g}} \frac{\partial V}{\partial y} \right]^2 \\
 &\quad + \frac{1}{2g} \left[\frac{k}{\sqrt{g}} V + \frac{\partial W}{\partial x} + \frac{kz}{\sqrt{g}} \left(\frac{k}{\sqrt{g}} U + \frac{\partial W}{\partial y} \right) \right]^2, \\
 \epsilon_{\bar{y}\bar{y}} &= e_{22} = \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{kz}{g\sqrt{g}} \left(-k^2 y U + \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{k}{\sqrt{g}} W \right) + \frac{g}{2} \left[\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{k^2 y}{g} U - \frac{k}{g\sqrt{g}} W + \frac{kz}{g\sqrt{g}} \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{k^2 y}{g} V \right) \right]^2 \\
 &\quad + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial V}{\partial y} + \frac{kz}{g\sqrt{g}} \left(-k^2 y U + \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{k}{\sqrt{g}} W \right) \right]^2 + \frac{1}{2} \left[\frac{k}{\sqrt{g}} U + \frac{\partial W}{\partial y} + \frac{kz}{g\sqrt{g}} \left(\frac{k}{\sqrt{g}} V + \frac{\partial W}{\partial x} \right) \right]^2, \\
 \epsilon_{\bar{z}\bar{z}} &= e_{33} = \frac{\partial W}{\partial z} + \frac{g}{2} \left(\frac{\partial U}{\partial z} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V}{\partial z} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial W}{\partial z} \right)^2,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{\bar{x}\bar{y}} &= 2e_{12} = \sqrt{g} \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial V}{\partial x} - 2 \frac{k}{g} W + \frac{kz}{g} \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{k^2 y}{g} V \right) \\
&\quad + \sqrt{g} \left[\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{k^2 y}{g} V + \frac{kz}{\sqrt{g}} \left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{k^2 y}{g} U - \frac{k}{g\sqrt{g}} W \right) \right] \left[\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{k^2 y}{g} U - \frac{k}{g\sqrt{g}} W + \frac{kz}{g\sqrt{g}} \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{k^2 y}{g} V \right) \right] \\
&\quad + \frac{1}{\sqrt{g}} \left[-k^2 y U + \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{k}{\sqrt{g}} W + \frac{kz}{\sqrt{g}} \frac{\partial V}{\partial y} \right] \left[\frac{\partial V}{\partial y} + \frac{kz}{g\sqrt{g}} \left(-k^2 y U + \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{k}{\sqrt{g}} W \right) \right] \\
&\quad + \frac{1}{\sqrt{g}} \left[\frac{k}{\sqrt{g}} V + \frac{\partial W}{\partial x} + \frac{kz}{\sqrt{g}} \left(\frac{k}{\sqrt{g}} U + \frac{\partial W}{\partial y} \right) \right] \left[\frac{k}{\sqrt{g}} U + \frac{\partial W}{\partial y} + \frac{kz}{\sqrt{g}} \left(\frac{k}{\sqrt{g}} V + \frac{\partial W}{\partial x} \right) \right], \\
\varepsilon_{\bar{x}\bar{z}} &= 2e_{13} = \sqrt{g} \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{k}{g} V + \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial W}{\partial x} + \frac{kz}{g} \left(\frac{k}{\sqrt{g}} U + \frac{\partial V}{\partial y} \right) \\
&\quad + \sqrt{g} \left[\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{k^2 y}{g} V + \frac{kz}{\sqrt{g}} \left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{k^2 y}{g} U - \frac{k}{g\sqrt{g}} W \right) \right] \frac{\partial U}{\partial z} \\
&\quad + \frac{1}{\sqrt{g}} \left[-k^2 y U + \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{k}{\sqrt{g}} W + \frac{kz}{\sqrt{g}} \frac{\partial V}{\partial y} \right] \frac{\partial V}{\partial z} + \frac{1}{\sqrt{g}} \left[\frac{k}{\sqrt{g}} V + \frac{\partial W}{\partial x} + \frac{kz}{\sqrt{g}} \left(\frac{k}{\sqrt{g}} U + \frac{\partial W}{\partial y} \right) \right] \frac{\partial W}{\partial z}, \\
\varepsilon_{\bar{y}\bar{z}} &= 2e_{23} = \frac{k}{\sqrt{g}} U + \frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial y} + \frac{kz}{g\sqrt{g}} \left(\frac{k}{\sqrt{g}} V + \frac{\partial W}{\partial x} \right) \\
&\quad + g \left[\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{k^2 y}{g} U - \frac{k}{g\sqrt{g}} W + \frac{kz}{g\sqrt{g}} \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{k^2 y}{g} V \right) \right] \frac{\partial U}{\partial z} \\
&\quad + \left[\frac{\partial V}{\partial y} + \frac{kz}{g\sqrt{g}} \left(-k^2 y U + \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{k}{\sqrt{g}} W \right) \right] \frac{\partial V}{\partial z} + \left[\frac{k}{\sqrt{g}} U + \frac{\partial W}{\partial y} + \frac{kz}{g\sqrt{g}} \left(\frac{k}{\sqrt{g}} V + \frac{\partial W}{\partial x} \right) \right] \frac{\partial W}{\partial z}
\end{aligned}$$

