接触点形状による把握の安定性*

楯 将博^{*1}, 舟橋 康行^{*2}

Grasping Stability Caused by the Curvatures at Contact Points

Masahiro TATE and Yasuyuki FUNAHASHI

In this paper we discuss the stability of the equilibrium grasp. We replace a grasp system with an elastic system, and we take into consideration the curvatures of fingers and objects. The potential energy function of this system is derived. The grasping stability is determined by the positive definiteness of the Hessian matrix of the potential function. Several numerical simulations show that the grasping stability depends greatly on the curvatures of both the grasped object and fingers.

Key Words: Robotics, Mechanics, Grasping Stability, Curvature at Contact Point, Potential Energy Function

1. 緒 言

ロボットハンドにより物体を把握するとき、その安定性が問題となる。つまりロボットハンドが物体を把握し系が釣合い状態にあるとき、その把握物体に対していかなる外乱が加わろうとも、その釣合い状態を維持し続けることが可能か否かという問題である。

この問題の一つの解答は Form-closure grasp, Force-closure grasp である^{(1)~(3)}。Form-closure grasp とは、ロボットハンドの指により物体を幾何学的に拘束してしまう把握のことで、外乱が作用しても物体は動かず把握が壊れることはない。また Force-closure grasp とは、指の押す力のみであらゆる方向の力とモーメントを発生させることのできる把握のことで、外乱に対してそれを相殺する力が発生できるので把握の維持は可能である。これらの把握では物体は少しも変化しない。従って把握は安定である。

これに対して、把握物体の微小変化を許しその安定性を考える研究がある。これはロボットハンドと把握

物体をばね系に置き換え、そのポテンシャルエネルギーや復元力の観点から把握の安定性を議論するものである^{(4)~(8)}。

これらの研究は大きく二つに分けることができる。接触点で指が滑るか、滑らないかである。接触点間の摩擦が十分大きいとすると、接触点で滑りは起こらない。逆に摩擦が小さい、もしくは働かないとすると、滑りを生ずる。この滑りの有無は安定性の解析に大きな違いをもたらす。接触点が滑らないとすると、接触点は物体表面上を動くことはない。したがって接触点の位置のみが重要であり、接触点近傍の物体の形状や指の形状は、把握の安定性に影響を与えない。逆に滑りを許せば、接触点が物体と指の形状に沿って動くので、それらの形状が把握の安定性に影響を与える。

金子ら⁽⁴⁾はこの条件の違いにより、同じ把握が安定にも不安定にもなることを示し、接触点が滑らない条件のもとでの二次元の把握について解析を行っている。そこでは指の配置が与えられたとき、その把握が安定になるために指の弾性が満たすべき条件を求めている。また三村ら⁽⁵⁾はこれを三次元空間での把握に拡張して、同様の解析を行っている。

接触点が滑る条件のもとで、花房ら⁽⁶⁾は安定な把握を実現する指の位置を求めている。そこではすべての

* 原稿受付 1995年2月23日。

^{*1} 学生員、名古屋工業大学大学院 (〒466 名古屋市昭和区御器所町)。^{*2} 正員、名古屋工業大学。

指配置に対してポテンシャルエネルギーを求め、それが極小となる指配置を安定な把握として求めている。

また Nguyen⁽⁷⁾ は、釣合い状態にある把握の安定性について考察している。そこでは物体の形状を考慮した把握系のポテンシャルエネルギーを考え、その一階微分と二階微分の値から、その点が極小であるかを調べることで、その釣合い状態が安定であるかを判定している。これにより接触点での物体の形状が、把握の安定性に影響を与えていることを示した。

さらに Howard⁽⁸⁾ は、物体と指の両方の形状を考慮して、把握の安定性を復元力の観点から考察している。しかし接触点間に働く力の力学的解析が複雑である。

本稿では同様の問題をポテンシャルエネルギーの観点から考察する。この観点により複雑な力学的解析を回避することができる。本論文の特徴は、物体と指を接触点での曲率円で近似することにより、接触の関係を二つの円の関係に置き換えることにある。これにより解析が簡単化されている。

