自己アフィンフラクタル表面の流体潤滑*

杉 村 丈 一^{*1}, 山 本 雄 二^{*1}

Hydrodynamic Lubrication of Self-Affine Fractal Surfaces

Joichi SUGIMURA and Yuji YAMAMOTO

Hydrodynamic lubrication of an inclined slider bearing having self-affine fractal roughness is analyzed using the perturbation expansion of the Reynolds equation. Fractal characteristics are incorporated in the perturbation equations in terms of the power-law autocorrelation function defined by the fractal dimension and the correlation length. It is shown that the effect of transverse roughness in increasing the load capacity from that of smooth surfaces depends strongly on its fractal structure. The load capacity is larger for smaller correlation length, and the fractal dimension affects the load capacity in particular when the correlation length is larger than 1/100 of the bearing length. Contribution of surface asperities with different wavelengths to pressure generation is explained based on a flow simulation for sinusoidal roughness. The present results suggest that the effect of fractal structure of surfaces should be taken into account not only when the overall load capacity of a bearing is considered, but also when microscopic film formation on small asperities and their behavior are of interest.

Key Words: Tribology, Surface Roughness, Lubrication, Fractal, Hydrodynamic Bearing, Autocorrelation, Perturbation Expansion

1. は じ め に

流体潤滑における表面粗さの影響は、従来より平均流モデルに代表される確率論的アプローチと、マイクロEHL解析などの決定論的アプローチとの、異なる二つの方向から研究されてきた⁽¹⁾。前者は、表面凹凸のランダムさを何らかの分布によって与えるものであり、表面粗さの平均的な寄与を知るためには有効であるが、突起の形状や配置を考慮に入れることは困難である。一方後者は、表面突起の形を直接与えるもので、近年の表面形状測定技術やコンピュータの進歩を背景に、より実際に近い詳細な数値解析などが行われるようになった。しかし、ランダムな凹凸が少なくとも原子スケールまで存在することを考えた場合、どこまで細かく解析すべきかという問題がつきまとう。

表面粗さの問題は、本質的に形状の単純化のみによって解明できるものではなく、幅広いスケールにわたるランダムさをどう扱うかが解決の決め手となるように思われる。特に、表面の凹凸が潤滑膜の厚さと同程度になるようなEHLや混合潤滑状態における、表

面微小突起の変形挙動や潤滑油の非ニュートン性の影響などが解明されつつある今日⁽²⁾⁽³⁾においては、表面粗さの効果の総合的な理解のために、上述の両アプローチの接点を見いだすことが必要である。

フラクタル幾何学は、このような様々なスケールのランダムさを一貫して取扱う数学的手段として登場した。トライボロジーの分野では、Majumdarらが表面突起の接触と変形におけるスケールの効果を考慮に入れた接触のフラクタルモデルを提案した⁽⁴⁾⁽⁵⁾。本研究では、流体潤滑問題へのフラクタルによるアプローチの第一歩として、粗さのフラクタル構造を自己相関関数によって記述し、それに基づいて一次元流体潤滑問題におけるフラクタルの影響を調べた。

2. 傾斜平面軸受とフラクタル表面

2.1 無限幅傾斜平面軸受 図1に示すような無限幅傾斜平面パッド軸受を例題として解析を進める。問題を簡単にするために、下側の運動平面は平滑面とし、傾斜平面パッド側に、下面の運動方向と直角に一次元粗さ、すなわち直交粗さがある場合を考える。

図からわかるように、膜厚 h は巨視的膜厚 h_0 と粗さをもつ面の高さ z として、

$$h = h_0 - z \quad \cdots \cdots (1)$$

* 原稿受付 1995 年 2 月 22 日。

*¹ 正員, 九州大学工学部 (〒812 福岡市東区箱崎 6-10-1)。

図1 粗さをもつ傾斜平面軸受

のように与えられる。ここで h_s は、入口膜厚 h_1 、出口膜厚 h_0 、および軸受長さ B を用いて

$$h_s = h_1 - (h_1 - h_0)x/B \quad \dots\dots\dots(2)$$

であり、一方 z は平均0、分散 σ^2 のランダム変動とする。すなわち σ は粗面の自乗平均粗さに等しい。

表面粗さがレイノルズ粗さの条件を満たすとし、非圧縮性、等粘度流体を仮定すると、一次元レイノルズ方程式は、

$$\frac{d}{dx} \left(h^3 \frac{dp}{dx} \right) = 6\eta U \frac{dh}{dx} \quad \dots\dots\dots(3)$$