.....(4)

ところで、薄肉平板についてひずみの非線形項を導く際、 $|du/dx, dv/dy, du/dy, dv/dx| \ll 1$ として、これらの項を無視している⁽¹⁰⁾。ねじれた板に対しても同様な近似が適用できるものと仮定し、それらに相当する項[式(4)のアンダーラインを付した項]を無視して、非線形ひずみ・変位関係を導くこととする。

ねじれた薄板の変位 U, V, W は板中央面上の変位 $u(x, y), v(x, y), w(x, y)$ を用いて

$$\begin{aligned}
U &= u - \frac{z}{g} \left(\frac{k}{\sqrt{g}} v + \frac{\partial w}{\partial x} \right), \\
V &= v - z \left(\frac{k}{\sqrt{g}} u + \frac{\partial w}{\partial y} \right), \quad W = w \quad \text{.....(5)}
\end{aligned}$$

と表される⁽⁸⁾。この U, V, W を式(4)に代入すると、ねじれた薄板の非線形ひずみ変位関係が変位 u, v, w の関数として以下のように導かれる。

$$\begin{aligned}
e_{\bar{x}\bar{x}} &= \Omega_x - z\Gamma_x - z^2\Phi_x + \frac{1}{2}\Psi_x^2, \\
\varepsilon_{\bar{y}\bar{y}} &= \Omega_y - z\Gamma_y - z^2\Phi_y + \frac{1}{2}\Psi_y^2, \\
\varepsilon_{\bar{x}\bar{y}} &= \Omega_{xy} - z\Gamma_{xy} - z^2\Phi_{xy} + \Psi_x\Psi_y, \\
\varepsilon_{\bar{x}\bar{z}} &= 0, \quad \varepsilon_{\bar{y}\bar{z}} = 0, \quad \varepsilon_{\bar{z}\bar{z}} = 0 \quad \text{.....(6)}
\end{aligned}$$

ただし、

$$\begin{aligned}
\Omega_x &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{k^2 y}{g} v, \quad \Omega_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \\
\Omega_{xy} &= \sqrt{g} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial v}{\partial x} - 2 \frac{k}{g} w, \\
\Gamma_x &= -\frac{k}{\sqrt{g}} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{k}{g\sqrt{g}} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{g} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\quad + \frac{k^2 y}{g} \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{k^2}{g^2} w, \\
\Gamma_y &= \frac{k}{\sqrt{g}} \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{k}{g\sqrt{g}} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{k^2}{g^2} w, \\
\Gamma_{xy} &= 2 \left(-2 \frac{k^3 y}{g^2} v + \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - \frac{k^2 y}{g\sqrt{g}} \frac{\partial w}{\partial x} \right), \\
\Phi_x &= \frac{k^2}{g^2} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{k}{g\sqrt{g}} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - \frac{k^3 y}{g^2 \sqrt{g}} \frac{\partial w}{\partial x}, \\
\Phi_y &= \frac{k^2}{g^2} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{k^4 y}{g^3} v + \frac{k}{g\sqrt{g}} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \\
&\quad - \frac{k^3 y}{g^2 \sqrt{g}} \frac{\partial w}{\partial x}, \\
\Phi_{xy} &= \frac{k}{g^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{k}{g} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{k^3 y}{g^2} \frac{\partial w}{\partial y}, \\
\Psi_x &= \frac{k}{g} v + \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \Psi_y = \frac{k}{\sqrt{g}} u + \frac{\partial w}{\partial y}
\end{aligned}$$

.....(7)

である。

高速回転しているねじれた板の振動は、遠心力によって生じた変形および応力を初期変位、初期応力としてもつねじれた板の振動と考えることができる⁽⁵⁾。そこで、解析には初期変形 $u^{(0)}, v^{(0)}, w^{(0)}$ を考慮したひずみ・変位関係が必要であるが、これは式(6)から、

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{\bar{x}\bar{x}} &= \varepsilon_{\bar{x}\bar{x}}^L + \varepsilon_{\bar{x}\bar{x}}^N, \quad \varepsilon_{\bar{y}\bar{y}} = \varepsilon_{\bar{y}\bar{y}}^L + \varepsilon_{\bar{y}\bar{y}}^N, \\
\varepsilon_{\bar{x}\bar{y}} &= \varepsilon_{\bar{x}\bar{y}}^L + \varepsilon_{\bar{x}\bar{y}}^N, \\
\varepsilon_{\bar{x}\bar{x}}^L &= \Omega_x + \Psi_x^{(0)} \Psi_x - z\Gamma_x - z^2\Phi_x, \quad \varepsilon_{\bar{x}\bar{x}}^N = \frac{1}{2} \Psi_x^2, \\
\varepsilon_{\bar{y}\bar{y}}^L &= \Omega_y + \Psi_y^{(0)} \Psi_y - z\Gamma_y - z^2\Phi_y, \quad \varepsilon_{\bar{y}\bar{y}}^N = \frac{1}{2} \Psi_y^2,
\end{aligned}$$

$$\varepsilon_{\bar{x}\bar{y}}^L = \Omega_{xy} + \Psi_x^{(0)} \Psi_y + \Psi_y^{(0)} \Psi_x - z \Gamma_{xy} - z^2 \Phi_{xy},$$

