差動歯車機構の減速効率と増速効率の比較*

(第1報, 理論式の誘導と計算例)

石橋 彰^{*1}, 園田 計二^{*1}, 前之園 好爾^{*2}

Comparison of Speed Increase and Speed Reduction Efficiencies of Differential Gear Drives

(1st Report, Derivation of Theoretical Equations and Numerical Examples)

Akira ISHIBASHI, Keiji SONODA and Koji MAENOSONO

This paper derives new equations for calculating the efficiencies of differential gear drives using simple laws based on mechanics. When the new equations are used, the efficiency for speed reduction is lower than that for speed increase, in most cases. This is completely opposite to the case of the results obtained from the earlier equations. The reason for this is clearly shown by analyzing the power flows used for deriving the equations. It is found that the power flows used for deriving the earlier equations do not satisfy the boundary conditions due to an assumption which is unconsciously introduced in the process of deriving the equations. Numerical calculations are conducted and differences in the efficiencies are shown in the case of representative differential gear drives.

Key Words: Gear, Machine Element, Efficiency, Gear Drive, Planetary Gear, Tribology, Speed Increase, Speed Reduction

1. 結 言

差動遊星歯車機構は、ウォームギアのように簡単に变速比を大きくすることができるが、ある限度以上に減速比を大きくすれば、ウォームギアと同じように自動締り(self-locking)の現象が起こると推定されている⁽¹⁾。その理由は、現在までよく使用されている遊星歯車機構の理論効率の計算式を用いれば、同じ遊星歯車機構の場合には、増速効率のほうが減速効率よりも常に低い計算値が得られるためであると考えられる。

しかし、最近著者らが明らかにした遊星歯車機構の正確な計算法⁽²⁾を利用して計算した結果と比較したところ、従来の計算式を用いれば、かなりの近似誤差の現れる場合のあることに気づいた。また、差動遊星歯車機構を用いた実験でも、増速効率のほうが減速効率よりも高くなるという結果を得た。

本論文では、誤差の原因となる仮定が無意識で導入されることを避けるため、従来の計算法を利用しないで、力学的基本事項のみを用いて効率の計算式を誘導する。

本論文の第1報では、ラックとピニオンで構成される、最も簡単な差動歯車機構の増速と減速の理論効率の正確な計算式を誘導する。次に、この基礎的計算法を用いて、ピニオン(遊星歯車)と内歯車で構成される差動遊星歯車機構の効率の計算式を誘導する。また、従来の計算式の誤差と比較するために、「動力の重ね合せ法」による近似式も誘導する。

3種類の計算法で利用された差動歯車機構内の動力の流れの差異を比較して、この動力の流れが満たす境界条件が現実の境界条件と異なる程度が大きいときに、効率の計算誤差も大きくなることを示す。

第2報では、軸受損失も考慮した3K形差動歯車機構の正確な効率計算式および詳細な実験結果を述べる。

2. 増速効率と減速効率の実測例

表1は、実験に用いた3K形差動遊星歯車機構の諸元を示す。小内歯車が固定されているので、入力軸と出力軸の回転方向が逆となる。動力伝達効率は出力軸と入力軸に取付けたおもりによるトルクから計算するという基礎的な方法で測定した。この方法を利用すれば、トルク測定用のスリップリングやひずみ計が必要でなく、また潤滑油のかくはん損失などの影響が表れ

* 原稿受付 1995年6月26日。

^{*1} 正員、佐賀大学理工学部(〒840 佐賀市本庄町1)。

^{*2} 正員、佐賀大学大学院。

Table 1 Specifications of 3K type planetary gear drive

1st stage		Sun gear	Planet gear(1)	Internal gear(1)
Module	m(mm)	1	1	1
No. of teeth	Z	39	33	105
Pitch circle dia.	2R(mm)	39.00	33.00	105.00
Tooth tip dia.	d _s (mm)	41.00	35.00	103.00
Pressure angle	α(°)	20	20	20
Face width	b(mm)	12	12	25
No. of gears	n	1	3	1
2nd stage		Planet gear(2)	Internal gear(2)	
Module	m(mm)	1	1	
No. of teeth	Z	39	111	
Pitch circle diameter	2R(mm)	39.00	111.00	
Tooth tip diameter	d _s (mm)	41.00	109.00	
Pressure angle	α(°)	20	20	
Face width	b(mm)	25	25

Fig. 1 Experimental results on efficiencies

ないので、非常に正確な測定結果が得られる。

増速と減速効率の測定結果の一例を図1に示す。減速比($u=31$)はあまり大きくないが、増速効率のほうが、減速効率よりも数%高いことがわかる。測定者を変えても、また潤滑油として特別な油(例えば、トラクション油)を用いても、増速効率が減速効率よりも低くなることはなかった。

