自由曲面への有理 Bezier 曲面の高精度なあてはめ*

横山 正明^{*1}, 北川 義一^{*2}

Precise Fitting of Rational Bezier Surfaces onto Free Surfaces

Masaaki YOKOYAMA and Yoshikazu KITAGAWA

For computer-aided geometric design or for computer-aided geometric display, parametric curve segments and surface patches such as the Bezier form or B-spline form have been frequently used. It is very convenient if we can use the same parametric representations for the approximation of algebraic curves or surfaces, such as circles, ellipses, spheres and tori. Then we can perform unified treatment for all free-form and nonfree-form curves and surfaces. For the design, machining and inspection of accurate geometry such as precision machine parts, it is very important to know the qualitative and quantitative error of approximation from exact geometry. But up to the present, little work has been done on this error estimation. In this report, we treated the method of optimum fitting of rational cubic Bezier curves and rational bicubic Bezier surfaces onto algebraic and free curves and surfaces, and numerically examined the magnitudes of approximation errors.

Key Words: CAD, Geometric Modelling, Rational Bezier Curve, Rational Bezier Surface, Optimum Fitting, Error Analysis

1. 緒 言

計算機援用による形状設計あるいは画像処理などの分野において自由曲線や自由曲面の表現記述のためにBezier形式, B-spline形式などのパラメトリック表現の曲線式, 曲面式がしばしば使用される. この場合, データ形式の統一という観点からは円や楕円, 三角関数などの規定曲線, 円筒面や球面, トーラス面などの規定曲面の近似表現にも可能ならば同形式のパラメトリック表現の曲線式, 曲面式が使用できることが望ましい.

画像処理においては精度や誤差はそれほど問題にされることはないかも知れないが, 形状設計においては形状精度, 形状誤差がその後の加工や組立などに対して非常に重要な意味を持つので近似精度, 近似誤差は重要な問題である.

しかし, Bezier形式, B-spline形式などの曲線式, 曲面式の使用に際して「どこに制御点を設定すれば近似誤差が最小になるか」という誤差関連の問題はまだ十分には解決されていない. Bezier曲線,

Bezier曲面については, Hoschek^[1]および著者ら^[2]によって曲線および曲面上の点列に対してBezier曲線, Bezier曲面を最小自乗法によって最適にあてはめ, 制御点の位置を決定する手法が開発されている. 特に, 著者らによっては誤差に関する検討も十分になされている.

B-spline曲線, B-spline曲面については, 多数の測定データ点列に対してB-spline曲線, B-spline曲面を最小自乗法によって最適にあてはめ, 制御点の位置を決定する手法がいくつか開発されている^{[3]~[7]}が, ノットの挿入位置とその粗密の設定に関してはまだ十分に検討されているとは言えない.

本報告においては, 機械部品等の形状設計において多用される円, 円筒面, 円錐面, 球面ならびにトーラス面などを数学的に厳密に表現できる3次有理Bezier曲線, 双3次有理Bezier曲面を取り上げ, 曲線および曲面上の点列に対してそれらを高精度にあてはめ, 制御点の位置と重みの大きさを決定する手法を開発する.

2. 規定曲線・曲面への有理Bezier
曲線・曲面のあてはめ

本章においては自由曲線, 自由曲面への有理Bezier曲

* 1994年9月30日 茨城講演会において講演, 原稿受付
1994年11月17日.

^{*1} 正員, 東京工業大学(〒227 横浜市緑区長津田町 4259).

^{*2} 東京工業大学大学院.

線, 有理Bezier曲面のあてはめの手法開発の基礎として, 規定曲線, 規定曲面を取り上げ, その上の点列に対して3次有理Bezier曲線, 双3次有理Bezier曲面を高精度にあてはめ, 制御点の位置と重みの大きさを決定する手法を開発する. 双3次有理Bezier曲面の境界線は3次有理Bezier曲線で表わされるので, 最初に規定曲線への有理Bezier曲線のあてはめについて検討する.