から計算できる。

$$\varepsilon_{\bar{x}\bar{y}}^N = \Psi_x \Psi_y \quad \dots\dots\dots (8)$$

ただし、 $\varepsilon_{ij}^L, \varepsilon_{ij}^N (i, j = \bar{x}, \bar{y})$ は変位の線形および非線形項から成るひずみ成分、また、 $\Psi_x^{(0)}, \Psi_y^{(0)}$ は初期変位で表される次に示す関数である。

$$\Psi_x^{(0)} = \frac{k}{g} v^{(0)} + \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial w^{(0)}}{\partial x}, \quad \Psi_y^{(0)} = \frac{k}{\sqrt{g}} u^{(0)} + \frac{\partial w^{(0)}}{\partial y} \quad \dots\dots\dots (9)$$

なお、遠心力によって生じる応力 $\sigma_{\bar{x}\bar{x}}, \sigma_{\bar{y}\bar{y}}, \tau_{\bar{x}\bar{y}}$ は

$$\begin{aligned} \sigma_{\bar{x}\bar{x}} &= \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_{\bar{x}\bar{x}}^L + \nu \varepsilon_{\bar{y}\bar{y}}^L), \\ \sigma_{\bar{y}\bar{y}} &= \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_{\bar{y}\bar{y}}^L + \nu \varepsilon_{\bar{x}\bar{x}}^L), \\ \tau_{\bar{x}\bar{y}} &= G \varepsilon_{\bar{x}\bar{y}}^L \quad \dots\dots\dots (10) \end{aligned}$$

3. 解 析 法

3.1 初期変形および初期応力の解析法 振動解析に先立って、遠心力によって生じる初期変形および初期応力を知る必要がある。ねじれた板に遠心力が作用すると板は変形し、その結果遠心力の大きさが変化する。したがって、遠心力による変形および応力は繰返し計算の収束解として求めなければならない。

遠心力場にあるねじれた板の変形に関する仮想仕事の原理は、コリオリの力および薄板を対象としているので遠心力の板厚方向の変化を無視すれば、以下のようである(遠心力の仮想仕事については付録 B 参照)。

$$\begin{aligned} & \iiint_m \frac{E}{1-\nu^2} \left[\varepsilon_{\bar{x}\bar{x}}^L \delta \varepsilon_{\bar{x}\bar{x}}^L + \varepsilon_{\bar{y}\bar{y}}^L \delta \varepsilon_{\bar{y}\bar{y}}^L + \nu (\varepsilon_{\bar{x}\bar{x}}^L \delta \varepsilon_{\bar{y}\bar{y}}^L + \varepsilon_{\bar{y}\bar{y}}^L \delta \varepsilon_{\bar{x}\bar{x}}^L) + \frac{1-\nu}{2} \varepsilon_{\bar{x}\bar{y}}^L \delta \varepsilon_{\bar{x}\bar{y}}^L \right] \sqrt{g} dx dy dz \\ & + \iiint_m (\sigma_{\bar{x}\bar{x}}^{(0)} \delta \varepsilon_{\bar{x}\bar{x}}^N + \sigma_{\bar{y}\bar{y}}^{(0)} \delta \varepsilon_{\bar{y}\bar{y}}^N + \tau_{\bar{x}\bar{y}}^{(0)} \delta \varepsilon_{\bar{x}\bar{y}}^N) \sqrt{g} dx dy dz \\ & - \Omega^2 \iiint_m \rho \left[\left(x_0 + x + u - \frac{ky}{\sqrt{g}} w \right) \delta \left(u - \frac{ky}{\sqrt{g}} w \right) + \left\{ (y+v) \cos^2 \phi - \left(ky u + \frac{1}{\sqrt{g}} w \right) \sin \phi \cos \phi \right\} \delta v \right. \\ & \left. + \left\{ -(y+v) \sin \phi \cos \phi + \left(ky u + \frac{1}{\sqrt{g}} w \right) \sin^2 \phi \right\} \delta \left(ky u + \frac{1}{\sqrt{g}} w \right) \right] \sqrt{g} dx dy dz = 0 \quad \dots\dots\dots (11) \end{aligned}$$

