歯当たりによる歯車運転性能推定法に関する研究*

(第1報, 歯当たりパターンによる合成誤差曲面の推定)

久保 愛三^{*1}, 松浦 正幸^{*2}, 野中 鉄也^{*1}

Prediction of Performance of Involute Helical Gears by Observation of Tooth Contact Pattern (1st Report, Prediction of Composite Error Surface as Function of Tooth Contact Pattern)

Aizoh KUBO, Masayuki MATSU-URA and Tetsuya NONAKA

Tooth contact pattern or tooth bearing pattern is the most common criterion used to check the state of gears in a gear box or on a meshing frame. From that pattern, an experienced gear engineer can determine, whether the manufacturing and/or the assembling of gears has realized the specified geometrical accuracy of gears and gear box. However, this technique of evaluating tooth contact pattern remains as pure empirical know-how of an experienced engineer. To realize this technique as an engineering method to be transferred easily to other engineers, a practical algorithm to generate the composite form deviation of mating tooth flanks defined on the plane of action, referred to as "composite error surface", as a function of tooth contact pattern of the gear set is proposed in this report. Upon combining this method with a simulation program to calculate the stresses induced in gears as a function of composite error surface, the prediction of gear performance as a function of tooth contact pattern becomes possible.

Key Words: Gear, Design Method, Contact Pattern, Gear Accuracy, Pattern Analysis

1. 結 言

インボリュート円筒歯車の歯当たりの状態から歯車の運転性能を予測する一つの方法として, 合成誤差曲面の「尾根形状」を歯当たりから推定して伝達誤差を求めると, 歯当たりと伝達誤差の間はかなりよい相関が得られることを明らかにし, その間を関係づける指標値を示した⁽¹⁾. しかし, この方法による推定では, 歯車の応力状態など, 他の運転性能に関係をもつ諸量と歯当たりとの関係は予測できなかった. 一方, 歯面の三次元形状精度が与えられたとき, かみあう歯面の合成誤差曲面をそれから計算して, 運転性能に関係をもつ諸量がどのようになるかを予測するシミュレーションプログラムはすでに存在し, その信頼性は実験的ならびに実用においてよく確認されている^{(2)~(9)}. したがって, もし歯当たりからかみあう歯車の合成誤差曲面を十分よい精度で推定することができるなら, それを用いて歯当たりから歯車の性能をよく推定することが可能となる. 本報では, その目的に沿い, 無負荷かみあ

い時の歯当たりより, その歯車の歯面形状の合成誤差曲面を推定する一つの方法を提案する.

2. 中凸歯面形状の次数と歯当たりパターン

歯車の歯面形状精度を, 理想歯面を表すインボリュートヘリコイドと現実の歯面との偏差の大きさとして作用面上で表示する. ここに偏差の大きさは作用線の方角にとり, こう表現された曲面を「誤差曲面」と呼ぶことにする. かみあう一対の歯車の歯面形状精度の誤差曲面を足しあわせたもの, ならびに, これに軸アライメント誤差の効果をつけ加えたものを合成誤差曲面⁽⁷⁾, その振幅を合成誤差と呼ぶことにする. 歯車の歯当たりならびに歯車精度が歯車運転性能に及ぼす影響はこの合成誤差曲面の形状により決定される^{(2)~(9)}. 本論文では, 作用面上で表される合成誤差の大きさを下向きを正として表す.

ある1本の接触線 j 上での合成誤差 $e_j(x_j)$ の最小値を $\min e_j(x_j)$ とし, 同時にかみあう n 本の接触線上でのそれぞれの $\min e_j(x_j)$ のうちの最小値を $e_{\min}$ とすると, ある相対回転角度位置でかみあっている歯面は $e_{\min}$ をもつ接触線上の最小誤差点で相手歯面と点接触を行い, 他の接触線上においては相手歯面と接触しない(図1参照)⁽¹⁾. このとき, 相手歯車に塗料が

* 原稿受付 1995年6月30日.

^{*1} 正員, 京都大学工学部 (〒606 01 京都市左京区吉田本町).

^{*2} 四国電力(株)伊方発電所 (〒796 04 愛媛県西宇和郡伊方町九町).

