微小円孔のあいた界面を持つ音場の効率的な境界要素解析法*

(第2報)

田中正隆^{*1}, 松本敏郎^{*1}
山田泰永^{*2}, 尾崎友彦^{*3}Effective Boundary Element Analysis of Acoustic Field
with Interface Boundary Having Small Holes

(2nd Report)

Masataka TANAKA, Toshiro MATSUMOTO,
Yasunaga YAMADA and Tomohiko OZAKI

It is frequently important in engineering to analyze complicated acoustic problems in the case of a large number of small holes at an interface boundary. A muffler used for reduction of exhaust noise is a typical example of such a case. The boundary element method could be applied to such problems, but this analysis would require a huge number of boundary elements to obtain accurate results. To circumvent this difficulty, we propose a new boundary element method which can be applied effectively to 3-D acoustic problems with small holes on the interface boundary, governed by the Helmholtz equation. An attempt is made to improve the accuracy of the method previously proposed by us. Some improvement in computational accuracy is demonstrated through numerical computation of two sample problems.

Key Words: Boundary Element Method, Computational Mechanics, Sound, Noise, Computer Aided Analysis

1. 緒言

複雑な形状の問題に境界要素法などの数値解析法を適用する場合、膨大な自由度を扱わなければならない。このため、何らかの工夫をしなければ、数値解析やシミュレーションが不可能となることが多い。例えば自動車のマフラーの消音特性を調べる場合を考えると、マフラー内は複雑な構造をしているうえ、壁面には小さな穴が多数あけられた構造になっている。このような場合、従来の境界要素法をそのまま適用すれば、小さな円孔まわりを微小な要素を用いて分割しなければ精度良い解が得られない。このため、数値解析には膨大な記憶容量を必要とし、また膨大な計算時間がかかることになる。さらに、円孔の節点が構造全体に比べて隣接しているためにソース点が接近してしまい、方程式系の係数マトリックスが悪条件になり数値計算を行なえなくなることもある。従来の境界要素法をそのまま適用して、自動車用マフラーの消音特性を調べた研究⁽¹⁾もあるが、信頼性の高い結果を得るには膨大な計算時間と記憶容量を要するので効率的ではないようである。この困難を避けるために、マフラーの特性評価は近似的な取り扱いを行なうことでそれなりの成果が得られている^{(2)~(6)}。そこで、本研究ではこのような問題のより効率的で高精度な新しい境界要素法を提案し、これを3次元定常音響問題に適用する方法について考察する。前報⁽⁷⁾において精度良く解析できな

った問題点について改善をおこなう。開発した解析プログラムを用いて例題について数値計算を行ない、本解法の有用性を確かめる。

2. 解析法

2.1 境界積分方程式と離散化 円孔を含む境界部分を要素分割せずに解析するためには、その円孔部分で音圧と粒子速度に関する近似式が必要となる。ここでは、Fig.1に示すような音場の界面に微小円孔を N 個有する3次元問題を考える。前報⁽⁷⁾では、この部分で音圧と粒子速度が一定であると仮定した。このため、精度が良くない結果が得られる場合もあった。そこで本報では、円孔部分の要素分割を必要とする従来の3次元定常音響問題解析システム⁽⁸⁾（従来法と呼ぶ）で本論文3.1の例題を精密に解析したときの円孔部分の節点値を参考にして、円孔部分で音圧 $P_h(h=1, N)$ が一定であり、粒子速度 $V_h(h=1, N)$ が次式で近似できると仮定する。

$$V_h = V_{h0} + V_{h1}\rho\cos\theta + V_{h2}\rho\sin\theta + V_{h3}\rho^2\cos\theta + V_{h4}\rho^2\sin\theta \quad (1)$$

Fig.1 Acoustic field divided by interface boundary with small holes

* 原稿受付 1995年5月11日。

^{*1} 正員, 信州大学工学部 (〒380 長野市若里500)。

^{*2} 准員, 三菱自動車工業(株) (〒108 東京都港区芝5-33-8)。

^{*3} 学生員, 信州大学大学院。

Fig.2 Local coordinate system

ただし, ρ, θ はそれぞれFig.2に示す局所座標系での円孔の半径方向距離, ξ_1 軸となす角である.