ここに、 E はヤング率、 ν はポアソン比、 ρ は密度、 $\sigma_{\bar{x}\bar{x}}^{(0)}, \sigma_{\bar{y}\bar{y}}^{(0)}, \tau_{\bar{x}\bar{y}}^{(0)}$ は初期応力、また、 ϕ は

$$\phi = \alpha + kx \quad \dots\dots\dots (12)$$

である。

式(11)に式(8)を代入し、初期変位は微小のためその二乗項は無視して、 z で積分すると

$$\begin{aligned} & \iint_A H \left[\Omega_x \delta \Omega_x + \Omega_y \delta \Omega_y + \nu (\Omega_x \delta \Omega_y + \Omega_y \delta \Omega_x) + \frac{1-\nu}{2} \Omega_{xy} \delta \Omega_{xy} + \Psi_x^{(0)} (\Omega_x \delta \Psi_x + \Psi_x \delta \Omega_x) + \Psi_y^{(0)} (\Omega_y \delta \Psi_y + \Psi_y \delta \Omega_y) \right. \\ & \left. + \nu \{ \Psi_x^{(0)} (\Omega_y \delta \Psi_x + \Psi_x \delta \Omega_y) + \Psi_y^{(0)} (\Omega_x \delta \Psi_y + \Psi_y \delta \Omega_x) \} \right. \\ & \left. + \frac{1-\nu}{2} \{ \Psi_x^{(0)} (\Psi_y \delta \Omega_{xy} + \Omega_{xy} \delta \Psi_y) + \Psi_y^{(0)} (\Psi_x \delta \Omega_{xy} + \Omega_{xy} \delta \Psi_x) \} \right] \sqrt{g} dx dy \\ & + \iint_A D \left[\Gamma_x \delta \Gamma_x - \Omega_x \delta \Phi_x - \Phi_x \delta \Omega_x + \Gamma_y \delta \Gamma_y - \Omega_y \delta \Phi_y - \Phi_y \delta \Omega_y + \nu (\Gamma_x \delta \Gamma_y - \Omega_x \delta \Phi_y - \Phi_y \delta \Omega_x + \Gamma_y \delta \Gamma_x \right. \\ & \left. - \Omega_y \delta \Phi_x - \Phi_x \delta \Omega_y) + \frac{1-\nu}{2} (\Gamma_{xy} \delta \Gamma_{xy} - \Omega_{xy} \delta \Phi_{xy} - \Phi_{xy} \delta \Omega_{xy}) - \Psi_x^{(0)} (\Psi_x \delta \Phi_x + \Phi_x \delta \Psi_x) \right. \\ & \left. - \Psi_y^{(0)} (\Psi_y \delta \Phi_y + \Phi_y \delta \Psi_y) - \nu \{ \Psi_x^{(0)} (\Psi_x \delta \Phi_y + \Phi_y \delta \Psi_x) + \Psi_y^{(0)} (\Psi_y \delta \Phi_x + \Phi_x \delta \Psi_y) \} \right. \\ & \left. - \frac{1-\nu}{2} \{ \Psi_x^{(0)} (\Psi_y \delta \Phi_{xy} + \Phi_{xy} \delta \Psi_y) + \Psi_y^{(0)} (\Psi_x \delta \Phi_{xy} + \Phi_{xy} \delta \Psi_x) \} \right] \sqrt{g} dx dy \\ & + \iint_A \{ N_{\bar{x}\bar{x}}^{(0)} \Psi_x \delta \Psi_x + N_{\bar{y}\bar{y}}^{(0)} \Psi_y \delta \Psi_y + N_{\bar{x}\bar{y}}^{(0)} (\Psi_y \delta \Psi_x + \Psi_x \delta \Psi_y) \} \sqrt{g} dx dy \\ & - \Omega^2 \iint_A \rho t \left[\left(u - \frac{ky}{\sqrt{g}} w \right) \delta \left(u - \frac{ky}{\sqrt{g}} w \right) + \left(-ky \sin \phi \cos \phi u + \cos^2 \phi v - \frac{1}{\sqrt{g}} \sin \phi \cos \phi w \right) \delta v \right. \\ & \left. + \left(ky \sin^2 \phi u - \sin \phi \cos \phi v + \frac{1}{\sqrt{g}} \sin^2 \phi w \right) \delta \left(ky u + \frac{1}{\sqrt{g}} w \right) \right] \sqrt{g} dx dy \\ & - \Omega^2 \iint_A \rho t \left\{ (x_0 + x) \delta \left(u - \frac{ky}{\sqrt{g}} w \right) + y \cos^2 \phi \delta v - y \sin \phi \cos \phi \delta \left(ky u + \frac{1}{\sqrt{g}} w \right) \right\} \sqrt{g} dx dy = 0 \quad \dots\dots\dots (13) \end{aligned}$$

ただし、 $H = Et/(1-\nu^2)$, $D = Et^3/[12(1-\nu^2)]$, また、合応力 $N_{\bar{x}\bar{x}}^{(0)}, N_{\bar{y}\bar{y}}^{(0)}, N_{\bar{x}\bar{y}}^{(0)}$ を次式のように定義する。

$$N_{\bar{x}\bar{x}}^{(0)} = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_{\bar{x}\bar{x}}^{(0)} dz, \quad N_{\bar{y}\bar{y}}^{(0)} = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_{\bar{y}\bar{y}}^{(0)} dz, \quad N_{\bar{x}\bar{y}}^{(0)} = \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{\bar{x}\bar{y}}^{(0)} dz \quad \cdots \cdots (14)$$