本稿の構成は次のようになっている。第2章では釣合い状態にある把握系のポテンシャルエネルギーを導き、さらに安定判別法を考える。第3章では計算例を示し、いろいろな把握に対してその安定性を調べる。

2. 把握系の安定性

この章では把握系の安定性を議論するために、まず把握系のポテンシャルエネルギーを導出し、次にそのポテンシャル関数を用いて平衡点(釣合い状態)での安定性を調べる。

2.1 記号 図1に示すように記号を定義する。

Σ_o : 物体座標系

Σ_i : i 番めの接触点近傍に設定した接触点座標系

p_i : 物体座標系と接触点座標系の相対位置

α_i : 物体座標系と接触点座標系の相対角度

R_i : i 番めの接触点での物体の曲率半径

Fig.1 Finger and object approximated by circles of curvature

r_i : i 番めの指先の曲率半径

k_i : 指のばね定数

2.2 仮定 議論を簡単化するために以下の仮定を設ける。

(1) 指は図1のような1自由度のばねをもつ。

(2) 物体と指の形状は既知で、接触点においてそれぞれの曲率円で近似できる。

(3) 釣合い状態にある指先(接触点)位置、指先力は与えられている。

(4) 各指と物体の接触点では摩擦は働かない。

仮定(1)のばねを設定することで、把握のポテンシャルエネルギーを考えることができる。これはロボットのハードウェアによるばねのほかに、制御による仮想的な弾性でもよい。仮定(2)は物体と指の接触点が一点であることを意味する。またこの曲率円は形状を2次のオーダまで正確に記述することから、この仮定は後に導くポテンシャルエネルギーの二階微分の値が正確であることを保証する。仮定(3)は安定性を考察する釣合い状態、すなわち平衡点を指定するものである。

2.3 ポテンシャルエネルギー 把握系のポテンシャルエネルギーを考える。釣合い状態から外乱により第 i 番めのばねに蓄えられる位置エネルギーは

$$U = \sum U_i = \sum \frac{1}{2} k_i (s_{io} + s_i)^2 \dots\dots\dots (1)$$

で与えられる。ここで s_{io} は物体に外乱が加わる前の釣合い状態のばねの縮みであり、 s_i は外乱によるばねの伸縮である。この U_i の総和は把握系全体のポテンシャルエネルギーである。

次に外乱による物体の姿勢変化と各指のばねの伸縮 s_i との関係を調べる。そのためにまず各指の接触点座標系で考察し、後に物体座標系に変換する。

2.3.1 接触点座標系 図2(a)のように物体と指が両方とも凸の場合について考える。接触点座標系を次のように定義する。まず物体を接触点での曲率円で近似する。この曲率円の中心を座標系原点とし X_i 軸を指のばねの縮み方向と一致させた座標系を接触点座標系 Σ_i とする。この接触点座標系を使って、物体の動きとばねの伸縮の関係を調べる。

物体と同様に指についても接触点における曲率円で近似する。このことにより物体と指の接触の関係は近似した二つの円の関係で表現できる。いま物体と指の曲率円の中心座標を $(A_i, B_i)^T, (a_i, b_i)^T$ とすると、 Σ_i の定義から、外乱が加わる前のそれらの値は

$$\left. \begin{aligned} (A_i, B_i)^T &= (0, 0)^T \\ (a_i, b_i)^T &= (R_i + r_i, 0)^T \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2)$$

(a) Contact between convex object and convex fingertip

(b) Contact between concave object and convex fingertip

(c) Contact between convex object and concave fingertip

Fig.2 Compression of virtual spring due to object displacement

になる。ここに外乱が作用して物体が動き、その結果微小の並進変位 $(x_i, y_i)^T$ と回転変位 θ_i が接触点座標系の原点に生じたとする。この動きに伴い各指のばねが伸縮するが、接触点座標系の原点が曲率円の中心であることを考えると、回転変位はばねの伸びに影響を与えない。そこで並進変位の影響から式(2)のそれぞれの値は次のように変化する。

$$\left. \begin{aligned} (A_i, B_i)^T &= (x_i, y_i)^T \\ (a_i, b_i)^T &= (R_i + r_i + s_i, 0)^T \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3)$$