Helmholtz方程式で支配される定常音響問題を考えるものとする, この問題の積分方程式は次のように表すことができる⁽⁹⁾.

$$\begin{aligned} p(y) + \int_{\Gamma} q^* p d\Gamma - \sum_{h=1}^N \int_{\Gamma_h} q^* p d\Gamma_h + \sum_{h=1}^N \int_{\Gamma_h} q^* P_h d\Gamma_h \\ = -j\omega\rho \left\{ \int_{\Gamma} p^* v d\Gamma - \sum_{h=1}^N \int_{\Gamma_h} p^* v d\Gamma_h + \sum_{h=1}^N \int_{\Gamma_h} p^* V_{h0} d\Gamma_h \right. \\ \left. + \sum_{h=1}^N \int_{\Gamma_h} p^* V_{h1} \rho \cos \theta d\Gamma_h + \sum_{h=1}^N \int_{\Gamma_h} p^* V_{h2} \rho \sin \theta d\Gamma_h \right. \\ \left. + \sum_{h=1}^N \int_{\Gamma_h} p^* V_{h3} \rho^2 \cos \theta d\Gamma_h + \sum_{h=1}^N \int_{\Gamma_h} p^* V_{h4} \rho^2 \sin \theta d\Gamma_h \right\} \quad (2) \end{aligned}$$

ただし, $j = \sqrt{-1}$, ω と ρ は角周波数及び媒質の密度, Γ は領域全体の境界, $\Gamma_h (h=1, N)$ は円孔の境界である. また, p は音圧, v は粒子速度, p^* はHelmholtz方程式の基本解であり, q^* はその流束である. 式(2)を文献(8)になり正規化すれば, 次式のようになる.

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} q^* \{p - p(y)\} d\Gamma + p(y) \int_{\Gamma} (q^* - Q^*) d\Gamma \\ - \sum_{h=1}^N \int_{\Gamma_h} q^* \{p - p(y)\} d\Gamma_h + \sum_{h=1}^N \int_{\Gamma_h} q^* \{P_h - p(y)\} d\Gamma_h \\ = -j\omega\rho \left\{ \int_{\Gamma} p^* v d\Gamma - \sum_{h=1}^N \int_{\Gamma_h} p^* v d\Gamma_h + \sum_{h=1}^N \int_{\Gamma_h} p^* V_{h0} d\Gamma_h \right. \\ \left. + \sum_{h=1}^N \int_{\Gamma_h} p^* V_{h1} \rho \cos \theta d\Gamma_h + \sum_{h=1}^N \int_{\Gamma_h} p^* V_{h2} \rho \sin \theta d\Gamma_h \right. \\ \left. + \sum_{h=1}^N \int_{\Gamma_h} p^* V_{h3} \rho^2 \cos \theta d\Gamma_h + \sum_{h=1}^N \int_{\Gamma_h} p^* V_{h4} \rho^2 \sin \theta d\Gamma_h \right\} \quad (3) \end{aligned}$$

ただし, Q^* はLaplace方程式の基本解についての流束である. 式(3)は, ソース点 y が音場内部及び境界上にあっても成立する.

式(3)を離散化して境界上の節点値に関する代数方程式系を導き問題を解く. 界面上で円孔以外の境界を要素分割し, その総節点数を n 個とする. このときソース点の取り方も n 通りあるので, 式(3)から n 個の方程式を作ることができる. しかし未知数は, 境界条件を適用すれば円孔を除く界面上で n 個, さらに個々の円孔上で

未知パラメータが $P_h, V_{h0}, V_{h1}, V_{h2}, V_{h3}, V_{h4}$ の6個ずつ, すなわち N 個の円孔があれば $6N$ 個存在する. 問題を解くには, 方程式が $6N$ 個不足していることになる. そこで, Fig.1に示すようにソース点が円孔上に3つある場合について考える. このとき, 界面をはさむ2つの領域について式(3)と同様の式が3つずつ作られるので, N 個の円孔に対して $6N$ 個の式が補えることになる. このようにすれば, 円孔部分を要素分割せずに境界要素解析が行なえることがわかる.