3. ラックとピニオンを用いた 差動歯車機構の効率

動力損失は、歯面のかみあい部のみで生ずるものと仮定する。また、歯面間の動力損失は差動運動のない一對の歯車の基準効率^{(3)~(5)}を用いて計算する。

3・1 減速効率の計算式の誘導 図2は二対のラックとピニオンを用いて減速する差動歯車機構(1)の模型図を示す。ピニオンのキャリアを手で引張って駆動して、下側のラックに出力された動力(力)で負荷となっているおもり W をロープで引き上げているところを示している。ピッチ円半径の小さいほうのピニオンとかみあうラックがベッドに固定されている。

ピニオンのキャリアを右側(正の方向)に距離 S_c だ

Fig. 2 Gear drive (1) for speed reduction

け動かせば、下側のラックが左側に S_5 の距離だけ移動しておもり ($W=F_5$) を引き上げる。ピニオンは $\theta_2 = S_c/R_2$ だけ回転するので、速度比 C_v は次式で示される。

$$C_v = -\frac{S_c}{S_5} = -\frac{R_2}{(R_4 - R_2)} \quad \dots\dots\dots (1)$$

ピニオンの軸を介してピニオンの中心に作用する駆動力 $F_{c\text{th}}$ は、ピニオンのキャリアの動く方向と同じ方向に作用する。ピッチ円半径が R_2 のピニオンに作用する円周力 F_2 、およびピッチ円半径が R_4 のピニオンに作用する円周力 F_4 は、ピニオンに作用する三つの力およびそのモーメントがてこの原理でバランスするという条件から次式で示されることがわかる。なお、サフィックスの th は摩擦損失のない場合の値(理論値)を示す。

$$F_2 = F_{2\text{th}} = F_{3\text{th}} = \frac{R_4 F_{c\text{th}}}{(R_4 - R_2)} \quad \dots\dots\dots (2)$$

$$F_4 = F_{4\text{th}} = F_{5\text{th}} = \frac{R_2 F_{c\text{th}}}{(R_4 - R_2)} \quad \dots\dots\dots (3)$$

一對の歯車のかみあい部の歯面間に生ずる損失 ΔL は、基準効率を用いて表すので、円周力 F とそれがピッチ円上で動いた距離 S に、損失率 $(1-\eta)$ をかければ求めることができる。したがって、ピッチ円半径 R_2 のピニオンとラックのかみあい部に生ずる損失 ΔL_1 、およびピッチ円半径 R_4 のピニオンとラックのかみあい部に生ずる損失 ΔL_2 は次のように表すことができる。

$$\Delta L_1 = F_{2\text{th}} R_2 (S_c/R_2) (1-\eta_{23}) \quad \dots\dots\dots (4)$$

$$\Delta L_2 = F_{4\text{th}} R_4 (S_c/R_2) (1-\eta_{45}) \quad \dots\dots\dots (5)$$

ただし、 η_{23} は上側のラックとピニオンのかみあい部の基準効率、 η_{45} は下側のラックとピニオンのかみあい部の基準効率である。

図2の差動歯車機構の理論効率は、式(4)と(5)を利用すれば次式で計算できる。

$$\eta = 1 - \frac{\Delta L_1 + \Delta L_2}{F_{c\text{th}} S_c} = 1 - \frac{2 - \eta_{23} - \eta_{45}}{1 - (R_2/R_4)} \dots\dots\dots (6)$$

3・2 増速効率計算式の誘導 図3は差動歯車機構(2)を用いて増速する場合の模型図を示す。ピニオンのキャリアに出力された動力(力)で、おもり W をロープで引き上げているところを示している。入力ラックを左側に距離 S_5 だけ動かせば、ピニオンのキャリアは右側に S_c の距離だけ移動して負荷となっているおもり ($W = F_c$) を引き上げる。このとき、ピニオンは $\theta_4 = (S_5 + |S_c|)/R_4$ の角度だけ回転する。

差動歯車機構(2)では、駆動ラックを S_5 の距離だけ移動させたときに、ラックに作用する円周力は ($S_5 + |S_c|$) の距離だけ移動するので、かみあう歯面間の動力損失 ΔL_3 は式(7)で表される。

$$\Delta L_3 = F_{5\text{th}}(S_5 + |S_c|)(1 - \eta_{45}) \dots\dots\dots (7)$$

ここで、差動遊星歯車機構の効率計算式を簡明にするため、等価効率を導入する。差動歯車機構(2)の等価効率は、駆動ラックと歯車の歯面間の損失をラックの移動量 S_5 のみで式(8)のように表したときの効率 η_{E5} である。したがって、 $\Delta L_3 = \Delta L'_3$ とおけば、等価効率 η_{E5} は式(9)で示されることがわかる。

$$\Delta L'_3 = F_{5\text{th}} S_5 (1 - \eta_{E5}) \dots\dots\dots (8)$$

$$\eta_{E5} = \frac{(S_5 + |S_c|)\eta_{45} - |S_c|}{S_5} = (1 - C_5)\eta_{45} + C_5 \dots\dots\dots (9)$$