2.1 規定曲線への有理Bezier曲線のあてはめ 規定曲線上に与えられた点列に最も良くあてはまる, すなわち最適近似する3次有理Bezier曲線の制御点の位置と重みの大きさを最小自乗法により求め, そのときのあてはめの誤差の大きさも求める. 誤差は与点とBezier曲線の距離を表わす.

3次有理Bezier曲線

$$Y(t) = \frac{\sum_{i=0}^3 B_{i,3}(t) w_i b_i}{\sum_{i=0}^3 B_{i,3}(t) w_i} \quad (0 \leq t \leq 1) \quad \dots \dots \dots (1)$$

を図1に示すような規定曲線(Algebraic)上の点列 $P_i (i=1 \sim N)$ にあてはめる場合を考える. ここで, $B_{i,n}(t)$ はBernstein基底関数である. 点列 P_i と3次有理Bezier曲線の間の誤差ベクトルとして

$$D_i = P_i - Y(t_i) \quad \dots \dots \dots (2)$$

を定義すれば最小自乗法は

$$D = \sum_{i=1}^N D_i^2 = \sum_{i=1}^N (P_i - Y(t_i))^2 \rightarrow \min \quad \dots \dots \dots (3)$$

となる. 最適近似になるためには

$$\frac{\partial D}{\partial b_j} = 0, \quad \frac{\partial D}{\partial w_j} = 0 \quad (j=1, 2) \quad \dots \dots \dots (4)$$

の条件が満足されなければならない. 誤差ベクトル D_i は制御点 b_j と重み w_j に対して非線形であるので, 次式のように線形近似して制御点と重みの変化量 Δb_j , Δw_j に関する最小自乗法に変更する.

$$\begin{aligned} D &= \sum_{i=1}^N (P_i - Y(t_i, b_j, w_j))^2 \\ &= \sum_{i=1}^N \left[P_i - Y(t_i, b_{j0}, w_{j0}) - \frac{\partial Y}{\partial b_j} \Delta b_j - \frac{\partial Y}{\partial w_j} \Delta w_j \right]^2 \rightarrow \min \quad \dots \dots \dots (5) \end{aligned}$$

この式において, 右辺の微分項は t_i , b_{j0} , w_{j0} における微分係数の値を表わすものとする. この式より制御点と重みの変化量 Δb_j , Δw_j を求める正規方程式は次のようになる. ここで, $j=1, 2$ である.

$$\frac{\partial D}{\partial \Delta b_j} = \sum_{i=1}^N \left(-\frac{\partial Y}{\partial b_j} \right) (P_i - Y(t_i, b_{j0}, w_{j0}) - \frac{\partial Y}{\partial b_j} \Delta b_j - \frac{\partial Y}{\partial w_j} \Delta w_j) = 0 \quad \dots \dots \dots (6)$$

$$\frac{\partial D}{\partial \Delta w_j} = \sum_{i=1}^N \left(-\frac{\partial Y}{\partial w_j} \right) (P_i - Y(t_i, b_{j0}, w_{j0}) - \frac{\partial Y}{\partial b_j} \Delta b_j - \frac{\partial Y}{\partial w_j} \Delta w_j) = 0 \quad \dots \dots \dots (7)$$

この4元連立一次方程式を解くことによって制御点と重みの変化量 Δb_j , Δw_j を求め,

図1 誤差ベクトルの定義

図2 誤差ベクトルの接線方向成分

$$b_j = b_{j0} + \Delta b_j, \quad w_j = w_{j0} + \Delta w_j \quad \dots \dots \dots (8)$$

によって制御点と重みを修正する. 制御点の初期値は, すべての重みを1として既報²⁾の通常のBezier曲線に対する手法と同様の最小自乗法により求める.

ここで, パラメータ t_i は誤差ベクトル D_i がBezier曲線に対し直角になるように選ばなければならない. しかし, 点列 P_i の各点に対応する最適な t_i は一般には簡単に求まらないので反復計算によらざるを得ない. 本報告においてはこの反復計算に対して三つの方式を考える.

