はすば内歯車の歯元応力に及ぼすねじれ角, 歯幅および歯数の影響*

宮近 幸逸^{*1}, 小田 哲^{*1}, 小出 隆夫^{*1}

Effects of Helix Angle, Face Width and Number of Teeth on Root Stresses of Helical Internal Gears

Kouitsu MIYACHIKA, Satoshi ODA and Takao KOIDE

This paper presents a study on effects of helix angle, face width and number of teeth on root stresses of helical internal and external gear pairs in mesh. The root stresses of helical internal and external gear pairs with various helix angles, face widths and numbers of teeth were calculated using the influence functions of tooth deflection and contact approach and the bending moment factor. The effects of the helix angle, the face width and the number of teeth on the load sharing factor, the load distribution on the contact line and the root stress of the internal and external gear pair were determined. The worst meshing position (meshing position where the maximum root stress occurs) of the gear pair was also examined.

Key Words: Gear, Helical Internal Gear, Root Stress, Load Sharing Factor, Load Distribution on Contact Line, Helix Angle, Face Width

1. 緒 言

厚肉はすば外歯車対の場合については、任意の諸元の場合に適用できる歯のたわみと曲げモーメントの影響関数がすでに導かれ^{(1)~(4)}、負荷かみあい時の歯元応力についてもかなり明らかにされている^{(5)~(7)}が、厚肉はすば内・外歯車対の場合については、まだほとんど明らかにされていない。前報⁽⁸⁾では、厚肉内歯車の曲げせん断たわみの影響関数と曲げモーメントの影響関数を求め、これらの影響関数をはすば外歯車対に対する久保・梅澤の方法⁽⁵⁾に導入して負荷かみあい時のはすば内・外歯車対の歯元応力を求める計算方法を示した。

本報では、この計算法を用いて種々のねじれ角、歯幅、歯数の厚肉はすば内・外歯車対の荷重分担率、接触線上の荷重分布、歯元応力を全かみあい範囲にわたって計算し、歯元応力に及ぼす歯車諸元の影響について明らかにした。またはすば内・外歯車対の最悪かみあい位置(最大歯元応力が発生するかみあい位置)についても検討を加えている。

2. 歯元応力の計算

2・1 歯元応力の計算法 はすば内・外歯車対の負荷かみあい時の歯元応力の計算は、はすば外歯車対に対する久保・梅澤⁽⁵⁾の方法に、内歯車の歯の曲げせん断たわみの影響関数と曲げモーメント影響関数⁽⁸⁾、小田・宮近による平内歯車に対する歯元実応力計算式⁽⁹⁾⁽¹⁰⁾を適用することにより求めた。危険断面位置としては、内歯車に対しては前報⁽⁸⁾の検討結果に基づいて、接線角度 $\theta = 45^\circ$ (θ : 歯直角断面において、歯形中心線と歯元すみ肉曲線の接線のなす角)の位置を、外歯車に対しては、 $\theta = 30^\circ$ の位置⁽¹¹⁾⁽¹²⁾をとっている。なお本計算式による歯元応力の計算値と測定値がよく一致することを文献(8)で確かめている。

2・2 計算条件 はすば内・外歯車対の歯元応力に及ぼすねじれ角、歯幅および歯数の影響について検討を加えるために、表1に示す諸元の歯車対に円周力 $P/b = 200$ N/mm (b : 歯幅)が作用する場合に対して歯元応力の計算を行った。表1中のはすば内歯車の歯形は、歯数 $z_c = 25$ 、工具歯先丸み半径 $r_0 = 0.15 m_n$ (m_n : 歯直角モジュール)のピニオンカットで、はすば外歯車の歯形は、 $r_0 = 0.375 m_n$ のホブで歯切りされるものである。これらの計算において、歯車誤差は

* 原稿受付 1995年5月31日。

^{*1} 正員、鳥取大学工学部 (〒680 鳥取市湖山町南4-101)。

Table 1 Gear dimensions

Normal module	m_n	4										
Normal pressure angle	α_n	20°										
Helix angle	β_b	0°	10°	20°				30°	20°			
Number of teeth	z_1/z_2	45/25						60/25	90/25	120/25	180/25	
Face width	b mm	30		10	20	30	50	30				
Transverse contact ratio	ε_α	1.93	1.86	1.69				1.45	1.67	1.62	1.59	1.57
Overlap ratio	ε_β	0	0.42	0.27	0.54	0.82	1.36	1.19	0.82