ただし、 C_5 は公転率⁽²⁾の一種であるが、この差動歯車機構の場合は、式(1)で表されている速度比

$$C_v = -S_c/S_5 = -R_2/(R_4 - R_2)$$

と同じである。

ラックの駆動による増速の場合には、ピニオンに作用する円周力は、駆動ラックとピニオンの歯面間の摩擦損失による円周力の減少を考慮したものとなる。また、ピニオンに作用する三つの力 (F_c, F_2, F_4) は、その力とモーメントのバランスから計算できる。

Fig. 3 Gear drive (2) for speed increase

$$\left. \begin{aligned} F_c &= F_{5\text{th}} \eta_{E5} (R_4 - R_2) / R_2 \\ F_2 &= F_{5\text{th}} \eta_{E5} R_4 / R_2 \\ F_4 &= F_{5\text{th}} \eta_{E5} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (10)$$

ピッチ円半径 R_4 のピニオンとラックのかみあい部に生ずる損失 ΔL_4 は次式で表すことができる。

$$\Delta L_4 = F_{2\text{th}} \eta_{E5} |S_c| (1 - \eta_{23}) \dots\dots\dots (11)$$

差動歯車機構(2)の理論増速効率は、式(7)または式(8)と式(11)を用いて計算できるので、式(12)が得られる。

$$\begin{aligned} \eta &= 1 - \frac{\Delta L_3 + \Delta L_4}{F_{5\text{th}} S_5} \\ &= 1 - (1 - \eta_{45} + \eta_{E5} - \eta_{E5} \eta_{23}) / (1 - R_2/R_4) \dots\dots\dots (12) \end{aligned}$$

4. 内歯車とピニオンを用いた差動歯車機構の効率

3章で示した差動歯車機構のラックの代わりに内歯車を用いれば、差動遊星歯車機構の正確な効率計算式が、従来の計算法を用いなくて、力学的基本事項のみを利用して誘導できる。

4・1 減速効率の計算式の誘導

図4は二対の内歯車とピニオン(遊星歯車)を用いて減速する差動歯車機構(3)の模型図を示す。小内歯車が固定されている。この図では、効率の計算に重要な円周力の方向をそれが作用するピッチ円を明示するため、また、ピッチ円上の基準点 ($P_{20}, P_{30}, P_{40}, P_{50}$) を示すため、実際には接する二つのピッチ円は、少し離して示している。図4(b)には、異なる方法で角速度比を計算するときに利用できる瞬間速度ベクトルを示している。

遊星歯車軸の摩擦損失はないと仮定しているので、 $F_c = F_{c\text{th}}$ となる。遊星歯車に作用する円周力 F_2 と F_4 は、三つの力とそのモーメントのバランスから計算できる。

$$F_2 = F_{2\text{th}} = F_{3\text{th}} = \frac{R_4 F_{c\text{th}}}{(R_4 - R_2)} \dots\dots\dots (13)$$

Fig. 4 Gear drive (3) for speed reduction

$$F_4 = F_{4th} = F_{5th} = \frac{R_2 F_{c th}}{(R_4 - R_2)} \quad \dots\dots\dots (14)$$

内歯車に作用する円周力 F_3 と F_5 は、かみあい部の摩擦損失を考慮して決めなければならない。固定内歯車は、その固定を解除すれば被動歯車として超低速で回転させることができるので、無限に遅い速度で回転する被動歯車と同じである⁽⁶⁾。したがって、固定内歯車に作用する円周力 F_3 は、遊星歯車に作用する円周力 $F_2 = E_{2th}$ よりも必ず小さくなる。この境界条件は、計算式の誘導に使用する動力の流れが実際のものと異なるようにするために必要な重要な条件となる。