[方式I] この方式は既報²⁾の方式と全く同じであるので簡単に述べる. パラメータ t_k の初期値は与点間の比によって求める. その後のパラメータ t_k は, 図2に示すように誤差ベクトルをBezier曲線の接線に投影し, その長さ Δc_k と与点間の距離の和 L の比を用いて次式によって前回のパラメータ t_k を修正する.

$$t'_k = t_k + \Delta c_k / L \quad \dots \dots \dots (9)$$

この新しいパラメータを用いて式(6), (7)によって制御点と重みの変化量 Δb_j , Δw_j を求め, 式(8)に代入して新しい制御点と重み, すなわち新しいBezier曲線 $Y(t)$ を求める. 以下同様な過程を収束条件が満足されるまで, あるいは与えられた回数まで繰り返す.

3次有理Bezier曲線によって正確に表現されるべき円弧の例として半径1, 中心角 $\pi/2$ の円弧に方式Iを適用すると, 最大誤差は 3×10^{-5} 程度より小さくはならず, 極めて大きな不満が残る. これは, 誤差ベクトルを大きくとりすぎ, そのために制御点の位置が大きく振動することに起因すると考えられる. そこで, 式(2)の誤差ベクトルの代わりに, 図3における誤差ベクトルの接線方向成分 D_{tk} によって補正された法線方向成分 D_{nk} を考え, 最小自乗法を次式のように書き換える.

$$D = \sum_{i=1}^N (D_{nk} + \alpha D_{tk})^2 \rightarrow \min \quad \dots \dots \dots (10)$$

係数 α は $0 \leq \alpha \leq 1$ であり, プログラム中で逐次変化させながら, 収束条件が満足されるまで, あるいは与えられ

図3 誤差ベクトルの法線方向成分, 接線方向成分

図4 曲線における二分法の適用

た回数まで繰り返す。この修正版を「方式Ⅰ'」と呼称する。ハラメータの修正, 制御点と重みの修正は方式Ⅰと同じである。

〔方式Ⅱ〕二分法⁸⁾によって誤差ベクトルとBezier曲線が垂直になるパラメータへの収束を速める。図4において, 修正前のパラメータを t_k , 誤差ベクトルを $\mathbf{D}_k$ とする。また, 十分に大きな値をプラスしたパラメータを t_k' , 誤差ベクトルを $\mathbf{D}_k'$ として, Bezier曲線上の点 $\mathbf{Y}(t_k)$ における正方向接線ベクトルと誤差ベクトル $\mathbf{D}_k$ の内積の符号と, 点 $\mathbf{Y}(t_k')$ における正方向接線ベクトルと誤差ベクトル $\mathbf{D}_k'$ の内積の符号が異なるようにする。このようにすると, 誤差ベクトルとBezier曲線が垂直になるようなパラメータは t_k と t_k' の間に存在する。次に, t_k と t_k' の平均値 t_k'' をとり, この点 $\mathbf{Y}(t_k'')$ における正方向接線ベクトルと誤差ベクトル $\mathbf{D}_k''$ の内積の符号を調べる。これら三つの内積の符号を比較し, 内積の符号の異なるパラメータの範囲を採択し, 次にこの二つのパラメータの平均値をとり, この点における正方向接線ベクトルと誤差ベクトルの内積の符号を調べて内積の符号の異なるパラメータの範囲を採択するという過程を繰り返す。この繰り返しによってBezier曲線と誤差ベクトルが垂直になるようなパラメータを迅速に求めることができる。

以上説明した3方式を最初に有理Bezier曲線によって数学的に厳密に表現される円弧へのあてはめに適用した。図5に半径1, 中心角 $\pi/2$ の円弧の場合の結果を示す。著者ら¹²⁾の検討によると, 円弧の近似の場合には中心角 $\pi/2$ までは精度の良好なあてはめができるが, 中心角がこれより大きくなるとあてはめ誤差がだんだん大きくなることが明かになっているので, ここでの中心角は限界の $\pi/2$ を採用している。形状データは倍精度で与え, あてはめのための繰り返し計算も同様に倍精度で実行している。与点数は15とし, 収束条件は 10^{-14} としている。方式Ⅰの場合