さて, 式(3)を境界要素法で離散化すれば, 円孔部分を除く界面上の各節点と円孔面上での諸量について次の代数方程式系が得られる.

$$[H]\{p\} + [H_h]\{P_h\} = [G]\{v\} + [G_h]\{V_h\} \quad (4)$$

ただし, $\{p\}, \{v\}$ は円孔部分を除く界面上及び境界面上の節点での音圧および粒子速度であり, $\{P_h\}, \{V_h\}$ は円孔面上での音圧および粒子速度に関する量である.

式(4)に境界条件を適用すれば, 式の数と未知数の数が一致する. そこで, 未知量を左辺に既知量を右辺に移項して得られる連立方程式を解くことで, 境界上の未知量をすべて求めることができる.

2.2 円孔部の数値積分 式(3)の円孔部の積分にはこのままの形では, 通常用いているGauss数値積分が適用できない. そこで, 円孔をFigs.2, 3に示す座標系を考え, 次式のように置き換える.

$$\int_{\Gamma_h} F d\Gamma_h = \int_0^{2\pi} \left\{ \int_0^{R(\theta)} F \rho d\rho \right\} d\theta \quad (5)$$

ただし, F は式(3)の円孔積分部の被積分関数を表すものとする. 式(5)における $R(\theta)$ は θ の変数であり, これを求めなければ式(5)を評価できない. そこで, まず $R(\theta)$ の求め方について示す.

Fig.2の局所座標系より

$$\xi_1 = \rho \cos \theta, \quad \xi_2 = \rho \sin \theta \quad (6)$$

Fig.3 Boundary element with a hole and global coordinate system

また、円孔を含む四角形2次要素の内挿関数を ϕ とすれば、

$$x_i(\xi_1, \xi_2) = \sum_{k=1}^8 \phi^k x_i^k \quad (7)$$

$$\frac{\partial x_i}{\partial \xi_1} = \sum_{k=1}^8 \frac{\partial \phi^k}{\partial \xi_1} x_i^k, \quad \frac{\partial x_i}{\partial \xi_2} = \sum_{k=1}^8 \frac{\partial \phi^k}{\partial \xi_2} x_i^k \quad (8)$$

である。さらに、

$$\frac{\partial x_i}{\partial \rho} = \frac{\partial x_i}{\partial \xi_1} \cos \theta + \frac{\partial x_i}{\partial \xi_2} \sin \theta \quad (9)$$

であるから、全体座標系での微小長さ dS は次式のように表わせる。

$$dS = \left\{ \left(\frac{\partial x_1}{\partial \rho} \right)^2 + \left(\frac{\partial x_2}{\partial \rho} \right)^2 + \left(\frac{\partial x_3}{\partial \rho} \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} d\rho \quad (10)$$

式(10)を局所座標系で0から $R(\theta)$ まで積分すると全体座標系での円孔の半径 a と等しくなり、その誤差は

$$f(R) = \int_0^{R(\theta)} G(\rho) d\rho - a \quad (11)$$

で表わせる。ただし、

$$G(\rho) = \left\{ \left(\frac{\partial x_1}{\partial \rho} \right)^2 + \left(\frac{\partial x_2}{\partial \rho} \right)^2 + \left(\frac{\partial x_3}{\partial \rho} \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (12)$$