図5は、差動遊星歯車機構(3)の遊星歯車のキャリアを、反時計針方向に θ_{cx} だけ回転させたときの遊星歯車と内歯車の回転角度などを示している。固定内歯車のピッチ円上での円周力の移動距離は $R_3\theta_{cx}$ となる。また、出力軸の大内歯車は時計針方向に θ_{5x} だけ回転するので、この内歯車のピッチ円上での円周力の移動距離は $R_5(|\theta_{5x}| + \theta_{cx})$ となる。したがって、固定内歯車と小遊星歯車の歯面間の動力損失 ΔL_5 および大遊星歯車と出力軸の内歯車の歯面間の動力損失 ΔL_6 はラックとピニオンを用いた差動歯車機構の場合と同じように計算できる。

$$\Delta L_5 = F_{2th} R_3 \theta_{cx} (1 - \eta_{23}) \quad \dots\dots\dots (15)$$

$$\Delta L_6 = F_{5th} R_5 (|\theta_{5x}| + \theta_{cx}) (1 - \eta_{45}) \quad \dots\dots\dots (16)$$

差動歯車機構(3)の理論効率は次式で示される。

$$\eta = 1 - \frac{\Delta L_5 + \Delta L_6}{F_{c th} R_c \theta_{cx}} = 1 - \frac{R_3(2 - \eta_{23} - \eta_{45})}{R_c [1 - (R_2/R_4)]} \quad \dots\dots\dots (17)$$

ただし、計算式を簡潔にするため、図5から計算した式(18)で示される回転角度の関係を利用した。

$$|\theta_{5x}| = \theta_{cx} (R_c/R_2)(R_4 - R_2)/R_5 \quad \dots\dots\dots (18)$$

4・2 増速効率の計算式の誘導 図6は差動遊星歯車機構(4)の大内歯車を駆動歯車として、反時計針方向に回転させた場合の円周力などを示す。歯面間に

損失のない場合は、各歯車に作用する円周力の大きさは、減速の場合とまったく同じであるが、損失のある場合はかなり異なる。

駆動歯車(大内歯車)と遊星歯車の歯面間に生ずる動力損失 ΔL_7 は円周力がピッチ円上で動いた距離 $R_5(\theta_{5x} + |\theta_{cx}|)$ に円周力と損失率をかければ求められる。また、計算式を簡単にするときに必要な等価効率 η_{E5} は、式(19)で示される損失 ΔL_7 を出力軸の内歯車の有効回転角度 θ_{5x} のみで式(20)のように表して、 ΔL_7 に等しいとおけば、計算できる。計算結果は、式(21)で示される。

$$\Delta L_7 = F_{5th} R_5 (\theta_{5x} + |\theta_{cx}|) (1 - \eta_{45}) \quad \dots\dots\dots (19)$$

$$\Delta L_7 = F_{5th} R_5 \theta_{5x} (1 - \eta_{E5}) \quad \dots\dots\dots (20)$$

$$\eta_{E5} = \frac{(|\theta_{cx}| + \theta_{5x})\eta_{45} - |\theta_{cx}|}{\theta_{5x}} = (1 - C_5)\eta_{45} + C_5 \quad \dots\dots\dots (21)$$

ただし、

$$C_5 = -|\theta_{cx}/\theta_{5x}|$$

である。 θ_{cx} と θ_{5x} をキャリアと大内歯車の単位時間当たりの回転角度とすれば、 $C_5 = -|\omega_c/\omega_5|$ (角速度比)と同じとなるので、図6の速度ベクトル図からも計算できる。なお、式(21)は、ラックとピニオンを用いた差動歯車機構(2)において得られた等価効率の式と同じ形になっていることがわかる。

固定内歯車と遊星歯車の歯面間の摩擦損失 ΔL_8 は、式(22)で計算できるので、図6の差動遊星歯車機構(増速)の理論効率は、式(23)で示される。

$$\Delta L_8 = F_{2th} \eta_{E5} R_3 |\theta_{cx}| (1 - \eta_{23}) \quad \dots\dots\dots (22)$$

$$\eta = 1 - \frac{\Delta L_7 + \Delta L_8}{F_{5th} R_5 \theta_{5x}} = 1 + \frac{R_3 R_4}{R_2 R_5} C_5 \eta_{E5} (1 - \eta_{23}) - (1 - C_5)(1 - \eta_{45}) \quad \dots\dots\dots (23)$$

5. 動力の重ね合わせによる 効率計算式の誘導

遊星歯車機構の理論効率の計算式の誘導に、絶対座

Fig. 5 Positions of pinions and larger internal gear in gear drive (3) after rotation

(a) Forces on gears (b) Speed vectors
Fig. 6 Gear drive (4) for speed increase

標軸系(地面に固定された座標軸)を用いても、相対座標軸系(遊星歯車のキャリアと同じ角速度で回転する回転座標軸)を用いても、同じ結果が得られる。また、遊星歯車機構内の動力の流れは、絶対座標軸系を用いて表しても、回転座標軸系を用いて表しても、同じとなる⁽⁷⁾。