解析は式(13)を用いレイリー・リッツ法で行う。まず、変位 u, v, w を辺 $x=0$ での固定条件 ($u=v=w=0, \partial w/\partial x=0$) を満たす x, y のべき級数で

$$u = \sum_{i=1} \sum_j a_{ij} x^i y^j, \quad v = \sum_{i=1} \sum_m b_{im} x^i y^m, \\ w = \sum_{p=2} \sum_q c_{pq} x^p y^q \quad \cdots \cdots (15)$$

と仮定する。ただし、 a_{ij}, b_{im}, c_{pq} は未知係数である。

仮定変位、式(15)、を式(13)に代入し、板全体にわたる積分を行えば、未知係数に関する次の連立方程式が導かれる。積分は Gauss-Legendre の数値積分法で行う(振動解析の場合も同じ)。

$$[K + \bar{\Omega}^2 \{K_u(u^{(0)}) + K_N(N^{(0)}) + K_f\}]a = \bar{\Omega}^2 F \quad \cdots \cdots (16)$$

ここに、 K は回転していないねじれた板の剛性マトリックス、 $K_u(u^{(0)})$ は初期変位を含む剛性マトリックス、 $K_N(N^{(0)})$ は初期応力を含む剛性マトリックス、 K_f は変形によって生じた遠心力の増加による剛性マトリックス、 a は未知係数からなるベクトル、 F は荷重ベクトル、 $\bar{\Omega} = \Omega/\omega_0$ は無次元回転速度、 ω_0 は回転していないねじれた板の一次固有角振動数である。

変位の解析手順は、まずある無次元回転速度に対し、 $K_u(u^{(0)}) = K_N(N^{(0)}) = 0$ として式(16)から a を求め、変位と合応力を式(15)、(14)から計算する。次に、得られた変位、合応力を初期変位および初期応力として式(16)の剛性マトリックスを計算し、 a の修正値を求める。新たに得られた a を用い変位、合応力の修正値を計算する。以上の計算手順を繰返すことによって変位および応力の収束値が求められる。

3.2 遠心力場にあるねじれた板の振動解析法

遠心力場にあるねじれた板の振動は、3.1節で得られた変位、応力を初期変位 ($u^{(0)}, v^{(0)}, w^{(0)}$)、および初期応力 ($\sigma_{\bar{x}\bar{x}}^{(0)}, \sigma_{\bar{y}\bar{y}}^{(0)}, \tau_{\bar{x}\bar{y}}^{(0)}$)、としてもつねじれた板の振動として解析される。遠心力場にあるねじれた板の自由振

動に関する仮想仕事の原理は、式(13)の左辺の最終項(遠心力の仮想仕事)を次に示す慣性力の仮想仕事に置き換えることによって導かれる⁽⁵⁾。

$$- \iint_A \rho \omega^2 t \sqrt{g} (gu \delta u + v \delta v + w \delta w) dx dy \quad \cdots (17)$$

ただし、 ω は角振動数である。

仮想変位、式(15)、を仮想仕事の原理に代入し、板全体について積分を行うと次の同次連立方程式が導かれる。

$$[K + \bar{\Omega}^2 \{K_u(u^{(0)}) + K_N(N^{(0)}) + K_f - \lambda^2 M\}]a = 0 \quad \cdots \cdots (18)$$

ここに、 M は質量マトリックス、 λ は振動数パラメータで、変厚のねじれた板への適用も考慮して、

$$\lambda^2 = \frac{\rho t_0 a^4 \omega^2}{D_0} \quad \cdots \cdots (19)$$

と定義する。ただし、 $D_0 = Et_0^3 / \{12(1-\nu^2)\}$ 、 t_0 は代表点の板厚である。速度 $\bar{\Omega}$ で回転しているねじれた板の振動数パラメータ λ は、次の振動数方程式から固有値問題の解として求められる。

$$|K + \bar{\Omega}^2 \{K_u(u^{(0)}) + K_N(N^{(0)}) + K_f - \lambda^2 M\}| = 0 \quad \cdots \cdots (20)$$

4. 解析結果

本報告では等厚のねじれた長方形板を対象とする。すると、遠心力によって生じる変位 u は x 軸に關し対称、 v, w は逆対称となるので、仮定変位は、式(15)で j を偶数、 m, q を奇数に設定する。また、振動は曲げ振動(j : 奇数、 m, q : 偶数)とねじれ振動(j : 偶数、 m, q : 奇数)が互いに独立して生じるため、それぞれ別個に解析する。

4.1 初期変位・初期応力決定の繰返し計算数による振動数パラメータ λ の収束状況 遠心力によって生じる応力および変位計算の繰返し数 N が振動数パ

Table 1 Convergence of λ with increasing reiteration number to obtain initial stresses and displacements ($b/a=0.5, b/t=20, K=60^\circ, \alpha=0^\circ, X_0=0, \bar{\Omega}=1$)

No. \ N	0	1	2	Mode
1	3.3036	4.7577	4.7571	F1
2	14.789	16.156	16.156	F2
3	30.060	29.723	29.726	T1
4	49.743	51.030	51.031	P1
5	76.599	76.315	76.313	F3
6	79.831	78.944	78.946	T2
7	94.347	94.402	94.403	F4
8	115.13	116.25	116.26	F5
9	119.73	118.58	118.58	T3
10	134.08	134.02	134.02	F6