図5 円弧近似における最大誤差の収束特性

の最大誤差は 3×10^{-10} 程度より小さくならない。方式Ⅰ'と方式Ⅱの場合のそれは収束条件に漸近するが, 方式Ⅱのほうが収束性が良い。次に, 振幅1, 角度範囲 $0 \rightarrow \pi/2$ の正弦曲線, 基礎円半径1, 巻出し角度 $\pi/2$ のインボリュート曲線へのあてはめに適用した。与点数は同じく15とし, 収束条件も同じく 10^{-14} としている。結果のみを説明すると, 双方の場合とも方式Ⅱの場合が収束性が最も良いが, 最大誤差は前者は 2×10^{-7} 程度, 後者は 1.2×10^{-6} 程度である。

2.2 規定曲面への有理Bezier曲面のあてはめ 境界線が直線および円弧になるように切り取られた円筒面, 円錐面, 球面ならびに円断面トーラス面の(部分)規定曲面上に与えられた点列に最も良くあてはまる, すなわち最適近似する双3次有理Bezier曲面の制御点の位置と重みの大きさを最小自乗法により求め, そのときのあてはめの誤差の大きさも求める。誤差は与点とBezier曲面の距離を表す。

双3次有理Bezier曲面は

$$\mathbf{Y}(u, v) = \frac{\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \mathbf{B}_{i,3}(u) \mathbf{B}_{j,3}(v) w_{ij} \mathbf{b}_{ij}}{\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \mathbf{B}_{i,3}(u) \mathbf{B}_{j,3}(v) w_{ij}} \quad (0 \leq u, v \leq 1) \quad \dots \dots \dots (11)$$

で表われ, その境界線は3次有理Bezier曲線である。制御点と重みは 4×4 , すなわち各16個あり, このうち境界線上の12個は前節の手法により決定されるので, 残り各4個が別途決定されなければならない。この各4個の制御点と重みの決定には前節の最小自乗法の手法を二次元に拡張して用いる。

規定曲面上の点列 $\mathbf{P}_{kl}(k=1 \sim M, l=1 \sim N)$ にあてはめる場合を考える。点列 $\mathbf{P}_{kl}$ と双3次有理Bezier曲面の間の誤差ベクトルとして

$$\mathbf{D}_{kl} = \mathbf{P}_{kl} - \mathbf{Y}(u_{kl}, v_{kl}) \quad \dots \dots \dots (12)$$

を定義すれば最小自乗法は

$$D = \sum_{k=1}^M \sum_{l=1}^N \mathbf{D}_{kl}^2 = \sum_{k=1}^M \sum_{l=1}^N (\mathbf{P}_{kl} - \mathbf{Y}(u_{kl}, v_{kl}))^2 \\ = \sum_{k=1}^M \sum_{l=1}^N (\mathbf{P}_{kl} - \mathbf{Y}(u_{kl}, v_{kl}))^2 \rightarrow \min \quad \dots \dots \dots (13)$$

となる。前節の場合と同様に、誤差ベクトル $\mathbf{D}_{kl}$ は制御点 $\mathbf{b}_{ij}$ と重み w_{ij} に対して非線形であるので、制御点と重みのそれぞれの変化量 $\Delta \mathbf{b}_{ij}$, Δw_{ij} に関する最小自乗法に変更し、得られた変化量を用いて制御点 $\mathbf{b}_{ij}$ と重み w_{ij} を修正する。