従来の計算法では、回転座標軸系を使用したときに、固定歯車から動力が流入するという実際と異なる境界条件を容認する場合があるために、大きな近似誤差が表れる場合がある。

差動歯車機構の正確な効率計算式の誘導方法は、第3章と4章に述べた。この章では、計算法の違いによる動力の流れの違いを比較するため、「動力の重ね合わせ法」を用いて効率の近似計算式を誘導する。

5・1 ラックとピニオンを用いる減速歯車機構

注目している歯車に作用している力の方向とこの力の作用点の動く方向が反対のときに、この歯車は駆動歯車となる。力の方向と動く方向が同じときには、この歯車は被動歯車となる。

図2に示す差動歯車機構(1)において、歯面間に理論円周力を作用させて、摩擦がない状態で平行状態を保たせながら、機構全体を右方向に S_c の距離だけ動かす。キャリアから $F_{c\text{th}}S_c$ の動力が、また下側のラックからは $F_{5\text{th}}S_c$ の動力が入力される。一方では、上側のラックからは $F_{3\text{th}}S_c$ の動力が出力されることができ、 $F_{c\text{th}}$ と $F_{5\text{th}}$ の関係を式(2)と(3)から求めれば、入出力の合計は零 $[(F_{c\text{th}} + F_{5\text{th}})S_c - F_{3\text{th}}S_c = 0]$ であることがわかる。次に、キャリアを固定して、上側のラックを $F_{3\text{th}}$ の力で S_c の距離だけ左側に押して、 $F_{3\text{th}}S_c$ の動力を入力すれば、下側のラックは R_4S_c/R_2 の距離だけ左側に動いて、このラックから動力 $F_{5\text{th}}(R_4S_c/R_2)\eta_{23}\eta_{45}$ が出力される。

上記のような仮想的な動きを重ね合わせれば、上側のラックは動かなかったことになり、また下側のラックが左側に $S_5 = (R_4/R_2 - 1)S_c$ の距離だけ動いたことになるので、要求された運動の条件が実現される。このときの動力の重ね合わせの過程と結果を表2に示す。

Table 2 Process of power superposition in gear drive (1)

	Carrier	Upper rack	Lower rack
All elements shifted by $+S_c$	$+F_{c\text{th}}S_c$	$-F_{3\text{th}}S_c$	$+F_{5\text{th}}S_c$
Upper rack shifted by $-S_c$	0	$+F_{3\text{th}}S_c$	$-F_{5\text{th}}S_c \eta_{23}\eta_{45}R_4/R_2$
Sum	$+F_{c\text{th}}S_c$	0	$-F_{5\text{th}}S_c(\eta_{23}\eta_{45}R_4/R_2 - 1)$

す。なお、入力に正の記号を、出力には負の記号を付けて示している。理論効率 $\eta = |\text{出力}|/|\text{入力}|$ は次式で示される。

$$\eta = \frac{F_{5\text{th}}S_c(\eta_{23}\eta_{45}R_4/R_2 - 1)}{F_{c\text{th}}S_c} = \frac{I_0\eta_0 - 1}{I_0 - 1} \dots\dots (24)$$

ただし、

$$I_0 = R_4/R_2$$

$$\eta_0 = \eta_{23}\eta_{45}$$

である。

5・2 ラックとピニオンを用いる増速歯車機構

図3に示す差動歯車機構(2)の円周力に注目して、動力の重ね合わせを行えば、表3が得られる。理論効率 η は次式で示される。

$$\eta = \frac{F_{c\text{th}}S_c}{F_{5\text{th}}S_c[R_4/(R_2\eta_{23}\eta_{45}) - 1]} = \frac{\eta_0(I_0 - 1)}{I_0 - \eta_0} \dots\dots\dots (25)$$

ただし、

$$I_0 = R_4/R_2$$

$$\eta_0 = \eta_{23}\eta_{45}$$

である。

5・3 内歯車とピニオンを用いる減速歯車機構

図4に示す差動歯車機構(3)において、歯面間に摩擦がないと仮定して、理論円周力などをバランスさせた状態で機構全体を θ_c だけ時計針方向に回転させる。このとき、小内歯車から $F_{3\text{th}}R_3\theta_c$ の動力が入力されるが、キャリアからは $F_{c\text{th}}R_c\theta_c$ 、大内歯車からは $F_{5\text{th}}R_5\theta_c$ の動力が出力される。次に、キャリアを固定して小内歯車を θ_c の角度だけ反時計針方向に回転させる。動力の重ね合わせの過程と結果を表4に示す。

Table 3 Process of power superposition in gear drive (2)