となる。ここで、 p は圧力、 η は流体の粘度、 U は下面の速度である。

通常の手法にならって、以下のような無次元変数を導入する。

$$X = x/B \quad \dots\dots\dots(4)$$

$$P = h_0^2 p / 6 \eta UB \quad \dots\dots\dots(5)$$

$$H = h/h_0 = H_s - \epsilon Z \quad \dots\dots\dots(6)$$

$$H_s = 1 + K - KX \quad \dots\dots\dots(7)$$

ここで、傾斜比 $K = (h_1 - h_0)/h_0$ であり、粗さの項は基準化高さ $Z = z/\sigma$ と、膜厚比の逆数 $\epsilon = \sigma/h_0$ の積で表されている。これらを用いると式(3)は次のようになる。

$$\frac{d}{dX} \left(H^3 \frac{dP}{dX} \right) = \frac{dH}{dX} \quad \dots\dots\dots(8)$$

境界条件 $P(X=0) = P(X=1) = 0$ のもとで上式を解けば圧力分布 $P(X)$ が得られ、 P を積分することにより負荷容量が求まる。粗さのない平滑面の場合の定常解 P_0 はよく知られているように、

$$P_0 = \frac{K^2 X(1-X)}{K(2+K)(1+K-KX)^2} \quad \dots\dots\dots(9)$$

であり、単位幅当りの無次元負荷容量 W_0 は、

$$W_0 = \frac{1}{K^2} \left\{ \log(1+K) - \frac{2K}{2+K} \right\} \quad \dots\dots\dots(10)$$

である⁽⁶⁾。

2.2 自己アフィンフラクタル表面 Majumdarら

は、様々な摩擦面の表面粗さを光学式粗さ計とSTMで測定し、表面の凹凸の変動が0.1mmから数十nmにわたる広い波長範囲で自己アフィンフラクタルの性質を持

図2 自己アフィンフラクタル表面

つことを示した⁽⁴⁾。表面粗さ曲線の場合の自己アフィン性とは、図2のように曲線の一部を拡大してみたときに、横方向は $1/r$ 倍し ($r < 1$)、一方縦方向は $1/r^{2-D}$ 倍すると統計的に相似の形状が現れる性質をいう。ここで、 D はフラクタル次元であり、フラクタル曲線の場合 $1 < D < 2$ 、曲面の場合 $2 < D < 3$ の範囲にある。フラクタル次元 D が大きいとき、縦方向の小さい拡大率で類似の図形が得られる、つまり曲線は短波長の変動成分を多く含んでいる。一方、 D が小さい場合は逆に短い波長の成分が少なく、細かく見ればみるほど曲線はなめらかに見えるようになる。ただし、一般的にこのような性質は長波長側で成立しなくなることがある。これは、対象とする面が見かけ上平らであるときに、横方向の寸法と同程度のオーダーの波長の変動成分がほとんど含まれない場合である。

自己アフィンフラクタルは、その曲線の自己相関関数 $R(\tau)$ あるいはパワースペクトル $S(f)$ におけるべき乗則によって記述することができる。図3はそれらの関数の形を模式的に示したものであるが、自己アフィン性の成立する部分では、自己相関関数はラグ τ の $4-2D$ 乗に比例して低下し、パワースペクトルは周波数 f の $5-2D$ 乗に反比例する⁽⁷⁾。長波長側の非フラクタル部ではこのべき乗則からはずれる。これを単純化したものが図3(a)の自己相関関数であり、相関距離 λ_0 以上で自己相関関数はゼロである。すなわち、

$$R(\tau) = \begin{cases} \sigma^2 \{ 1 - (\tau/\lambda_0)^{4-2D} \}, & |\tau| \leq \lambda_0 \\ 0, & |\tau| > \lambda_0 \end{cases} \quad \dots\dots(11)$$

ただし、相関距離とは通常、基準化した自己相関の値が $1/e$ あるいは0.1となるラグを呼ぶのに対し、ここでは便宜上、自己相関の値がゼロとなる距離 λ_0 を相関距離と呼ぶことにする。