パラメータ u_{kl} , v_{kl} は誤差ベクトル $\mathbf{D}_{kl}$ とBezier曲面が垂直になるように選ばなければならない。しかし、点列 $\mathbf{P}_{kl}$ の各点に対応する最適な u_{kl} , v_{kl} は一般には簡単に求まらないので反復計算によらざるを得ず、前節の規定曲面への有理Bezier曲面のあてはめの場合の方式を二次元に拡張した三つの方式が考えられるが、方式Iは精度の良いあてはめができないので、方式I'および方式IIが主として検討の対象となる。

方式IIについて述べると、前節において説明した二分法を二次元に拡張して適用する。図6において、修正前のパラメータを u_{kl} , v_{kl} 、また、大きな値をプラスしたパラメータを u'_{kl} , v'_{kl} とする。まず u 方向について、Bezier曲面上の $\mathbf{Y}(u_{kl}, v_{kl})$ における u 正方向接線ベクトルと誤差ベクトルの u 方向成分の内積の符号と、 $\mathbf{Y}(u'_{kl}, v_{kl})$ における同方向接線ベクトルと誤差ベクトルの同方向成分の内積の符号が異なるようにする。次に、 u_{kl} と u'_{kl} の平均値 u''_{kl} をとり、この点 $\mathbf{Y}(u''_{kl}, v_{kl})$ における同方向接線ベクトルと誤差ベクトルの同方向成分の内積の符号を調べる。これら三つの内積の符号を比較し、内積の符号の異なるパラメータ u の範囲を採択する。同様の処理を v 方向についても実行する。この結果、与点 $\mathbf{P}_{kl}$ からBezier曲面への垂線の足が存在する領域が例えば図6の斜線を施した領域のように選ばれる。このような過程の繰り返しによってBezier曲面と誤差ベクトルが垂直になるようなパラメータを迅速に求めることができる。

以上説明した方式を境界線が直線および円弧になるように切り取られた円筒面(1/4)、円錐面(1/4)、球面(1/8)ならびに円断面トーラス面(1/16)の部分規定曲面へのあてはめに適用した。()内の分数は部分曲面が全体の何分の1かを示す。これらの部分規定曲面においては、境界線は直線、あるいは精度の良好なあてはめができる限界の中心角である $\pi/2$ の円弧になっている。規定曲面の場合と同様に、形状データは倍精度で与え、あてはめのための繰り返し計算も同様に倍精度で実行している。与点数は 10×10 とし、収束条件は 10^{-14} としている。

図7に環中心円半径3、環半径1の外側トーラス面の場合の結果を示す。方式I'と方式IIの場合の最大誤差は収束条件に漸近するが、方式IIのほうが収束性が良い。

次に、この外側トーラス面を除く前述の規定曲面へのあてはめについて、最大誤差に関するグラフは省略するが、方式IIの場合は繰り返し回数20回以内ですべて収束条件を満足する。しかし、方式I'の場合は最大誤差は $10^{-5} \sim 10^{-6}$ 程度より小さくはない。

3. 自由曲線・曲面への有理Bezier 曲線・曲面のあてはめ

図6 曲面における二分法の適用

図7 トーラス曲面近似における最大誤差の収束特性

図8 球面と円錐面の交線

前章においては規定曲線・曲面への有理Bezier曲線・曲面のあてはめの手法について検討したが、本章においてはこの手法を自由曲線・曲面に適用する。

3・1 自由曲線への有理Bezier曲線のあてはめ 自由曲線として、(1) 直交する半径1の1/4円筒面どうしの交線、および(2) 図8に示すような半径1の1/8球面と傾いた底半径1、高さ2の1/4円錐面の交線を取り上げる。形状データは倍精度で与え、あてはめのための繰り返し計算も同様に倍精度で実行している。収束条件は 10^{-14} とする。なお、交線作成は文献(9)の作成法に基づいている。