物体と指が一点で接触し続けるためには、円の中心間の距離が半径の和でなければならない。したがって次の式を満足しなければいけない。

$$(A_i - a_i)^2 + (B_i - b_i)^2 = (R_i + r_i)^2 \dots\dots\dots (4)$$

式(3)を式(4)に代入して s_i について解くと、

Fig.3 Object and contact-point coordinate frames

$$s_i = x_i - (R_i + r_i) \pm \sqrt{(R_i + r_i)^2 - y_i^2} \dots\dots\dots (5)$$

を得るが、物理的な意味を持つのは

$$s_i = x_i - (R_i + r_i) + \sqrt{(R_i + r_i)^2 - y_i^2} \dots\dots\dots (6)$$

である。さらに $R_i + r_i > 0$ より、

$$s_i = x_i - (R_i + r_i) + (R_i + r_i) \sqrt{1 - \left(\frac{y_i}{R_i + r_i}\right)^2} \dots\dots\dots (7 \cdot a)$$

となる。これにより接触点座標系の原点における物体の動き $\mathbf{x}_i = (x_i, y_i)^T$ とばねの伸縮 s_i との関係が得られた。

ここでは図2(a)のように接触点での形状が物体、指のどちらとも凸の場合を扱ったが、どちらかが凹の場合は図2(b), (c)のようになり、同様の解析を行うと式(7・a)に対応する次の式を得る(詳細は付録)。

$$\begin{aligned} s_i &= x_i - (-R_i + r_i) + (-R_i + r_i) \\ &\quad \times \sqrt{1 - \left(\frac{y_i}{-R_i + r_i}\right)^2} \dots\dots\dots (7 \cdot b) \end{aligned}$$

$$s_i = x_i - (R_i - r_i) + (R_i - r_i) \sqrt{1 - \left(\frac{y_i}{R_i - r_i}\right)^2} \dots\dots\dots (7 \cdot c)$$

この結果を式(7・a)と比較すると、形状が凹の場合は曲率半径の符号を負とすればよいことがわかる。

2・3・2 物体座標系

2・3・1項では接触点座標系での物体の動きとばねの伸縮の関係を求めた。次に物体座標系での物体の動きとばねの伸縮の関係を調べるために、接触点座標系での物体の動きと物体座標系での物体の動きが、どのような関係にあるのかを調べる。

そのために物体の任意の位置に物体座標系 Σ_o を設定する。外乱により物体に $\mathbf{x}_o = (x_o, y_o)^T$ の並進変位と、 θ_o の回転変位が物体座標系 Σ_o の座標系原点において発生したとする。このとき物体座標系 Σ_o から $\mathbf{p}_i = (p_{ix}, p_{iy})^T$ の位置にある接触点座標系 Σ_i の座標系原点において、物体は次のような並進変位をもつ(図3)。

$$\mathbf{x}_o + (\text{Rot}(\theta_o) - I_2)\mathbf{p}_i \dots\dots\dots (8)$$

ここで I_2 は 2 次の単位行列である。また $\text{Rot}(\cdot)$ は回転行列であり次のように表せる。

$$\text{Rot}(\cdot) = \begin{bmatrix} \cos(\cdot) & -\sin(\cdot) \\ \sin(\cdot) & \cos(\cdot) \end{bmatrix}$$

この並進変位は物体座標系での値である。これを接触点座標系 Σ_i で表すと、 Σ_i と Σ_o との相対角度 α_i を使って次のようになる。

$$\mathbf{x}_i = \text{Rot}(-\alpha_i)\{\mathbf{x}_o + (\text{Rot}(\theta_o) - I_2)\mathbf{p}_i\} \dots\dots\dots (9)$$

これが物体の動きの物体座標系での値 $(\mathbf{x}_o, \theta_o)$ と接触点座標系での値 $\mathbf{x}_i$ との関係式である。この式(9)を式(7)に代入することで、物体座標系での物体の動きとばねの伸縮の関係が解る。さらに式(1)に代入することによって U_i が x_o, y_o, θ_o で表せる。つまり外乱による物体の動きとポテンシャルエネルギーの関係がわかる。