	Carrier	Upper rack	Lower rack
All elements shifted by $+S_c$	$-F_{c\text{th}}S_c$	$+F_{3\text{th}}S_c$	$-F_{5\text{th}}S_c$
Upper rack shifted by $-S_c$	0	$-F_{3\text{th}}S_c$	$+F_{5\text{th}}S_cR_4/(R_2\eta_{23}\eta_{45})$
Sum	$-F_{c\text{th}}S_c$	0	$+F_{5\text{th}}S_c[R_4/(R_2\eta_{23}\eta_{45}) - 1]$

Table 4 Process of power superposition in gear drive (3)

	Carrier	Smaller ring gear	Larger ring gear
All elements rotated by $+\theta_c$	$+F_{c\text{th}}R_c\theta_c$	$-F_{3\text{th}}R_3\theta_c$	$+F_{5\text{th}}R_5\theta_c$
Smaller ring gear rotated by $-\theta_c$	0	$+F_{3\text{th}}R_3\theta_c$	$-F_{5\text{th}}R_5\theta_c I_0\eta_0$
Sum	$+F_{c\text{th}}R_c\theta_c$	0	$-F_{5\text{th}}R_5\theta_c(I_0\eta_0 - 1)$

したがって、理論効率は次式で示される。

$$\eta = \frac{F_{5th} R_5 \theta_c [\eta_{23} \eta_{45} (R_3/R_2)(R_4/R_5) - 1]}{(F_{5th} R_5 \theta_c)} \\ = 1 - \frac{\Delta L_9 + \Delta L_{10}}{F_{5th} R_5 \theta_c} = \frac{I_0 \eta_0 - 1}{I_0 - 1} \quad (26)$$

$$\Delta L_9 = F_{5th} R_5 \theta_c I_0 (1 - \eta_{23})$$

$$\Delta L_{10} = F_{5th} R_5 \theta_c I_0 \eta_{23} (1 - \eta_{45})$$

ただし、

$$I_0 = (R_3/R_2)(R_4/R_5)$$

$$\eta_0 = \eta_{23} \eta_{45}$$

とする。

式(26)は、歯数比 I_0 の内容が異なるだけで、式の形はピニオンとラックを用いた場合の式(24)と同じである。

5・4 内歯車とピニオンを用いる増速歯車機構

図6に示す差動歯車機構(4)において、動力の重ね合わせを行えば、増速効率を示す次式が得られる。

$$\eta = (F_{5th} R_5 \theta_c) / [F_{5th} R_5 \theta_c \{ (1/\eta_{23} \eta_{45}) \\ \times (R_3/R_2)(R_4/R_5) - 1 \}] \\ = \frac{F_{5th} R_5 \theta_c}{F_{5th} R_5 \theta_c (I_0 - 1) + \Delta L_{11} + \Delta L_{12}} \\ = \frac{\eta_0 (I_0 - 1)}{I_0 - \eta_0} \quad (27)$$

$$\Delta L_{11} = F_{5th} R_5 \theta_c I_0 (1/\eta_{45} - 1)/\eta_{23}$$

$$\Delta L_{12} = F_{5th} R_5 \theta_c I_0 (1/\eta_{23} - 1)$$

ただし、

$$I_0 = (R_3/R_2)(R_4/R_5)$$

$$\eta_0 = \eta_{23} \eta_{45}$$

である。式(27)は、歯数比 I_0 の内容が異なるだけで、式の形はピニオンとラックを用いた場合の式(25)と同じである。

6. 差動歯車機構における動力の流れ

差動歯車機構には、外部から加えられた動力よりも大きい動力の流れが機構の内部に存在する場合があることはよく知られている。差動歯車機構内の動力の流れは、簡単には説明できないが、効率の計算式の誘導に正確な動力の流れを用いない場合には、計算結果に誤差が生ずる。ここでは、代表例として、内歯車とピニオンを用いる差動遊星歯車機構の動力の流れについて説明する。

6・1 減速の場合 従来の計算法の中で、現在でもよく使用されている、三モーメントバランス法を用いた場合の動力の流れを明らかにする。図4に示す差動歯車機構(3)において、キャリアを駆動して減速する場合の効率計算式は次式で示されている⁽⁴⁾⁽⁸⁾。

$$\eta = \frac{M_5 |\omega_5|}{M_c \omega_c} = \frac{(I_0 - 1) \eta_{23} \eta_{45}}{I_0 - \eta_{23} \eta_{45}} \quad (28)$$

ただし、 M_c 、 M_5 、 ω_5 および ω_c は、それぞれキャリアに働くモーメント、大内歯車に働くモーメントと角速度およびキャリアの角速度である。 $I_0 = (Z_3/Z_2)(Z_4/Z_5)$ は歯数比を示す。