図9 交線近似における最大誤差の収束特性

図10 最大誤差の収束特性に与える分割の効果

(1)の場合、あてはめの最大誤差に関するグラフは省略するが、その誤差は方式Ⅰの場合 3×10^{-4} 程度、方式Ⅰ'の場合 5×10^{-6} 程度、方式Ⅱの場合 6×10^{-8} 程度で収束してしまう。(2)の場合、図9に見られるようにどの方式の場合も最大誤差は 6×10^{-4} 程度より小さくはない。このとき、この誤差以下に誤差を低減しようとするとき1本の交線を複数の線分に分割しなければならない。その際、分割点は単に等分割点に設定するのではなく、誤差の大きい点から順番に分割点に設定すれば誤差低減に対してより効果があることが数値実験から明らかになった。反復計算の方式Ⅱに基づいて(2)の交線にBezier曲面をあてはめた場合の、最大誤差の低減に与える分割の効果を図10に示す。このグラフから、この分割点設定に基づいた2分割により 10^2 倍以上の、3分割により 10^3 倍程度の誤差低減が得られていることが明らかである。

3・2 自由曲面への有理Bezier曲面のあてはめ 自由曲面として、(1)図11に示すような平面と傾いた半径1の1/4円筒面の交線近傍のフィレット曲面、および(2)球中心を通らない4平面によって切り取られた半径1の等辺の四辺形部分球面を取り上げる。自由曲線の場合と同様に、形状データは倍精度で与え、あてはめのための繰り返し

図11 平面と円筒面の交線近傍におけるフィレット曲面

図12 フィレット曲面近似における最大誤差の収束特性

図13 四辺形球面近似における最大誤差の収束特性

計算も倍精度で実行している。収束条件は 10^{-14} とする。(1)の場合、あてはめの最大誤差は図12に見られるように方式Ⅰ'の場合も方式Ⅱの場合も 6×10^{-8} 程度で収束してしまう。また(2)の場合、方式Ⅱを適用すると、あてはめの最大誤差は図13に見られるように、分割しないときは 3.4×10^{-6} 程度、4等分割のときはこれが 8×10^{-9} 程度まで低減されることが明らかである。

4. 結 言

規定曲線・曲面ならびに自由曲線・曲面に3次有理Bezier曲線・双3次有理Bezier曲面を最適、すなわち誤差の2乗和を最小にするという意味において最適にあてはめるための制御点の位置と重みの大きさの決定法、本報告において方式Ⅱと呼称した誤差ベクトルとBezier曲線・曲面が垂直になるパラメータへの収束加速法を開発・提案した。また、この手法を円弧、正弦曲線、インボリュート曲線等の規定曲線、球面、円筒面、円錐面、円断面トーラス面等の規定曲面に対して適用し、高い精度で有理Bezier曲線・曲面のあてはめが可能になることを数値実験により明かにした。さらに、同じ手法を平面と傾いた円筒面の交線および直交する円筒面どうしの交線、平面と傾いた円筒面の交線近傍のフレット曲面等の自由曲線・曲面に対して適用し、規定曲線・曲面の場合と同様に高い精度で有理Bezier曲線・曲面のあてはめが可能になることを数値実験により

明かにした。加えて、より高い精度が必要な場合には誤差の大きい点で複数の曲線あるいは曲面に分割してあてはめを実行すれば可能であることを数値実験により明かにした。

文 献

- (1) Hoschek, J., Computer Aided Geometric Design, 5-1 (1988), 27.
- (2) 横山・飯塚, 機論, 56-531 C (1990), 3123.
- (3) 山口, 形状処理工学(Ⅱ), (1982), 166, 日刊工業新聞社.
- (4) Rogers, D. F. and Fog, N. G., Computer Aided Design, 21-10 (1989), 641.
- (5) 松原・ほか3名, 1992年度精密工学会春季学術講演会講演論文集, (1992), 703.
- (6) 大藤, 平成5年度東京工業大学学位論文(1994).
- (7) 後藤・ほか3名, 精密工学会誌, 60-7 (1994), 964.
- (8) 深尾・渡部, 数値計算法, (1982), 131, 昭晃堂.
- (9) 小堀・ほか2名, 情報処理学会論文誌, 28-1(1987), 91.