である。また式(11)を変形すると次の関係が得られる。

$$\frac{df(R)}{dR} = G(R) \quad (13)$$

ここで式(11)と式(13)からニュートン法を用いることにより、次式のような反復式を得ることができる。

$$R_{n+1} = R_n - \frac{f(R_n)}{G(R_n)} \quad (14)$$

式(14)の反復式により収束した値が $R(\theta)$ となる。ただし、 R の初期値は全体座標系での円孔の直径と四角形要素の最も長い辺との比から与える。

以上により式(5)の $R(\theta)$ が求められたが、まだGauss数値積分を適用できない。このため、式(5)の θ, ρ をそれぞれ次のように変数変換する。

$$\theta = \pi(\eta_1 + 1) \quad (15)$$

$$\rho = \frac{R(\theta)}{2}(\eta_2 + 1) \quad (16)$$

式(15)と式(16)を用いて式(5)を書き換えると次式のようになる。

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} \left\{ \int_0^{R(\theta)} F(\theta, \rho) \rho d\rho \right\} d\theta \\ &= \int_{-1}^1 \left[\int_{-1}^1 F(\eta_1, \eta_2) \left\{ \frac{R(\pi(\eta_1 + 1))}{2} \right\}^2 (\eta_2 + 1) d\eta_2 \right] \pi d\eta_1 \quad (17) \end{aligned}$$

式(17)の積分を行なえるようにするためには、被積分関数 F のなかの ρ, θ に関する項を η_1, η_2 を用いて表わすことが必要である。しかし、これらの項はソース点から観測点への位置ベクトル r の成分

$$r_i = x_i - y_i = \phi^k (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) x_i^k - y_i \quad (18)$$

で表される。したがって、式(18)を式(17)の被積分関数に用いることにより、円孔部の積分が通常のGauss数値積分で行なえる。

3. 数値計算例と考察

本論文で提案する微小円孔を有する3次元定常音響問題の解析法(本解法と呼ぶ)の有効性を調べるために、立方体の境界に円孔が存在する場合について解析を行なう。本解法により得られた結果と、従来法⁽⁸⁾の結果を比較する。なお、従来法⁽⁸⁾による解析では2-3種類の要素分割で計算して精度を調べ、十分に信頼できる結果が得られている事を確かめた。

3.1 円孔が1つの場合 Fig.4に示すような一辺0.1mの立方体が3次元無限領域中に置かれているものとし、この立方体の一つの壁面に直径0.005mの円孔が1つあいている問題を考える。立方体内部のハッチングを施した面から2.0Pa(100dB)の一樣音圧で音が放射されると仮定する。すなわち、Fig.4 (a), (b)はそれぞれ円孔境界面に対して音波が垂直に入射する場合、平行に入射する場合である。立方体内部のその他の全ての面、および立方体外部は全て剛体境界とする。すなわち、立方体内部の音場は壁面の一つの円孔を通じて外部の3次元無限音場とつながっている。

Figs.5, 6には、本解法を用いた場合と、従来法⁽⁸⁾を用いた場合の要素分割をそれぞれ示す。Fig.4の解析モデルに対し、0~4000Hzの間の1/3オクターブバンドの中心周波数の純音について解析した。Figs.8-13には、Fig.7に示す3つの評価点での音圧レベルについて示す。ただし、Figs.8-10はFig.4 (a)の場合であり、特別に前報⁽⁷⁾で用いた解法とも比較した。また、Figs.11-13はFig.4 (b)の場合である。Figs.8-13を見ると、前報⁽⁷⁾で用いた解法では立方体内部(評価点A)と円孔の中心(評価点B)では精度の良い結果が得られたが、立方体外部(評価点C)では差異が見られたのに対し、今回は新しい仮定を用いることで立方体外部まで精度良く値が求められている。ちなみに本例題では、直径0.001m位まで精度良く解が求められる事を数値計算により確かめている。

(a)

(b)

Fig.4 Cube with one-hole interface in 3-D infinite domain

Fig.5 Boundary element discretization (present BEM)

Fig.6 Boundary element discretization (conventional BEM)

C(0.05,0.22,0)

Fig.7 Coordinates of evaluation points

Fig.8 Sound pressure level at point A

Fig.9 Sound pressure level at point B

Fig.10 Sound pressure level at point C

Fig.11 Sound pressure level at point A

Fig.12 Sound pressure level at point B

Fig.13 Sound pressure level at point C

3.2 複数の円孔がある場合 Fig.14に示すように、一辺が0.1mの立方体に直径0.01mの円孔が4つある問題について考える。その他の条件は、1つの円孔の例と同じである。Figs.15, 16には、境界要素分割を示す。