固定内歯車に働くモーメントを M_3 として、 $M_3 = M_5 I_0 / \eta_{23} \eta_{45}$ および $\omega_5 = -(I_0 - 1) \omega_c$ の関係を利用すれば式(28)は式(29)のように変形できる。

$$\eta = \frac{M_5 |\omega_5|}{[M_5 I_0 / (\eta_{23} \eta_{45}) - M_5] \omega_c} \\ = \frac{(M_5 I_0 - M_5) \omega_c}{(M_5 I_0 / \eta_0 - M_5) \omega_c} = \frac{E_1 - E_2}{E_1 / \eta_0 - E_2} \\ = \frac{E_1 - E_2}{(E_1 + \Delta L_{13} + \Delta L_{14} - E_2)} \quad (29)$$

$$\Delta L_{13} = M_5 \omega_c I_0 (1/\eta_{23} - 1) / \eta_{45}$$

$$\Delta L_{14} = M_5 \omega_c I_0 (1/\eta_{45} - 1)$$

ただし、 $\eta_0 = \eta_{23} \eta_{45}$ 、 $E_1 = M_5 I_0 \omega_c$ 、 $E_2 = M_5 \omega_c$ である。

以上の結果を総合すれば、従来の三モーメントバランス法で用いられた動力の流れは図7(a)に示すようになることがわかる。キャリアと同じ角速度で回転する回転座標系を用いて明らかにされた仮想の動力の流れ($E_1/\eta_0 \rightarrow E_1$)は意識的に利用されているが、もう一つの動力の流れ($E_2 \rightarrow E_2$)は三モーメントバランス法を利用したときに自動的に導入されている。固定内歯車が駆動歯車と仮定されたことになっているので、小内歯車(固定歯車)に作用する円周力が理論値よりも大きくなり、動力が小内歯車(固定内歯車)から遊星歯車に供給されたことになっている。

図7(b)は動力の重ね合わせ法を用いた場合の動力の流れを示す。固定歯車に作用する円周力には理論値 F_{5th} しか使用されていない。また動力はキャリアから供給されたことになっているので、著しく不合理な境界条件を容認していないことがわかる。図7(c)は、正確な計算式(17)を誘導するときに使用された動力の流れを示す。実際の動力の流れと一致していることがわかる。

Fig. 7 Power flows in gear drive (3) (speed reduction)

Fig. 8 Power flows in gear drive (4) (speed increase)

6.2 増速の場合 図6に示す差動歯車機構(4)

において、大内歯車を駆動して増速する場合の効率を従来の三モーメントバランス法で計算した結果は次式で示されている⁽⁴⁾⁽⁸⁾。

$$\eta = \frac{M_c |\omega_c|}{M_5 \omega_5} = \frac{(I_0 \eta_{23} \eta_{45} - 1)}{I_0 - 1} \dots (30)$$

ただし、 M_c 、 M_5 、 ω_5 および ω_c は、それぞれキャリアに働くモーメント、大内歯車に働くモーメントと角速度およびキャリアの角速度である。 $I_0 = (Z_3/Z_2)(Z_4/Z_5)$ は歯数比を示す。

固定内歯車に働くモーメントは、 $M_3 = M_5 I_0 \eta_{23} \eta_{45}$ で示されている。このモーメントの関係、および角速度の関係 $|\omega_c| = (I_0 - 1)\omega_5$ を利用すれば、式(30)は式(31)のように変形できる。

$$\eta = \frac{(M_5 I_0 \eta_0 - M_5) \omega_5}{(M_5 I_0 - M_5) \omega_5} = \frac{E_3 \eta_0 - E_4}{E_3 - E_4} = 1 - \frac{\Delta L_{15} + \Delta L_{16}}{(M_5 I_0 - M_5) \omega_5} \dots (31)$$

$$\Delta L_{15} = M_5 \omega_5 I_0 (1 - \eta_{45})$$

$$\Delta L_{16} = M_5 \omega_5 I_0 \eta_{45} (1 - \eta_{23})$$

ただし、

$$\eta_0 = \eta_{23} \eta_{45}$$

$$E_3 = M_5 \omega_5 I_0$$

$$E_4 = M_5 \omega_5$$

である。上記の考察で明らかにされた動力の流れを図8(a)に示す。

動力の重ね合わせ法で使用された動力の流れは図8(b)に示す。正確な理論効率の計算に利用された動力の流れは、図8(c)に示すように、実際の動力の流れと一致して、また実際の境界条件も満している。

7. 数値計算例と考察

7.1 数値計算例 基準効率を2種類変化させた場合の理論効率の数値計算例を表5に示す。本論文で明らかにした正確な計算式および「動力の重ね合わせ

Table 5 Efficiencies of gear drives (1)~(4)