Fig. 1 Relation between composite error surface, paint thickness and red contact pattern

塗られている場合、相手歯面とのすきまが塗料厚さより小さい部分に塗料が付着すると考えられる。

以上の計算を歯車のかみあいの進行に伴う各相対回転角度位置のおおのについて行えば、作用面上における無負荷赤当たりを求めることができる。

以下では簡単のため、合成誤差、合成歯形曲線等の代わりに、混乱を生じない範囲で「合成」を略し、誤差、歯形曲線等の表現を用いる。

いま、その形状が作用面の中央で最小値をもち(中凸歯面形状)、かつ、歯形、歯すじ両方向の誤差曲線ともに二次曲線である場合を考える。作用面上の最小誤差点に原点をとり、歯幅方向に x 軸、作用線方向に y 軸をとると、作用面の任意の点 (x, y) における誤差値は

$$e(x, y) = ax^2 + by^2 \quad \dots\dots\dots (1)$$

となる[図2(a)参照]。ここに、 a, b は、歯面の誤差振幅を表す任意の定数である。また、かみあい開始点から作用線方向の位置 $q(t)$ における幾何学的接触線は、かみあいの進行を表す時間 t の関数として

$$y = px + q(t) \quad \dots\dots\dots (2)$$

ここに、 $p = -\tan \beta_g$ 、 β_g = 基礎円筒上ねじれ角で表される。

式(2)の接触線上における最小誤差値を E_1 とし、これより上の領域において相手歯面と接しているならば、この接触線は

$$ax^2 + by^2 = E_1 \quad \dots\dots\dots (3)$$

のだ円に接している。そのとき、歯面に塗られた塗料厚さを De とすると、この接触線上における塗料付着部の端点は

$$ax^2 + by^2 = E_1 + De \quad \dots\dots\dots (4)$$

と式(2)の直線との交点 B, C で表される[図2(b)参照]。そこで、塗料付着部の長さを L とすると、式(2)と(4)より

$$L^2 = a((a + bp^2)(De + E_1) - abq(t)^2) \quad \dots\dots\dots (5)$$

ただし

$$a = 4(1 + p^2)/(a + bp^2)^2 = \text{const}$$

(a) Composite error surface

(b) Contact pattern on the plane of action

Fig. 2 Composite error surface composed by curves of second order and red contact pattern of ellipse shape

となる。

ところで、式(2)の接触線上における誤差形状は式(1)、(2)より

$$\begin{aligned} e(x, y) &= (a + bp^2)x^2 + 2bpq(t)x + bq(t)^2 \\ &= e(x) \quad \dots\dots\dots (6) \end{aligned}$$

接触線上の最小誤差を与える点は $de/dx = 0$ より

$$x = -bpq(t)/(a + bp^2) \quad \dots\dots\dots (7)$$

$$y = aq(t)/(a + bp^2) \quad \dots\dots\dots (7)'$$

上の2式から $q(t)$ を消去して、時間の変化とともに移動する最小誤差値をとる点の軌跡を求めると

$$y = -(a/(bp))x \quad \dots\dots\dots (8)$$

ここで、式(2)の接触線が式(3)のだ円に接する点を $A(x_A, y_A)$ とすると、点 A は接触線上での最少誤差をもち、式(8)の直線上にあるから、式(3)、(8)より

$$\begin{aligned} x_A^2 &= p^2 b E_1 / (a(a + bp^2)) \\ y_A^2 &= a E_1 / (b(a + bp^2)) \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (9)$$

式(2)、(9)より

$$L^2 = aDe(a + bp^2) \quad \dots\dots\dots (10)$$

式(10)の値は定数であるので、相手歯面と接触する接触線上における塗料付着部は一定長さをもつことがわ

かる。

また、塗料付着部の端点を $B(x_B, y_B)$, $C(x_C, y_C)$ とおくと、式(2), (4), (10)より

$$y_B = -(a/(bp))x_B + (x_B - x_C)(a + bp^2)/(2bp) \quad \dots\dots\dots (11)$$

式(10)より $(x_B - x_C)$ は一定であるので、式(11)は、接触線上における塗料付着部の端点がかみあいの進行

とともに一直線上に並ぶことを示し、かつ、塗料付着部の長さは式(10)より一定となる。すなわち、赤当たり領域は、誤差振幅を表す a, b , ねじれ角より決定される p , 塗料厚さ De の値によりその形は変化するものの、作用面の中央付近において平行四辺形の形をとる。