2.3 摂動法による近似解

微分方程式が微小パラメータ ϵ を含んでいるときの近似解法として、解を ϵ のべき級数の形に求める摂動法がある。レイノルズ方程式の場合には、膜厚の粗さの項(式(6)の右辺第

図3 粗さ曲線の自己相関関数とパワースペクトル

2項 ϵZ が微小のときにこの方法が適用可能であり、過去にSun⁽⁸⁾、Bush⁽⁹⁾が採用している。本研究では、この方法にならって摂動方程式を導き、それに基づいて軸受の負荷容量の期待値を求める。

無次元膜厚の式(6)に対応して圧力 P を $\epsilon = 0$ 付近で展開し、2次の項までとると、

$$P = P_0 + \epsilon P_1 + \epsilon^2 P_2 \quad \dots\dots\dots(12)$$

式(6),(12)をレイノルズ方程式(8)に代入し、 ϵ のべき級数の係数比較により

$$\frac{d}{dX} \left(H_s^3 \frac{dP_0}{dX} \right) = \frac{dH_s}{dX} = -K \quad \dots\dots(13)$$

$$\frac{d}{dX} \left(H_s^3 \frac{dP_1}{dX} \right) = -\frac{dZ}{dX} + \frac{d}{dX} \left(3H_s^2 Z \frac{dP_0}{dX} \right) \quad \dots\dots(14)$$

$$\frac{d}{dX} \left(H_s^3 \frac{dP_2}{dX} \right) = -\frac{d}{dX} \left(3H_s Z^2 \frac{dP_0}{dX} \right) + \frac{d}{dX} \left(3H_s^2 Z \frac{dP_1}{dX} \right) \quad \dots\dots(15)$$

を得る。

非摂動解 P_0 は平滑面に対する解の式(9)に等しく、摂動解 P_1 と P_2 は、 $X=0$ 及び $X=1$ において $P_1 = P_2 = 0$ の境界条件を与えて求めることができる。粗さ Z が決定論的

図4 圧力分布の直接解と摂動解；余弦波粗さの場合

に与えられている場合は、式(14),(15)を順に解いて得られた P_1 と P_2 を、式(12)に代入することにより近似解が求まる。

図4に、パッド上に余弦波状の粗さ：

$$Z(X) = \cos(2\pi X/0.1) \quad \dots\dots\dots(16)$$

がある場合について、 ϵ が0.5のときの摂動解を示す。図中には、膜厚形状を直接レイノルズ方程式(8)に代入して求めた解を P として示す。近似解は直接解よりも低めであるが、よい近似を与えていることがわかる。分散が1のランダム変動の場合は、Bush⁽⁹⁾も述べているように、 ϵ が0.3以下であれば十分よい近似解が得られるようである。また、1次の摂動解 P_1 は粗さによる膜厚の変動を反映しているものの平均的にはゼロであり、平滑面に対する負荷容量の増加はほとんど2次の摂動解 P_2 によることがわかる。

2.4 摂動解の期待値 上述の摂動法は、粗さ Z が陽に与えられていない場合には、期待値を求める方法に発展させることができる⁽⁸⁾⁽⁹⁾。以下では、期待値を記号 $\langle \rangle$ を用いて表すことにする。

基準化された高さ Z が、 $\langle Z \rangle = 0$ 、 $\langle Z^2 \rangle = 1$ を満たすことを考慮して、式(14),(15)の両辺の期待値をとると、式(14)からは $\langle P_1 \rangle = 0$ 、式(15)からは、

$$\frac{d}{dX} \left(H_s^3 \frac{d\langle P_2 \rangle}{dX} \right) = -\frac{d}{dX} \left(3H_s \frac{dP_0}{dX} \right) + 3H_s^2 \frac{d}{dX} \langle Z \frac{dP_1}{dX} \rangle \quad \dots\dots(17)$$

を得る。この式から $\langle P_2 \rangle$ を求めるためには、右辺に含

まれる $\langle Z dP_1/dX \rangle$ を与える必要がある。そこで、式(14)の解をグリーン関数 $G(X, \xi)$ を用いて形式的に書くと、

$$P_1(X) = \int_0^1 G(X, \xi) \left[\frac{dZ(\xi)}{d\xi} - \frac{d}{d\xi} (3H_s^2 Z(\xi) \frac{dP_0}{d\xi}) \right] d\xi$$

$$= \int_0^1 G(X, \xi) \left[u(\xi, K) \frac{dZ(\xi)}{d\xi} + v(\xi, K) Z(\xi) \right] d\xi \quad \cdots(18)$$