Gear drive	Speed	Present equations		Earlier equations Refs. (4) and (8)
		Accurate eqs.	Superposition	
(1)*	Reduction	0.475	0.478	No equation
(2)*	Increase	0.541	0.651	No equation
(1)**	Reduction	0.370	0.374	No equation
(2)**	Increase	0.458	0.608	No equation
(3) [†]	Reduction	0.213	0.217	0.555
(4) [†]	Increase	0.361	0.555	0.217
(3) ^{††}	Reduction	0.055	0.061	0.508
(4) ^{††}	Increase	0.254	0.508	0.061

* $R_2 = 20$, $R_4 = 21$ mm, $\eta_{23} = 0.985$, $\eta_{45} = 0.990$
 ** $R_2 = 20$, $R_4 = 21$ mm, $\eta_{23} = 0.980$, $\eta_{45} = 0.990$
[†] $R_2 = 20$, $R_4 = 60$, $R_4 = 21$, $R_5 = 61$ mm, $\eta_{23} = 0.985$, $\eta_{45} = 0.990$
^{††} $R_2 = 20$, $R_4 = 60$, $R_4 = 21$, $R_5 = 61$ mm, $\eta_{23} = 0.980$, $\eta_{45} = 0.990$

法」を用いた近似式のいずれを用いても、増速効率のほうが減速効率よりも高くなっている。なお、歯面間の基準効率は、代表的な摩擦係数 $\mu = 0.06 \sim 0.09$ から推定される代表的な値 $0.98 \sim 0.995$ の中から選んでいる。

7.2 考察 従来の計算式を用いれば、減速効率のほうが増速効率よりも高くなっている。また、動力の重ね合わせ法による近似計算式のほうが、三モーメントバランス法による近似計算式よりも近似度が高いことがわかる。

従来の三モーメントバランス法で用いられた動力の流れは、キャリアと同じ角速度で回転する回転座標系を用いて、推定された仮想の動力の流れを利用して図7の動力 E_1 および図8の E_3 を決めている。減速の場合は、固定内歯車を駆動歯車と仮定しているので、小内歯車(固定歯車)に作用する円周力が理論値よりも大きくなっている。このため、計算式の誘導に使用された動力の流れが、実際のものと著しく異なるようになっている。これが増速効率のほうが減速効率よりも低くなるという結果を与えるおま原因である。

8. 結 論

代表的2種類の差動歯車機構の理論効率を正確に計算する式を、従来の計算方法を用いないで、力学の基礎理論のみを用いて誘導して次の結果を得た。

(1) ラックとピニオンを用いた差動歯車機構および内歯車とピニオンを用いた遊星差動歯車機構において、減速効率のほうが常に増速効率よりも低くなる。

(2) この結果は、従来の計算式による結果と完全に逆となっている。

(3) 従来の計算式を用いた場合に、減速効率のほうが増速効率よりも高くなる理由を明らかにするた

め、計算式の誘導に利用されている動力の流れを解明して、それが実際のものとかかなり異なることを示した。

(4) 本研究で明らかにした「動力の重ね合わせ法」で利用する動力の流れは、従来の計算式の場合よりも、実際のものに近いので、近似誤差も少なく、増速効率のほうが減速効率よりも高くなるという結果を与える。

(5) 数値計算例で、従来の計算式を用いた場合に生ずる理論効率の計算誤差の程度を明らかにした。

文 献

- (1) Radzimovsky, E. I., How to Find Efficiency, Speed, and Power in Planetary Gear Drives, *Machine Design*, 31

12(1959), 144-153.

- (2) 石橋彰・園田計二・穂屋下茂, 遊星歯車と差動遊星歯車の動力伝達効率の計算式(第1報, 代表的歯車装置に対する正確な計算式の誘導), *機論*, 58-554, C(1992), 3075-3081.
- (3) Niemann, G. and Winter, H., *Maschinenelemente*, 2 (1983), 218, Springer Verlag.
- (4) 両角宗晴, 遊星歯車と差動歯車の理論と設計計算法, (1989), 22, 日刊工業新聞社.
- (5) Johnson, K. L. and Spence, D. I., Determination of Gear Tooth Friction by Disc Machine, *Tribology Int.*, 24 5 (1991), 269-275.
- (6) 石橋彰・園田計二・穂屋下茂, 遊星歯車と差動遊星歯車の動力伝達効率の計算式(第1報, 代表的歯車装置に対する正確な計算式の誘導)に関する誌上討論, *機論*, 59 560, C (1993), 1328-1329.
- (7) 寺沢寛一, 初等力学, (1944), 98, 裳華房.
- (8) Looman, J., *Zahnradgetriebe*, (1970), 23, Springer Verlag.