2・4 把握の安定性 2・3 節で求めたポテンシャル関数を使い、釣合い状態にある把握の安定性について考える。一般にある状態が安定であるためには、その現象を支配する関数がある点を平衡点(傾き零)としてもち、さらにそれが安定な平衡点(下に凸)でないといけない。本稿では外乱なしの状態 $(x_o = y_o = \theta_o = 0)$

が釣合い状態であり、平衡点であることが仮定(3)で保証されているので、この点でポテンシャル関数が下に凸であるのかを調べればよい。つまり以下で与えられる Hessian 行列の正定性を調べればよい。

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 U}{\partial x_o^2} & \frac{\partial^2 U}{\partial x_o \partial y_o} & \frac{\partial^2 U}{\partial x_o \partial \theta_o} \\ \frac{\partial^2 U}{\partial x_o \partial y_o} & \frac{\partial^2 U}{\partial y_o^2} & \frac{\partial^2 U}{\partial y_o \partial \theta_o} \\ \frac{\partial^2 U}{\partial x_o \partial \theta_o} & \frac{\partial^2 U}{\partial y_o \partial \theta_o} & \frac{\partial^2 U}{\partial \theta_o^2} \end{bmatrix} \dots\dots\dots (10)$$

ここで $\mathbf{H}$ の各要素の値は、式(1)、(7)、(9)から次のようになる。

$$\left. \frac{\partial^2 U}{\partial x_o^2} \right|_{\substack{x_o=0 \\ y_o=0 \\ \theta_o=0}} = \Sigma \left\{ k_i \cos^2 \alpha_i - \frac{k_i s_{io}}{r_i + R_i} \sin^2 \alpha_i \right\}$$

$$\left. \frac{\partial^2 U}{\partial x_o \partial y_o} \right|_{\substack{x_o=0 \\ y_o=0 \\ \theta_o=0}} = \Sigma \left\{ k_i \frac{(r_i + R_i + s_{io})}{2(r_i + R_i)} \sin 2\alpha_i \right\}$$

$$\left. \frac{\partial^2 U}{\partial x_o \partial \theta_o} \right|_{\substack{x_o=0 \\ y_o=0 \\ \theta_o=0}} = \Sigma \left\{ k_i (-p_{iy} \cos \alpha_i + p_{ix} \sin \alpha_i) \cos \alpha_i \right\}$$

(a) A convex object grasped by convex fingertips

(b) A convex object grasped by flat fingertips

(c) A convex object grasped by concave fingertips

(d) A concave object grasped by sharp fingertips

(e) A concave object grasped by small fingertips

(f) A concave object grasped by large fingertips

(g) An object grasped by three fingertips

Fig. 4 Stability of grasps

$$\begin{aligned}
 & + \frac{k_i s_{io}}{r_i + R_i} (p_{iy} \sin \alpha_i + p_{ix} \cos \alpha_i) \sin \alpha_i \Big\} \\
 \frac{\partial^2 U}{\partial y_o^2} \Big|_{x_o=0, y_o=0, \theta_o=0} &= \Sigma \left\{ k_i \sin^2 \alpha_i - \frac{k_i s_{io}}{r_i + R_i} \cos^2 \alpha_i \right\} \\
 \frac{\partial^2 U}{\partial y_o \partial \theta_o} \Big|_{x_o=0, y_o=0, \theta_o=0} &= \Sigma \left\{ k_i (-p_{iy} \cos \alpha_i + p_{ix} \sin \alpha_i) \sin \alpha_i \right. \\
 & \quad \left. - \frac{k_i s_{io}}{r_i + R_i} (p_{iy} \sin \alpha_i + p_{ix} \cos \alpha_i) \cos \alpha_i \right\} \\
 \frac{\partial^2 U}{\partial \theta_o^2} \Big|_{x_o=0, y_o=0, \theta_o=0} &= \Sigma \left\{ k_i (-p_{iy} \cos \alpha_i + p_{ix} \sin \alpha_i)^2 \right. \\
 & \quad \left. - \frac{k_i s_{io}}{r_i + R_i} (p_{iy} \sin \alpha_i + p_{ix} \cos \alpha_i)^2 \right. \\
 & \quad \left. - k_i s_{io} (p_{iy} \sin \alpha_i + p_{ix} \cos \alpha_i) \right\}
 \end{aligned}$$