いま、作用面の縦の長さ(かみあい長さ)と横の長さ(歯幅)を16等分し、その格子点の位置における合成

(a) Form change of composite error surface as functions of the exponents of tooth profile and lead curves

(b) Change of red contact pattern on the plane of action as functions of the exponents of tooth profile and lead curves

Fig. 3 Relation between the order of curves that compose the error surface of gear tooth flank and the shape of red contact pattern

誤差値をもって合成誤差曲面が構成されているものとする。骨格となる歯形、歯すじ誤差曲線はともにその中央(すなわち、縦、横の番号が9の所)で最小誤差値零をとり、かつ両端(すなわち、番号が1と17の所)で最大値 $20\mu\text{m}$ をとり、歯形誤差の縦1~9および歯すじ誤差の横9~17の誤差値は最小誤差と最大誤差を結ぶ二次曲線で与え、歯形誤差の縦9~17および歯すじ誤差の横1~9の所の誤差曲線の次数をそれぞれ独立に一次、二次、四次と変化させた合成誤差曲面を考える[図3(a)]。それを用いて得られる推定当たりがどのように変化するかを図3(b)に示す。

図3(b)を見ると、誤差曲線を変化させない部分である、縦1~9と横9~17に囲まれた領域における、塗料の付着した領域と付着していない領域を分け隔てる赤当たり境界線(境界線①)には、誤差曲線の次数が変化してもあまり大きな変化が見られないのに対し、誤差曲線を変化させた部分の、縦9~17と横1~9に囲まれた領域における境界線②は、歯形誤差の次数が大きくなるにつれて中凸形状になってゆく。したがって、境界線②の特に上半分の傾きを見ることで、最小誤差位置より番号が大きい部分の歯形誤差曲線の次数を推定することが可能である。また同様に、境界線②の左半分から歯すじ誤差を推定できる。

ここでは、縦9~17の歯形誤差と横1~9の歯すじ誤差を変化させたが、逆に縦1~9の歯形誤差と横9~17の歯すじ誤差を変化させた場合には、境界線①が上と同様の変化をすることも確かめられた。

3. 合成誤差曲面推定の流れと初期値

いま、図4(a)に示す合成誤差曲面をもつ歯車を用いて、負荷をかけない状態で、歯面に塗料を塗って歯

Fig. 4 Sample of composite error surface and its red contact pattern expressed on the plane of action

面上の赤当たりを採取し、それを作用面上に変換した結果、図4(b)に示すような作用面上の赤当たりが得られたものとする。この赤当たりから、図4(a)の合成誤差曲面にできるだけ近い誤差曲面を推定することを課題とする。なおここでは、歯面形状は滑らかに連続的に変化しているものと仮定し、できるだけ現実的な結果が得られる方法を目指すこととする。

合成誤差曲面を求める手順の全体の流れを図5に示す。目標とする歯当たりパターンが与えられたとき、まずこのパターンに近い歯当たりを実現するであろう合成誤差曲面初期値を大まかに推定し、これを入力データとして、歯当たりのシミュレーションを実行し、得られた赤当たりが目標の赤当たりに近づくように合

Fig. 5 Flow for predicting the composite error surface as function of contact pattern

Fig. 6 Two kinds of red contact patterns: (a) Contact near one free edge of tooth and (b) Split contact

成誤差曲面を順次修正する。この修正手順は大きく二つのステージに分けられる。第1のステージは骨格となる歯形、歯すじ誤差曲線の修正である。第2のステージは、第1ステージの結果得られた誤差曲面の微細な修正である。なお、コンピュータによる歯当たりの認識は、作用面を分割する格子の各領域に、塗料が付着している部分が入っていれば、その格子では塗料が付着しているとみなす。この歯当たりパターンから合成誤差曲面を推定するための初期値を以下のように与える。ここでは 16×16 の格子を用いているので、その数値を用いて説明する。