Table 2 Convergence of λ with increasing number of terms in assumed displacement functions ($b/a=0.5, b/t=20, K=60^\circ, \alpha=0^\circ, X_0=0, \bar{\Omega}=1$)

No.	20-20-20	25-25-25	30-30-30
1	4.7608	4.7586	4.7571
2	16.166	16.161	16.156
3	29.742	29.729	29.726
4	51.050	51.040	51.031
5	76.457	76.349	76.313
6	79.001	78.970	78.946
7	94.459	94.412	94.403
8	117.05	116.29	116.26
9	119.67	118.60	118.58
10	134.38	134.14	134.02

(a) $K=0^\circ$ (b) $K=45^\circ$ Fig. 2 Variation of λ with speed of rotation

ラメータ λ に及ぼす影響を調べる。幅と長さの比 $b/a=0.5$ 、幅と板厚の比 $b/t=20$ 、板先端の初期ねじれ角 $K=60^\circ$ 、取付け角 $\alpha=0^\circ$ 、取付け長さ $X_0=x_0/a=0$ の板について、回転速度 $\bar{\Omega}=1$ における λ を求めた。なお、変位関数 u, v, w は初期変形解析、振動解析とともに各 30 項で近似した⁽¹¹⁾。また、本報告ではポアソン比を $\nu=0.3$ とした。

表 1 に結果を示す。表 1 で、 F, T, P はそれぞれ曲げ、ねじれ、面内振動(初期ねじれのない板の面内振動に対応)を表し、数字は各振動の次数を示す。

初期変位、初期応力算定の繰返し計算回数は 2 回で十分なことがわかる。しかし、一般に 2 回の繰返し計算によってねじれた板の遠心力による変形、応力の収束解を得ることは難しい。このことは逆に、振動解析の場合、遠心力によって生じた変位、応力は収束値でなくとも、板全体として妥当な変位、応力分布であればよいことを示している。

4.2 仮定変位関数の近似項数による λ の収束状況

4.1 節で解析した板と同じ寸法および初期ねじれを有する板を対象に、 $\bar{\Omega}=1$ の場合、変位関数の近似項

Table 3 Effect of setting angle and speed of rotatim on λ ($b/a=0.5$, $b/t=20$, $X_0=0$)(a) $K=30^\circ$

No.	Mode	$\alpha=0^\circ$				$\alpha=45^\circ$			$\alpha=90^\circ$		
		0	0.4	0.8	1.0	0.4	0.8	1.0	0.4	0.8	1.0
1	F1	3.434	3.729	4.494	4.988	3.577	3.973	4.245	3.478	3.600	3.682
2	F2	19.04	19.30	20.06	20.62	19.29	20.02	20.55	19.26	19.91	20.38
3	T1	20.20	20.15	20.02	19.95	20.07	19.69	19.40	20.20	20.23	20.25
4	P1	54.76	54.94	55.46	55.82	54.95	55.52	55.91	54.94	55.46	55.83
5	T2	58.64	58.52	58.19	57.96	58.49	58.04	57.69	58.72	58.97	59.16
6	F3	66.72	66.68	66.61	66.59	66.64	66.43	66.29	66.80	67.07	67.29
7	F4	93.48	93.49	93.54	93.57	93.46	93.42	93.38	93.49	93.53	93.56
8	T3	100.8	100.7	100.4	100.2	100.7	100.2	99.91	101.0	101.4	101.7

(b) $K=60^\circ$

No.	Mode	$\alpha=0^\circ$				$\alpha=45^\circ$			$\alpha=90^\circ$		
		0	0.4	0.8	1.0	0.4	0.8	1.0	0.4	0.8	1.0
1	F1	3.409	3.661	4.324	4.757	3.496	3.742	3.915	3.428	3.471	3.491
2	F2	15.02	15.21	15.76	16.16	15.21	15.77	16.17	15.22	15.79	16.20
3	T1	30.15	30.08	29.88	29.73	30.09	29.88	29.72	30.16	30.17	30.18
4	P1	49.81	50.01	50.06	51.03	50.02	50.64	51.10	50.02	50.63	51.09
5	F3	76.63	76.58	76.43	76.31	76.60	76.52	76.45	76.68	76.84	76.95
6	T2	79.86	79.71	79.28	78.95	79.78	79.55	79.37	79.87	79.92	79.96
7	F4	94.38	94.39	94.40	94.40	94.39	94.42	94.43	94.42	94.52	94.60
8	T3	119.8	119.6	119.0	118.6	119.7	119.4	119.2	119.8	120.0	120.1

Fig. 3 Variation of λ with setting length ($K=45^\circ$, $\alpha=0^\circ$)

数を増加して振動数パラメータの収束状況を調べた。

表2がその結果である。表2中の数字 $n-n-n$ は変位関数 u, v, w の近似項数を表す。 u, v, w とともに30項で近似すれば十次まで収束した振動数パラメータが得られることがわかる。