Fig. 1 Load sharing factors f_{LS} ($z_i/z_p = 45/25$, $b = 30$ mm) Fig. 2 Load sharing factors f_{LS} ($z_i/z_p = 45/25$, $\beta_0 = 20^\circ$)

すべて零としている。

3. 計算結果および考察

3.1 荷重分担率に及ぼすねじれ角、歯幅、歯数の影響

図1は、歯数 $z_i/z_p = 45/25$ (z_i : 内歯車の歯数, z_p : 外歯車の歯数), 歯幅 $b = 30$ mm で種々のねじれ角 β_0 の内・外歯車対に円周力 $P/b = 200$ N/mm が作用する場合のかみあいの進行に伴う荷重分担率 f_{LS} の変化の計算結果を示す。図1中において、内歯車を被動歯車、外歯車を駆動歯車とし、横軸にかみあい位置 (A: かみあい始め, B: かみあい終わり, p_{bt} : 一正面法線ピッチ) とかみあう歯対の数を、縦軸に荷重分担率をとっている。図1より f_{LS} は、かみあいの進行に伴ってかみあう歯対の数が増加すると、 $\beta_0 = 0^\circ$ の場合には階段状に急激に変化するのに対し、 $\beta_0 \geq 10^\circ$ の場合には滑らかに変化し、その程度は β_0 の増加とともに

増大することがわかる。これは同時接触線長さが、かみあいの進行に伴って、 $\beta_0 = 0^\circ$ の場合には段階的に不連続に変化するのに対し、 $\beta_0 \geq 10^\circ$ の場合には連続的に変化することによる。

図2は、 $z_i/z_p = 45/25$, $\beta_0 = 20^\circ$ で種々の歯幅の歯車対に $P/b = 200$ N/mm が作用する場合のかみあいの進行に伴う f_{LS} の変化を示す。図1(c), 2より、かみあいの進行に伴う f_{LS} の変化は、歯幅の増加とともに滑らかになることがわかる。

図3は、 $z_i/z_p = 90/25, 180/25$, $\beta_0 = 20^\circ$, $b = 30$ mm の歯車対に $P/b = 200$ N/mm が作用する場合のかみあいの進行に伴う f_{LS} の変化を示す。図1(c), 3より、歯数 ($45/25 \leq z_i/z_p \leq 180/25$) による f_{LS} の変化は、小さいことがわかる。

図4は、 f_{LS} の最大値 $f_{LS\max}$ と β_0 の関係を示す。図より $f_{LS\max}$ は、 β_0 が 0° から 10° に増加すると急激に

Fig. 3 Load sharing factors f_{LS} ($b=30$ mm) Fig. 4 Relation between $f_{LS \max}$ and β_0 ($b=30$ mm) Fig. 5 Relation between $f_{LS \max}$ and b ($\beta_0=20^\circ$)

減少するが、さらに β_0 が増加してもほとんど変わらなくなることがわかる。これは同時接触線長さが、ある β_0 までは β_0 の増加とともに増大するが、さらに β_0 が増加しても増大しなくなることによって考えられる。

図5は、 $f_{LS \max}$ と b の関係を示す。図5より $f_{LS \max}$ は、 b の増加とともに減少することがわかる。

3・2 荷重分布に及ぼすねじれ角、歯幅、歯数の影響
図6は、 $z_i/z_p=45/25$ 、 $b=30$ mmで種々の β_0 の歯車対に $P/b=200$ N/mmが作用する場合の最大歯元応力が発生するかみあい位置(図9)における接触線上の荷重分布の計算結果を示す。図6より分布荷重の最大値は、 β_0 の増加とともに増大すること、最大分布荷重の位置は、 $\beta_0=0^\circ$ の場合には、両歯幅端付近になるが、 $\beta_0>0^\circ$ の場合には、接触線上のかみあい始め側の歯幅端(Leading side)付近になることがわかる。他の b に対する荷重分布の β_0 による変化は、図6の

Fig. 6 Load distributions on contact line ($b=30$ mm) Fig. 7 Load distributions on contact line ($\beta_0=20^\circ$) Fig. 8 Load distributions on contact line ($b=30$ mm)

場合と同様の傾向を示した。

図7は、 $z_i/z_p=45/25$ 、 $\beta_0=20^\circ$ で種々の b の歯車対に $P/b=200$ N/mmが作用する場合の最大歯元応力が発生するかみあい位置(図10)における接触線上の荷重分布の計算結果を示す。図7より、分布荷重の最大値は b の増加とともに減少することがわかる。