(1) (a) 歯当たり領域が横方向(歯幅方向)に最も広がっている所で、歯形誤差に最小値を与え、そこから上下(作用線方向)に最も離れている点で最大誤差値を与える。同様に、歯当たり領域が縦方向に最も広がっている所で、歯すじ誤差は最小値をとり、両端で最大誤差値をとるとする。

(b) 図6(a)のように歯当たりが作用面の辺上で最大幅をとっている場合には、塗料の付着している作用面の辺上で最小誤差値を与え、あい対する作用面の辺上で最大誤差値を与える。

(c) 図6(b)に示すように、歯当たり領域が縦方向に分裂している場合には、塗料の付着している領域が横方向に最も広がっている所(縦7, 縦13)で歯形誤差は最小値をとり、その間の横への広がり具合が小さくなっている所(縦10, 11および縦1, 17)で歯

形誤差の最大値をとるとする。赤当たり領域が横方向に分かれている場合には、歯すじ誤差について同様の操作を行う。

(2) 誤差の初期値の最大値および最小値の大きさは、歯当たりだけでは確定できない。種々の試行錯誤の結果、目的の合成誤差曲面の振幅が本研究で採用した10から20 μm の場合には、

$$(\text{最大値} - \text{最小値}) = 10 + De \quad \mu\text{m}$$

と与えれば、かなり妥当な結果が得られることがわかったので、ここではこの関係を採用する。

(3) 最大誤差をとる位置と最小誤差値をとる位置の間の誤差値は、最大誤差と最小誤差を結ぶ二次曲線で与える。ただし、図6(a)の歯当たりの場合のように、合成誤差の大きさが一方の作用面の辺上で最小値をとり、相対する作用面の辺上で最大値をとる場合には、その間の誤差は最大誤差と最小誤差を結ぶ直線で与える。

(4) 以上のようにして求めた歯形誤差曲線と歯すじ誤差曲線を骨格として、歯形誤差曲線は歯すじ方向に一定、歯すじ方向誤差は歯形方向に一定、という仮定を基に合成誤差曲面を創成する。

図4(b)、図6(a)、(b)の赤当たりをもとに作られた合成誤差曲面初期値を図7(a)～(c)に示す。

4. 合成誤差曲面の構築

4.1 骨格となる歯形、歯すじ誤差曲線の修正(ステージ1)

(1) 最小誤差値をとる位置の修正

図7(a)の初期値を基にして計算で得られた無負荷赤当たり(以下、推定当たりという)と、図4(b)の無

Fig. 7 Initial form of composite error surface generated

Fig. 8 Contact pattern obtained as function of the initial composite error surface

負荷赤当たり(以下、目標当たりという)を、同一作用面上で比較したものを図8(a)に示す。図7(a)の目標当たりが横方向に最も広がっている位置と、得られた推定当たりで横方向に最も広がっている位置は一致していない。よって、これを一致させるには、歯形誤差の最小値を与える位置に修正を施せばよいが、推定当たりと目標当たりの横方向に広がる位置のずれがある大きさ(ここでは番号で2)以上の場合にのみ、歯形誤差曲線における最小値をとる位置の修正を行うことにする。目標当たりと推定当たりの縦方向の広がり位置の不一致については、歯すじ誤差に同様の修正を施す。

(2) 最小誤差値の修正

最小誤差値を問題にするのは、図7(c)のように、当たり領域が二つ以上の部分に分かれている場合のみであり、2番め以降に接触する歯形あるいは歯すじ誤差曲線の凸部(すなわち、誤差が小さくなる部分)の大きさの修正を行う。合成誤差は空間での相対的な位置を表すので、誤差曲線上において凸部が一つしか存在しない場合には、最小誤差と最大誤差との差のみが問題となるためにこのステップは省略する。

図8(b)に示した目標当たりにおいて、当たり領域が横方向に最も広がっているのは、縦番号7および縦番号13の所であり、その長さはそれぞれメッシュの幅で14と10である。一方、推定当たりにおいて、横方向に最も広がっているのはやはり縦7および縦13の所であるが、その長さは12と10であり、目標当たりとは異なる。推定当たりにおけるこの位置での横への広がり長さの比(ここでは10/12)が、実測の比(10/14)に近付くように、当たり領域の広がり長さが短いほう