4.3 既存の解析解との比較 Sreenivasamurthy ら⁽⁵⁾ は初期ねじれによる面内変形と面外変形の連成を考慮した有限要素法を用い、遠心力場にあるねじれた板の振動数パラメータに及ぼす回転速度、取付け角、取付け長さの影響を系統的に解析している。

図2(a), (b)は $b/a=0.5$, $b/t=4.167$, $K=0^\circ, 45^\circ$,

Table 4 Effect of setting length on λ ($b/a=0.5$, $b/t=20$, $K=60^\circ$, $\alpha=0^\circ$, $\bar{\Omega}=1$)

No.	Mode	X_0				
		0.0	0.5	1.0	1.5	2.0
1	F1	4.757	5.514	6.174	6.765	7.306
2	F2	16.16	17.01	17.82	18.60	19.35
3	T1	29.73	29.59	29.45	29.31	29.19
4	P1	51.03	51.91	52.75	53.55	54.33
5	F3	76.31	76.24	76.17	76.10	76.04
6	T2	78.95	78.67	78.40	78.13	77.86
7	F4	94.40	94.46	94.51	94.54	94.56
8	T3	118.6	118.3	118.0	117.7	117.5

$\alpha=0^\circ, 45^\circ, 90^\circ$, $X_0=0$ の板について、回転速度の変化 $\bar{\Omega}=0\sim 1$ に対する振動数パラメータ λ の変化を、本解析法の結果と比較して示した図である。図2中の実線は本解析法で得られた λ , 破線は文献(5)から転写した値である。

回転速度の増加による λ の変化は、初期ねじれ角および取付け角の大きさにかかわらず両解析結果はよく一致している。両者の差はP1振動でやや大きいものの、それ以外の振動では5%以下である。なお、回転していない板の振動数パラメータ間にも同程度の差が認められることから、この差は回転の影響によって生じたものではなく、両解析法の精度の差に起因すると考えられる。

取付け長さの違いによる振動数パラメータの変化を、 $b/a=0.5$, $b/t=4.167$, $K=45^\circ$, $\alpha=0^\circ$, $\bar{\Omega}=1$ の場

合について図3に示す。実線は本解析法による値、●印は文献(5)のグラフから転写した λ の値である。文献(5)には面内振動の二次(P2)および曲げ振動の三次(F3)の解析結果は示されていない。

両解析結果はよく一致している。

以上の結果より、本報告で示したねじれた板の非線形ひずみ・変位関係および仮想仕事の原理は、遠心力場にあるねじれた板の自由振動解析に有用であることがわかった。

4.4 遠心力場にあるねじれた薄板の振動解析結果

Sreenivasamurthyらが解析した板は $b/t=4.167$ と板厚が厚く、むしろ厚板として解析すべき寸法の板である⁽¹²⁾。そこで、本節では遠心力場におけるねじれた薄板の振動特性に及ぼす回転速度、取付け角および取付け長さの影響を明らかにするため、 $b/a=0.5$, $b/t=20$ の板について、回転速度($\bar{\Omega}=0\sim 1$)、初期ねじれ角($K=30^\circ, 60^\circ$)、板の取付け角($\alpha=0^\circ, 45^\circ, 90^\circ$)、および取付け長さ($X_0=0\sim 2$)を変化させて振動解析を行った。なお、初期ねじれのない板では面内振動と面外振動が連成しないため、面外振動に対する回転速度の影響は4.3節の結果とほとんど同じである。したがって、初期ねじれのある板についてのみ結果を示す。

表3(a), (b)は初期ねじれ角 $K=30^\circ, 60^\circ$ の板の振動数パラメータ λ の解析結果である。

一次および二次の曲げ振動の λ は回転速度の増加に伴って大きくなり、しかも一次振動数パラメータへの影響が顕著である。これに反し、三次以上の曲げ振動、ねじれ振動は、回転速度が $\bar{\Omega}=1$ の場合でも1%程度の変化で、ほとんど影響がないといえる。また、面内振動(P1)の λ も3%程度の増加である。

また、取付け角度 α が 0° から 90° と大きくなるに従い、回転速度による λ の増加率は、一次の曲げ振動では減少するが(例えば、 $K=30^\circ$, $\alpha=0^\circ$ の板で $\bar{\Omega}=1$ の λ は40%の増加であるが、 $\alpha=90^\circ$ の場合は7%)、二次の曲げ振動では取付け角の大きさの違いによる変化はなく、いずれの取付け角に対しても $\bar{\Omega}=1$ で7~8%の増加である。

最後に、取付け長さが振動パラメータに及ぼす影響を明らかにするため、 $b/a=0.5$, $b/t=20$, $K=60^\circ$, $\alpha=0^\circ$ の板について、 $\bar{\Omega}=1$ の場合、取付け長さを $X_0=0\sim 2$ と変化させ解析した。結果を表4に示す。