図8は、 $z_p=25$ 、 $\beta_0=20^\circ$ 、 $b=30$ mmで種々の z_i の歯車対に $P/b=200$ N/mmが作用する場合の最大歯元応力が発生するかみあい位置(図11)における接触線上の荷重分布の計算結果を示す。図8より、分布荷重の最大値は z_i の増加とともに増大するが、その程度は小さいことがわかる。これは z_i の増加とともにかみあい率が減少するため、同時接触線長さも減少することによる。

3・3 歯元応力に及ぼすねじれ角、歯幅、歯数の影響
図9は、 $z_i/z_p=45/25$ 、 $b=30$ mmで種々の β_0

 Fig. 9 Root stress waveforms ($b=30$ mm)

 Fig. 10 Root stress waveforms ($\beta_0=20^\circ$)

の歯車対に $P/b=200$ N/mm が作用する場合の内・外歯車対の引張側の歯元応力波形の計算結果を示す。図 9 中の横軸はかみあい位置を、縦軸は歯元応力値を示す。また $\downarrow E_1$, $\downarrow E_2$ は、それぞれ内歯車、外歯車の最大歯元応力発生位置を、 W_1 は作用平面上で内歯車の歯先のかみあい限界点から一正面法線ピッチだけ歯元に寄った位置、 W_2 は外歯車の歯先のかみあい限界点から一正面法線ピッチだけ歯元に寄った位置を表す。図 9 より内歯車の歯元応力は、かみあいの進行に伴って、外歯車の場合と同様に $\beta_0=0^\circ$ の場合には、かみあう歯対の数が変化すると階段状に急激に変化するのに対し、 $\beta_0 \geq 10^\circ$ の場合には、滑らかに変化し、その程度は β_0 の増加とともに増大することがわかる。

図 10 は、 $z_i/z_p=45/25$, $\beta_0=20^\circ$, $b=10, 50$ mm の歯車対に $P/b=200$ N/mm が作用する場合の内・外歯車の引張側の歯元応力波形の計算結果を示す。図 9(c),

10 よりかみあいの進行に伴う内歯車の歯元応力の変化は、外歯車の場合と同様に b の増加とともに滑らかになることがわかる。

図 11 は、 $z_i/z_p=90/25, 180/25$, $\beta_0=20^\circ$, $b=30$ mm の歯車対に $P/b=200$ N/mm が作用する場合の内・外歯車の引張側の歯元応力波形の計算結果を示す。図 9(c), 11 より歯数 ($45/25 \leq z_i/z_p \leq 180/25$) による歯元応力の変化は、小さいことがわかる。

図 9~11 の結果より、内歯車の最大引張歯元応力 $\sigma_{r\max}$ が発生するかみあい位置(最悪かみあい位置) $\downarrow E_1$ は、はすば外歯車対の場合⁽⁶⁾と同様に、ねじれ角、歯幅、歯数にかかわらず全かみあい率が $\varepsilon_r \geq 2$ の場合には、 W_1 の位置、 $\varepsilon_r < 2$ の場合には外の一組かみあい点(歯車対が、一対かみあい領域の最も歯先側でかみあうかみあい位置)になることがわかる。また最大圧縮歯元応力 $\sigma_{c\max}$ が発生するかみあい位置は、

Fig. 11 Root stress waveforms ($b=30$ mm) Fig. 12 Relation between $\sigma_{\max}$ and β_0 ($b=30$ mm)

$\sigma_{t \max}$ の場合と同じかみあい位置であった。

図 12 は、 $z_i/z_p=45/25$ 、 $b=30$ mm の場合の最大引張、圧縮歯元応力 $\sigma_{t \max}$ 、 $\sigma_{c \max}$ (絶対値) と β_0 の関係を示す。図 12 より $\sigma_{t \max}$ 、 $\sigma_{c \max}$ は、内歯車、外歯車(相手歯車)ともに $\beta_0=10^\circ$ 付近で極小値をもつこと、内歯車のほうが外歯車の場合より大きいことがわかる。 $\beta_0=10^\circ$ 付近で $\sigma_{t \max}$ 、 $\sigma_{c \max}$ が極小値をもつのは、 β_0 の増加に伴う同時接触線長さの増大による歯元応力の減少と、図 6 に示すように、円周力 P が一定のもとでの β_0 の増加に伴う歯面垂直荷重の増大による歯元応力の増加との相対関係によるものと考えられる。