の最小誤差値を修正する。この修正は、計算値における二つの凸部の横への広がり長さの比と、実測当たりの比の差がある大きさ(ここでは1/17)になるまで続ける。こうして求められた合成誤差曲面と赤当たりを図9に示す。

(3) 最大誤差値の修正

合成誤差曲面に上述の修正をほどこしたときの推定当たりが図8(a)に示すものとなったとする。斜線で示される推定当たりは、実線で囲まれた目標当たりと比較すると、当たり領域が左方向と上方向に広がっている。歯すじ誤差のかみあい始めに近い部分と、歯形誤差のかみあい終わりに近い部分の誤差値を大きくする必要がある。ここでは、歯形、歯すじ両誤差曲線上の最小誤差を取る位置における誤差修正量は0 μm として、最小誤差点から離れるに従って、比例的に大きい修正量を、推定当たりの縦横おのおの方向への広がりが目標当たりと同じになるまで与える。

こうして求めた誤差曲面と、そのときの推定当たりを図10に示す。

(4) 骨格となる誤差曲線の次数の修正

図3の結果を用いて、最大値と最小値を結ぶ誤差曲線の次数を修正する(歯形、歯すじ誤差曲線とも、中凸の場合のみ)。

まず、図3(b)の境界線①に相当するものとして、赤当たり領域の最も下側(すなわち、作用線方向の最もかみあい始めに近い所)から最も右側(すなわち、歯幅方向の最もかみあい終わりに近い所)に至る境界線を取り、境界線②は赤当たり領域の最も左側から最も上側に至る境界線を採用。次に境界線①、②において、

Fig. 9 After the step 2 for the split contact

Fig. 10 After the step 3 for the sample contact pattern

Fig. 11 After the step 4 for the sample contact pattern

おのおの下から1/3の長さ分、および上から1/3の長さ分を、最小二乗値が最も小さくなる直線で近似する。そして、その直線の傾きが目標当たりの対応する直線の傾きに等しくなるまで、当該位置の誤差曲線の次数を変化させる。また、この修正と同時に誤差曲線上の最大誤差値も変化させて、推定当たりの縦・横に広がる長さが目標当りのそれと同じになるようにする必要がある。

図10に示す誤差曲面にこの修正を施した結果の誤差曲面と、そのときの推定当たりを図11に示す。

(5) 赤当たり領域外の誤差曲線の直線化

これまでの推定ステップを終了した状態では、歯当たりの情報のない自由端に近い付近での誤差値が非常に大きくなっている。このような非現実的なことを避けるため、赤当たり領域外の誤差曲線を近似的に直線であると仮定する。

4・2 曲面の修正(ステージ2)

(6) 歯形・歯すじ断面の修正

これまでの修正によって、推定誤差を用いた推定当りはかなり目標当たりに近づいたが、図12(a)の推定当たりと目標当たりを比較すると、目標当たりでは縦番号3~5, 横番号13~14付近で塗料が付着してい

Fig. 12 Reconstructed composite error surface and the red contact pattern

Fig. 13 Reconstructed composite error surface and the red contact pattern for another sample

Fig. 14 Final composite error surface reconstructed as function of red contact pattern of fig. 4(b) and the contact pattern at the converged state of the calculation

るのに対し、推定当たりでは塗料が付着していない。このような赤当たり領域の不一致を修正するためには、いままでのように骨格となる歯形、歯すじ誤差曲線の修正では不可能である。

まず、作用平面を縦、横に分割して表した格子線上における歯形・歯すじ誤差曲線1本1本に注目して、修正を行う。1本の歯形誤差曲線上において、目標当たりと推定当たりの塗料付着部分の比較を行い、その両端で塗料付着長さに相異があればその歯形誤差曲線は全体的に上げ下げの修正し、片側で相異があれば、最小誤差をとる位置からの距離に比例する修正量を与える。歯すじ誤差曲線においても、同様の修正を行う。