取付け長さが長くなるに従い一次、二次の曲げ振動および面内振動の λ は大きくなる。特に、曲げ一次振動の λ の増加は顕著である。

Table 5 Transfer factor $\partial\alpha^k/\partial y^i$

$i \backslash k$	1	2	3
1	$\frac{1}{\sqrt{g}}$	$\frac{kz}{g}$	0
2	$\frac{kz}{g\sqrt{g}}$	1	0
3	0	0	1

5. む す び

遠心力場にあるねじれた薄板の自由振動解析に必要な諸関係式を提示した。

まず、遠心力によって生じた変位を初期変位とするねじれた板の正確なひずみ・変位関係を薄肉殻理論に基づいて導き、次に、得られたひずみ・変位関係、および遠心力によって生じた応力を用い、ねじれた板の自由振動に関する仮想仕事の原理を定式化した。

導いた仮想仕事の原理を使用し、レイリー・リッツ法による振動解析法を提案するとともに、板の振動数パラメータへ及ぼす回転速度、取付け角度、取付け長さの影響を解析した。解析結果は既存の解とよく一致し、本報で提示した関係諸式は、遠心力場にあるねじれた板の自由振動解析に有用であることが明らかになった。

また、回転速度および板取付け長さの増加によって、 $b/a=0.5$, $b/t=20$, $K=30^\circ, 60^\circ$ の薄板の一次および二次曲げ振動数パラメータは増大し、ねじれ振動にはほとんど影響がないことがわかった。

付 録

(A) 式(3)の変換係数 $\partial\alpha^k/\partial y^i$ は表5の値を用いる⁽⁸⁾。ただし、薄板を対象としているので $1-k^2z^2/g^2 \approx 1$ と近似する。

(B) 板の固定辺($x=x_0$)において x, y, z 方向単位ベクトルを i_i ($i=1, 2, 3$)とすると(図1参照)、変位ベクトル U は次式で表される⁽⁸⁾。

$$U = \left(U - \frac{ky}{\sqrt{g}} W \right) i_1 + Vi_2 + \left(kyU + \frac{1}{\sqrt{g}} W \right) i_3 \quad \dots\dots\dots (21)$$

また、板の単位体積に働く遠心力ベクトルは、変位 U を考慮すれば⁽¹⁾

$$F = \rho\Omega^2 \left[\left(x_0 + x + U - \frac{ky}{\sqrt{g}} W \right) i_1 + \left\{ (y + V) \cos^2 \phi \right. \right.$$

$$\begin{aligned}
& -\left(kyU + \frac{1}{\sqrt{g}}W\right) \sin \phi \cos \phi \Big\} i_2 \\
& + \left\{ -(y+V) \sin \phi \cos \phi \right. \\
& \left. + \left(kyU + \frac{1}{\sqrt{g}}W\right) \sin^2 \phi \right\} i_3 \Big] \dots\dots\dots (22)
\end{aligned}$$

である。したがって、単位体積に働く遠心力のなす仮想仕事は

$$\begin{aligned}
F\delta U = & \rho\Omega^2 \left[\left(x_0 + x + U - \frac{ky}{\sqrt{g}}W \right) \delta \left(U - \frac{ky}{\sqrt{g}}W \right) \right. \\
& + \left\{ (y+V) \cos^2 \phi \right. \\
& - \left. \left(kyU + \frac{1}{\sqrt{g}}W \right) \sin \phi \cos \phi \right\} \delta V \\
& + \left\{ -(y+V) \sin \phi \cos \phi \right. \\
& \left. + \left(kyU + \frac{1}{\sqrt{g}}W \right) \sin^2 \phi \right\} \delta \left(kyU + \frac{1}{\sqrt{g}}W \right) \Big] \\
& \dots\dots\dots (23)
\end{aligned}$$

と表される。

文 献

- (1) Dokainish, M. A. and Rawtani, S., *AIAA J.*, **10**-11 (1972), 1397.
- (2) MacBain, J. C., *J. Aircraft*, **12**-4 (1975), 343.
- (3) Henry, R. and Lalanne, M., *Trans. ASME, J. Eng. Ind.*, **96**-3 (1974), 1082.
- (4) Ramamurti, V. and Kielb, R., *J. Sound Vib.*, **97**-3 (1984), 429.
- (5) Sreenivasamurthy, S. and Ramamurti, V., *J. Sound Vib.*, **76**-3 (1981), 311.
- (6) Leissa, A. W., Lee, J. K. and Wang, A. J., *ASME Paper*, No. 81-DET-127 (1981), 1.
- (7) Kielb, R. E., Leissa, A. W. and MacBain, J. C., *Int. J. Num. Meth. Eng.*, **21**-8 (1985), 1365.
- (8) 築地・末岡, 機論, **52**-484, C (1986), 3042.
- (9) Washizu, K., *Variational Methods in Elasticity and Plasticity*, 2nd ed., (1975), 85, Pergamon Press.
- (10) Novozhilov, V. V., *Foundations of the Nonlinear Theory of Elasticity*, (1953), 182, Graylock Press.
- (11) 築地・山下, 機論, **54**-502, C (1988), 1159.
- (12) 板倉・築地, 機論, **59**-558, C (1993), 315.