ただし、

$$u(\xi, K) = -2 + \frac{6(1+K)}{(2+K)(1+K-K\xi)} \quad \cdots(19)$$

$$v(\xi, K) = \frac{6K(1+K)}{(2+K)(1+K-K\xi)^2} \quad \cdots(20)$$

$G(X, \xi)$ は本問題の場合は、例えば次のようになる。

$$G(X, \xi) = \begin{cases} y_2(\xi)y_1(X), & X \leq \xi \\ y_1(\xi)y_2(X), & X \geq \xi \end{cases} \quad \cdots(21)$$

$$y_1(X) = \frac{1}{(1+K-KX)^2} - \frac{1}{(1+K)^2} \quad \cdots(22)$$

$$y_2(X) = -\frac{(1+K)^2}{2K^2(2+K)} \left[\frac{1}{(1+K-KX)^2} - 1 \right] \quad \cdots(23)$$

式(18)を X で微分し、両辺に $Z(X)$ をかけた後、両辺の期待値をとり、 $Z(\xi)$ と $Z(X)$ の積の期待値（アンサンブル平均）が自己相関関数 $R(\xi-X)$ であることを考慮すると、

$$\langle Z \frac{dP_1}{dX} \rangle = \int_0^1 \frac{\partial G(X, \xi)}{\partial X} \left\{ u(\xi, K) \frac{dR(\xi-X)}{d\xi} + v(\xi, K) R(\xi-X) \right\} d\xi \quad \cdots(24)$$

となる。結局、表面粗さ曲線の自己相関関数を与えれば上式より $\langle Z dP_1/dX \rangle$ が求まり、式(17)により $\langle P_2 \rangle$ が得られる。以上より、表面粗さのフラクタル構造と発生圧力の期待値を直接結びつけることができた。

3. 計算結果と考察

3.1 摂動法の計算結果 自己相関関数を式(11)の形で与え、式(24)に基づいて $\langle Z dP_1/dX \rangle$ を数値積分により求めた後、式(17)を差分法によって解いて圧力の期待値を求めた。差分のきざみ数は16000とした。以下では得られた圧力分布を積分して得られる負荷容量比の期待値 $\langle W \rangle$ を様々なパラメータに対して示し、フラクタル構造の影響を議論する。

図5に、傾斜比 $K=1$ の軸受について、フラクタル次元 $D=1.2, 1.5, 1.8$ 、及び相関距離 $\lambda_0=0.01, 0.2, 1.0$ のときの負荷容量の微小パラメータ ϵ に対する変化を示す。図中、縦軸は負荷容量の期待値 $\langle W \rangle$ の、平滑面の解 W_0 に対する比である。以下ではこの比を負荷容量比と呼

(a) $\lambda_0 = 0.01$

(b) $\lambda_0 = 0.2$

(c) $\lambda_0 = 1.0$

図5 負荷容量比の微小パラメータ ϵ に対する変化；傾斜比 $K=1$

ぶ。図から明らかとなおり、従来の他の研究⁽⁸⁾⁽⁹⁾⁽¹⁰⁾⁽¹¹⁾と同様に、直交粗さは負荷容量を増加させ、その効果は ϵ が大きいほど顕著になっている。

$\lambda_0=0.01$ の場合は、フラクタル次元 D による違いはほとんどなく、パッド側に粗さがあるときの解は $\epsilon < 0.3$ の範囲で Christensen の統計モデル⁽¹⁰⁾ による解と類似していることがわかる。同モデルでは、平均レイノルズ方程式において粗さの高さの分布のみを与え、横方向の性質は考慮に入っていない。本解析においては、 λ_0 が小さい場合は、大部分の波長成分が非フラクタルで