Figs.18-20には、0~4000Hzの間の1/3オクターブバンドの中心周波数を用いて解析した結果を、Fig.17に示す3つの評価点での音圧レベルについて示す。

円孔が4つある場合は、円孔が1つの場合と比べて高周波数域で多少の差異が見られるが、すべての評価点で精度良く解が求められている。また、ここには示さないが円孔の直径が0.02m, 0.005mの例題を解析し直径が計算精度にあまり影響を与えないことを確認した。

参考までに、EWS HP9000/735を用いた場合について、Figs.5, 6, 15, 16の結果を得るのに要した計算時間をTable 1にまとめて示す。Table 1より、本解法によりかなりの効率化が達成できていることがわかる。

Fig.14 Cube with four-hole interface in 3-D infinite domain

Fig.15 Boundary element discretization (present BEM)

Fig.16 Boundary element discretization (conventional BEM)

Fig.17 Coordinates of evaluation points

Fig.18 Sound pressure level at point A

Fig.19 Sound pressure level at point B

Fig.20 Sound pressure level at point C

Table 1 Computation time

	CPU TIME (s)
one hole (present)	66秒
one hole (conventional)	178秒
four holes (present)	53秒
four holes (conventional)	227秒

4. 結 言

微小円孔のあいた界面で仕切られた音場の効率的な境界要素解析法を提案し、その有用性を確かめた。円孔面では音圧と粒子速度が近似を用いて表されると仮定し、円孔面上の未知量を6つで表した。それにより、前報⁽⁷⁾で精度良く解析できなかった点についても改善がなされている。本解法によれば、従来の境界要素法のように微小円孔のまわりを細かく要素分割する必要がなくなり、計算効率が向上する。本報では、円孔の数が少ない例題を解析したにすぎないが、今後はさらに複雑な具体的問題、例えば排気消音器の音響特性解析などに応用する予定である。

文 献

- (1)小林義明, 今井守之, 小原徹, 片山哲治, 許斐敏明: BEMによる排気消音器の音響特性の解析, 境界要素法論文集, **9**, (1992), pp.169-174.
- (2)Sullivan, J.W.: A Method for Modeling Perforated Tube Muffler Component, I.Theory, II.Application, *J. Acoust. Soc. Am.*, **66**(3), (1979), pp.772-788.
- (3)Jayaraman, K. and Yam, K.: Decoupling Approach to Modeling Perforated Tube Muffler Components, *J. Acoust. Soc. Am.*, **69**(2), (1981), pp.390-396.
- (4)Thawani, P.T. and Jayaraman, K.: Modeling and Application of Straight-Through Resonator, *J. Acoust. Soc. Am.*, **73**(4), (1983), pp.1387-1389.
- (5)Munjal, M.L., Rao, K.N. and Sahasrabudhe, A.D.: Aeroacoustic Analysis of Perforated Muffler Components, *Journal of Sound and Vibration*, **114**(2), (1987), pp.173-188.
- (6)Peat, K.S.: A Numerical Decoupling Analysis of Perforated Pipe Silencer Elements, *Journal of Sound and Vibration*, **123**(2), (1988), pp.199-212.
- (7)田中正隆, 松本敏郎, 山田泰永, 尾崎友彦: 微小円孔のあいた界面を持つ音場の効率的な境界要素解析法, 日本機械学会論文集, **60C**-579, (1994), pp.273-278.
- (8)松本敏郎, 田中正隆, 山田泰永: 境界要素法による音響問題の設計感度解析法, 日本機械学会論文集, **59C**-558, (1993), pp.430-435.
- (9)松本敏郎, 田中正隆, 石井昇: 微小円孔を有する場の二次元定常熱伝導問題における効率的BEM感度解析法, 日本機械学会論文集, **59A**-566, (1993), pp.2448-2453.