式中の k_i, s_{io} は釣合い状態における各指のばね定数と力の大きさから、 $\alpha_i, \mathbf{p}_i, r_i, R_i$ は物体と指の形状と接触点の位置からその値がわかり、数値的に $\mathbf{H}$ の固有値を求め、その正負を調べすべてが正であれば正定であり、把握系は安定である。

この方法を用いれば、物体と指の形状を考慮した把握の安定性を調べることができる。

3. 計 算 例

この章では2章の方法を使って、図4のいろいろな把握の安定性を調べる。表1に計算に必要な値と求めた Hessian 行列の固有値を示す。

Case(a)～(c)は物体の凸の部分で2本指で把握

したとき、その指先の形状により把握の安定性がどう変化するかを調べたものである。(b)のように指が平面の場合、その曲率半径は無限大なので極限をとるものとする。

表1からわかることは物体を凸の部分でもつときは、(c)のように指先が凹になっていないと不安定になるということである。この結果は直感にあう。

Case(d)～(f)は物体の凹の部分で2本指で把握したときに、その指先の形状により把握の安定性がどのように変化するかを調べたものである。(d)のように指先が点の場合(先が尖っている状態など)は、その曲率半径は零である。

表1からわかることは物体の凹部分で把握を行うと安定になることである。さらに指が大きくなるほど固有値が大きくなっていることがわかる。このことは指が大きいほうがより安定であることを示している。

Case(g)は3本指で把握したときの安定性を調べている。この把握は固有値がすべて正なので安定であることがわかった。このように本手法では3本指での把握の安定性をも調べることができ、さらに n 本指についても可能である。

4. 結 言

本稿は釣合い状態にある把握の安定性について議論した。ロボットハンドと把握物体を等価なばね系に置き換え、物体と指の形状を考慮したポテンシャルエネルギーを導出し、それを用いて把握の安定判別法を考察した。また数値例によりその安定性が接触点における物体とロボットハンドの形状(曲率)に大きく依存し

Table 1 Numerical examples

Case Fig.	i-th Finger	Finger's Force		Finger's Angle & Position		Curvature of Finger & Object		Eigenvalues Stability
		k_i	s_{io}	α_i	(p_{ix}, p_{iy})	r_i	R_i	
(a)	1	1	0.01	0	(0.2, 0.0)	0.1	0.1	(2.0, -0.1, -0.008) Unstable
	2	1	0.01	π	(-0.2, 0.0)	0.1	0.1	
(b)	1	1	0.01	0	(0.2, 0.0)	∞	0.1	(2.0, 0.0, -0.004) Unstable
	2	1	0.01	π	(-0.2, 0.0)	∞	0.1	
(c)	1	1	0.01	0	(0.2, 0.0)	-0.2	0.1	(2.0, 0.2, 0.004) Stable
	2	1	0.01	π	(-0.2, 0.0)	-0.2	0.1	
(d)	1	1	0.01	0	(0.2, 0.0)	0.0	-0.1	(2.0, 0.4, 0.008) Stable
	2	1	0.01	π	(-0.2, 0.0)	0.0	-0.1	
(e)	1	1	0.01	0	(0.2, 0.0)	0.05	-0.1	(2.0, 0.8, 0.024) Stable
	2	1	0.01	π	(-0.2, 0.0)	0.05	-0.1	
(f)	1	1	0.02	0	(0.2, 0.0)	0.09	-0.1	(2.0, 2.0, 0.076) Stable
	2	1	0.02	π	(-0.2, 0.0)	0.09	-0.1	
(g)	1	1	1.00e-2	$3 \tan^{-1} 3$	(0.1, 0.3)	-0.4	0.2	(2.0, 1.1, 0.0086) Stable
	2	1	3.16e-3	π	(-0.2, 0.0)	0.1	0.2	
	3	1	9.49e-3	$3\pi/2$	(0.0, -0.2 $\sqrt{3}$)	0.1	-0.2	