図6 負荷容量比の相関距離による変化；
 $\epsilon = 1/3$ の場合

図7 負荷容量比の傾斜比による変化；
 $\epsilon = 1/3$ の場合

あり、全体としていわゆるホワイトノイズ的なランダム変動として働くために、同モデルと類似した結果をもたらしたと考えられる。

一方、 λ_0 が大きくなるとフラクタル次元 D による違いが現れる。 λ_0 が0.2, 1となるにしたがって負荷容量比は低下し、 D が小さいほど低下が著しい。図6は、 $\epsilon = 1/3$ の場合の負荷容量比と相関距離 λ_0 の関係を示したものであるが、 $\lambda_0 > 0.01$ で D による違いが現れている。相関距離が軸受長に一致する場合、すなわち表面粗さが完全なフラクタルである場合も、負荷容量は平滑面の場合よりも高いことがわかる。図6にはパッドの傾斜比 K がそれぞれ0.2と5の場合も併せて示しているが、負荷容量比のレベルは K によって異なるものの、 D による違いの傾向は $K=1$ の場合と類似していることがわかる。図7に、負荷容量比の傾斜比 K に対する変化を、 $\lambda_0 = 0.01, 0.2, 1.0$ の場合をまとめて示す。これより、 K が小さいほど、負荷容量比の粗さによる増加が大きく、かつ D による影響ははっきり現れることがわかる。

以上の性質は、自己相関関数の形の違いがもたらした

図8 正弦波粗さの負荷容量比

た結果であり、摂動法を用いたSunやBushらの解析でも得られなかったものである。Sun⁽⁸⁾は、自己相関関数を指数関数の形で与え、相関距離が大きいほど $\langle W \rangle$ が低いことを見いだしたが、関数形の違いによる影響には触れていない。Bush⁽⁹⁾は、指数関数と三角関数を組み合わせた自己相関関数を用いたが、対象として相関距離が0.01以下の表面を想定しているため、相関関数の形は効かないと仮定して解析を行っている。

本解析で採用した自己相関関数は、図3(a)からわかるように、フラクタル次元の違いによって原点付近の勾配が異なり、同一の相関距離 λ_0 でも低フラクタル次元のもののほどより遠い距離まで高い相関値をもつ。図5, 6の結果は、 λ_0 が大きい場合にこのような相関関数の性質が流体圧力発生に影響を及ぼすことを示している。言い換えれば、粗さに含まれる波長の成分の違いが影響を及ぼしたと考えることができる。そこで次節では、粗さ曲線として単一波長の正弦波を与えた場合の波長と負荷容量比の関係を調べ、フラクタル構造の影響について考察する。

3.2 負荷容量に及ぼす波長の影響 パッド面の粗さを波長 λ 、振幅 A 、位相 ϕ の正弦波：

$$Z(X) = A \sin(2\pi X / \lambda + \phi) \quad \cdots \cdots \cdots (25)$$

とし、これを直接レイノルズ方程式に代入して得られる負荷容量の ϕ に対する期待値 $\langle W \rangle$ を求めた。図8にパッドの傾斜比 K を1としたときの結果を示す。

個々の正弦波曲線に対する負荷容量比は ϕ によって異なり、出口付近に正弦波の正のピークがあるとき、すなわち膜厚が小さい場合に全体のくさび効果に影響を与えて高い圧力を発生する。これは振幅が大きいほど顕著である。波長の短い場合は、波が密なためにいずれの ϕ でも出口付近に膜厚のくびれが存在するが、波長が長くなるとおよそ $-\pi/2 < \phi < \pi/2$ の範囲で出口付近の膜厚が大きくなり、その結果、図8のよ

うに波長が長いほど負荷容量の期待値が低くなる。この傾向は振幅が大きいほど顕著になる。また、傾斜比 K が大きいほど粗さの効果が薄れることは、容易に想像できる。

このことを念頭に置いて、曲線に様々な波長の成分が含まれる場合について、図3(b)のパワースペクトルを参考にして考えると、負荷容量の増加を抑える長波長成分、すなわち低周波成分のパワーは、相関距離 λ_0 が大きいほど高い。また、 λ_0 が大きい場合にはさらにフラクタル次元 D が小さいほど顕著であり、 λ_0 が小さいときは D の違いは長波長成分の差をほとんど生じない。一方、短波長成分は λ_0 と D に大きく左右されるが、そのパワーはいずれにしても長波長成分に比べて桁違いに低いので、その差が直接全体の負荷容量に影響を及ぼすことはない。以上より、前節の結果は負荷容量の期待値と波長の関係によって矛盾なく説明できることがわかる。