このようにして修正を行った結果の合成誤差曲面とそのときの赤当たりを図12(b)に示す。

(7) 同時接触線上の誤差値の修正

これまでの修正によって、図13(a)に示すような推定合成誤差曲面が得られたものとする(図12に示したものと異なる歯面形状についての処理例)。図13(b)はそのときの計算当たりと実測当たりを比較したものである。Aを記した部分には、目標当たりでは塗料が付着しているのに対し、推定誤差より求めた推定当たりでは塗料が付着していない。

接触線は1ピッチ離れたところにある接触線と同時かみあいをするので、Aにあるべき接触線と同時接触を行うのは図中のBの接触線である。AとBの2本の接触線上での最小誤差値のうち、小さい値をとるほうの接触線上において、歯面は接触している。図の場

合には、B上で相手歯面に接触しているので、接触線Bの最小誤差値を大きくすることによって、接触線Aにおける誤差値を相対的に小さくすることができ、接触線Aに塗料を付着させることができると考えられる。

しかし、そのとき同時に接触線B上において塗料の付着する範囲が広がることに注意しなければならない。例えば、接触線Bの最小誤差値を大きくすると、接触線Aでは塗料が付着し推定当たりは目標当たりに近いが、接触線Bでは塗料の付着する部分が広がり、逆に目標当たりから離れたものとなる。このような場合にはA上の最小誤差値を小さくする。また、接触線B上の塗料の付着している範囲が短ければ、Bの中央付近の誤差値を大きくする。

このような修正を、同時にかみあうすべての接触線について行う。図13(a)の合成誤差曲面に以上の修正を加えた合成誤差曲面と、そのときの推定当たりを図13(a)', (b)'に示す。

4・3 推定された合成誤差曲面 以上の処理により得られた推定合成誤差曲面はかなり凸凹している場合があるのでこれを平滑化する。最終的に得られた推定当たりは図14(b)に示すとおりであり、推定される合成誤差曲面は図14(a)に示すものとなった。これは図4(a)の実際の合成誤差曲面をかなりよく推定しているといえる。他の種々の歯面形状に付いて推定を試みた結果も、ほぼ満足のいくものであった。

5. 結 言

無負荷状態で得られるインポリュート円筒歯車の赤当たりのパターン形状から合成誤差曲面を推定する方法を開発するために、まず中凸形の合成誤差曲面の場合について、その歯面形状を表す曲面の次数が赤当たりのパターンの形状に及ぼす影響を究明した。その結果、

- (1) 合成誤差曲面が二次曲面(だ円体)のときに赤当たりは作用面上で平行四辺形になる。
 - (2) 合成誤差曲面がそれより高次の曲面の場合には作用面上の赤当たりの辺は凸になる。
 - (3) 合成誤差曲面がそれより低次の曲面の場合には作用面上の赤当たりの辺は凹になる。
- ことを示した。

この事実を利用して、作用面上で表示した赤当たりの形状から合成誤差曲面を推定する具体的方法を開発した。クラウニングをもつ歯すじ形状を与えられた歯車が、中凸歯形、圧力角誤差をもつ歯形、および、フタコブラクダのこぶのような形状の中凹歯形をもつ場合

について、この方法により歯当りの形状から合成誤差曲面を良く推定することができた。

本研究の一部は、平成6年度文部省科学研究補助金(一般研究C、課題番号05650144)により行ったものである。深甚なる謝意を表す。

文 献

- (1) 久保愛三・ほか2名, 機論, 56-529, C(1990), 185-191.
- (2) 久保愛三・梅沢清彦, 機論, 43-371, 第3部, (1972), 2771-2783.
- (3) 久保愛三・ほか2名, 機論, 44-384, 第3部(1978), 2897-2907.
- (4) 久保愛三・ほか2名, 機論, 46-405, C(1980), 550-561.
- (5) 上野 拓・ほか3名, 機論, 50-451, C(1984), 520-528.
- (6) 有浦泰常・ほか4名, 機論, 51-467, C(1985), 1568-1576.
- (7) 久保愛三・ほか4名, 機論, 54-499, C(1988), 684-691.
- (8) 久保愛三・ほか4名, 機論, 56-532, C(1990), 238-243.
- (9) 久保愛三・ほか3名, 機論, 57-544, C(1991), 229-234.