ていることを示した。

最後に本研究について熱心に御討論いただいた(株)豊田中央研究所三村宣治氏, 名古屋工業大学大学院山田貴孝氏, 鈴木泰充氏に感謝の意を表する。

付 録

どちらか一方の接触点形状が凹の場合について考える。

(A) 物体の形状が凹の場合 この場合図2(b)のようになっているので一点で接触するための条件は

$$(A_i - a_i)^2 + (B_i - b_i)^2 = (-R_i + r_i)^2 \quad \dots\dots\dots (11)$$

になる。ここに外乱が作用して物体が動き, その結果曲率円の中心が $(x_i, y_i)^T$ だけ動くと

$$\left. \begin{aligned} (A_i, B_i)^T &= (x_i, y_i)^T \\ (a_i, b_i)^T &= (-R_i + r_i + s_i, 0)^T \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (12)$$

これを式(11)に代入して s_i について解くと

$$s_i = x_i - (-R_i + r_i) \pm \sqrt{(-R_i + r_i)^2 - y_i^2} \quad \dots (13)$$

となる。物理的な意味をもつのは

$$s_i = x_i - (-R_i + r_i) - \sqrt{(-R_i + r_i)^2 - y_i^2} \quad \dots (14)$$

である。さらに $-R_i + r_i < 0$ より

$$\begin{aligned} s_i &= x_i - (-R_i + r_i) + (-R_i + r_i) \\ &\quad \times \sqrt{1 - \left(\frac{y_i}{-R_i + r_i} \right)^2} \quad \dots\dots\dots (7 \cdot b) \end{aligned}$$

となる。この式を本文中の式(7・a)と比較すると物体側の曲率半径の符号が負になっていることがわかる。

(B) 指の形状が凹の場合 この場合図2(c)のようになっているので, 一点を接触するための条件は

$$(A_i - a_i)^2 + (B_i - b_i)^2 = (R_i - r_i)^2 \quad \dots\dots\dots (15)$$

外乱が作用した後, 中心座標は

$$\left. \begin{aligned} (A_i, B_i)^T &= (x_i, y_i)^T \\ (a_i, b_i)^T &= (R_i - r_i + s_i, 0)^T \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (16)$$

になり, これを式(15)に代入して s_i について解くと

$$s_i = x_i - (R_i - r_i) \pm \sqrt{(R_i - r_i)^2 - y_i^2} \quad \dots\dots\dots (17)$$

となるが, 物理的な意味をもつのは

$$s_i = x_i - (R_i - r_i) - \sqrt{(R_i - r_i)^2 - y_i^2} \quad \dots\dots\dots (18)$$

である。さらに $R_i - r_i < 0$ より

$$\begin{aligned} s_i &= x_i - (R_i - r_i) + (R_i - r_i) \sqrt{1 - \left(\frac{y_i}{R_i - r_i} \right)^2} \\ &\quad \dots\dots\dots (7 \cdot c) \end{aligned}$$

となる。この式を本文中の式(7・a)と比較すると指側の曲率半径の符号が負になっていることがわかる。

文 献

- (1) 中村仁彦, 把持とあやつり, 計測と制御, 29-3(1990), 6-12.
- (2) Nguyen, V. D., Constructing Force-Closure Grasps, *Int. J. of Robotics Research*, 7-3(1988), 3-16.
- (3) Markenscoff, X., Ni, L. and Papadimitriou, C., The Geometry of Grasping, *The Int. J. of Robotics Research*, 9-1(1990), 61-74.
- (4) 金子 真・今村信昭・横井一仁・谷江和雄, 摩擦を考慮した多指ハンドの剛性モデルによる安定把握解析, *JRSJ*, 7-3(1989), 49-59.
- (5) 三村宣治・舟橋康行, 剛性を有する3本指ハンドによる三次元物体の安定把握解析, 機論, 57-537, C(1991), 213-220.
- (6) 花房秀郎・浅田春比古, 弾性指を有するロボットハンドによる物体の安定な把握, 計測自動制御学会論文集, 13-4(1977), 58-65.
- (7) Nguyen, V. D., Constructing Stable Grasps, *The Int. J. of Robotics Research*, 8-1(1989), 26-37.
- (8) Howard, W. S. and Kumar, V., Stability of Planar Grasps, *Proc. 1994 IEEE Int. Conf. on Robotics and Autom.*, (1994), 2822-2827.