3.3 フラクタルの役割 結局、表面粗さの負荷容量に及ぼす影響は、通常うねりと呼ばれるような曲線の長波長の変動に大きく左右されることがわかった。Christensen⁽¹⁰⁾やPatirとCheng⁽¹¹⁾のモデルに代表される粗さの統計的理論では、対象とする面内に十分多くの微小突起が存在するという前提に基づいているために、このような影響は考えられていない。その理由は、うねりはむしろ巨視的な形状として決定論的に扱われるべきと考えられていたためと思われるが、そもそも粗さとうねりの区別はあいまいであり、いずれも表面の幾何学的な変動として一貫して扱われるべきである。本研究の自己アフィンフラクタルとしての取り扱い扱いは、表面形状の影響を粗さとうねりの区別なく統一的に整理するひとつの方法を示したものである。

一方、軸受の寸法に比べて小さな波長の成分は、平均的な負荷容量の増加への寄与としては、従来の統計的理論が示すとおりホワイトノイズ的な変動として振る舞うことが本解析でも示された。しかし、軸受全体ではなく、その一部の挙動を論ずる際には、それらの成分のもつ意味は変わってくる。例えば、マイクロEHL状態における個々の微小突起先端での圧力発生と突起の変形挙動を論ずるような場合、その形状が完全なホワイトノイズでも完全なうねりでもない場面が十分に考えうる。すなわち、対象とする突起の寸法と相関距離が同程度のオーダーで、表面の変動の一部あるいは全体がフラクタルであるような場合である。そのような場合には、今回の解析で得られたような粗さの効果が個々の突起においても生ずるはずである。この問題は流体の挙動だけから論ずることはできないが、

潤滑膜の形成と破断のメカニズムをより小さなスケールにまでさかのぼって解明しようとする際に、表面のフラクタル構造を考慮に入れる意義が十分にあることを、本解析結果は示唆している。

4. ま と め

流体潤滑に及ぼす表面粗さのフラクタル構造の影響を、無限幅傾斜平面パッド軸受の場合について調べた。摂動法を用いることにより、支配方程式中に自己相関関数の形で粗さのフラクタル特徴を与えることができた。パッド側に直交粗さがある場合の軸受の負荷容量の期待値は、平滑面の場合よりも大きくなり、表面粗さの相関距離が小さいほど高くなる。相関距離が軸受長の1/100以上の場合には、フラクタル次元が大きいほど負荷容量が高く、相関距離が小さい場合は負荷容量はフラクタル次元に影響されないことがわかった。このような粗さの効果は、軸受の傾斜比が小さいほど顕著である。以上のフラクタル構造の影響は、軸受全体の平均的な負荷容量を論ずる場合だけでなく、より微視的な表面突起近傍での潤滑膜形成における粗さの影響を考える際にも考慮に入れるべきである。

最後に、本研究は平成4年度文部省科学研究補助金No.04855023により実施したことを付記する。

文 献

- (1) 平野, 潤滑, 27-2 (1982), 71-79.
- (2) 兼田, トライボロジスト, 38-7 (1993), 587-592.
- (3) 中原, トライボロジスト, 39-3 (1994), 220-228.
- (4) Majumdar A. and Bhushan B., ASME J. Tribol., 112-2(1990), 205-216.
- (5) Majumdar A. and Bhushan B., ASME J. Tribol., 113-1(1991), 1-13.
- (6) 例えば, Cameron A., The Principles of Lubrication, (1966), 101-128, Longmans.
- (7) Voss R. F., in Dynamics of Fractal Surfaces, Family F. and Vicsek T. eds., (1991), 40-50, World Scientific.
- (8) Sun D. C., Proc. Roy. Soc. Lond., A364 (1978), 89-106.
- (9) Bush A. W. and Gibson R. D., in Surface Roughness Effects in Hydrodynamic and Mixed Lubrication, Rohde S. M. and Cheng H. S. eds., (1980), 51-74, ASME.
- (10) Christensen H., Proc. Inst. Mech. Engrs., Pt. 1, 184-55 (1969-1970), 1013-1022.
- (11) Patir N. and Cheng H. S., ASME J. Lub. Tech., 101-2 (1979), 220-230.