図 13 は、 $z_i/z_p=45/25$ 、 $\beta_0=20^\circ$ の場合の $\sigma_{t \max}$ 、 $\sigma_{c \max}$ と b の関係を示す。図 13 より $\sigma_{t \max}$ 、 $\sigma_{c \max}$ は、内、外歯車ともに $b=20\sim30$ mm 付近で極小値をもつこと、 $\sigma_{t \max}$ は $b=18$ mm 付近までは内歯車のほうが外歯車の場合より小さく、さらに b が大きくなると逆に内歯車のほうが大きいこと、 $\sigma_{c \max}$ は b にかかわらず内歯車のほうが外歯車の場合より大きいことがわかる。 $\sigma_{t \max}$ 、 $\sigma_{c \max}$ がある b で極小値をもつのは、 b が小さくて全かみあい率が $\epsilon_r < 2$ のときの最悪かみあい

Fig. 13 Relation between $\sigma_{\max}$ and b ($\beta_0=20^\circ$) Fig. 14 Relation between $\sigma_{\max}$ and z_i ($b=30$ mm) Fig. 15 Relation between γ and β_0 ($b=30$ mm)

位置が外の一組かみあい点になり、この場合の $\sigma_{t \max}$ 、 $\sigma_{c \max}$ が $\epsilon_r \geq 2$ の場合の $\sigma_{t \max}$ 、 $\sigma_{c \max}$ より大きいこと、 b の増加に伴う同時接触線長さの増加割合が、ある b までより、さらに b が大きくなった場合のほうが小さくなることによると考えられる。

図 14 は、 $z_p=25$ 、 $\beta_0=20^\circ$ 、 $b=30$ mm の場合の $\sigma_{t \max}$ 、 $\sigma_{c \max}$ と z_i の関係を示す。図 14 より $\sigma_{t \max}$ 、 $\sigma_{c \max}$ は、 z_i にかかわらずほとんど変わらないことがわかる。これは z_i の増加に伴う同時接触線長さの変化が、 $45/25 \leq z_i/z_p \leq 180/25$ の範囲では小さいことによる。

次に、歯車の回転方向が逆転する場合には、歯の引張側と圧縮側が逆転するので、 $\sigma_{c \max}$ と $\sigma_{t \max}$ の比 $\gamma = |\sigma_{c \max} / \sigma_{t \max}|$ が、歯車の曲げ疲労強度に大きな影響を及ぼす⁽¹⁴⁾。このことについて検討を加えるために、 γ と β_0 、 b の関係について調べる。

図 15 は、 $z_i/z_p=45/25$ 、 $b=30$ mm の場合の γ と β_0

 Fig. 16 Relation between γ and b ($\beta_0 = 20^\circ$)

の関係を示す。図 15 より γ は、 β_0 の増加とともに内歯車ではある β_0 までは減少し、さらに β_0 が増加すると一定値になるのに対し、外歯車では逆にある β_0 までは増大し、さらに β_0 が増加すると一定値になることがわかる。 γ は、負荷位置に依存して変化し、負荷位置が歯先から歯元に移動するにつれて、内歯車の場合には、歯面垂直荷重 P_n の歯形中心線に平行な圧縮成分 P_t が増加するので増大するが、外歯車の場合には、逆に P_t が減少するので減少する傾向を示す。図 15 中の γ の β_0 による変化は、最大歯元応力が発生する位置の歯元に対する負荷位置が、 β_0 の増加に伴って歯先側に移動することによる。

図 16 は、 $z_1/z_2 = 45/25$ 、 $\beta_0 = 20^\circ$ の場合の γ と b の関係を示す。図 16 より γ は、 b の増加とともに内歯車ではある b までは減少し、さらに b が増加すると一定値になるのに対し、外歯車ではある b までは逆に増大し、さらに b が増加すると一定値になることがわかる。

本報の検討結果から、はすば内歯車のねじれ角係数、荷重分担率係数などを求め、これらの係数を用いてはすば内歯車のかみあい時の最大歯元応力を求めるための実用歯元曲げ応力計算式の誘導を進めている。

4. 結 言

本報において明らかになったおもな点を要約すると以下のとおりである。

(1) はすば内歯車のかみあい時の最大引張、圧縮歯元応力 $\sigma_{t\max}$ 、 $\sigma_{c\max}$ が発生するかみあい位置は、はすば外歯車対の場合と同様に全かみあい率が $\varepsilon_r \geq 2$ の場合には、作用平面上で内歯車の歯先のかみあい限界点から一正面法線ピッチだけ歯元に寄った位置、 $\varepsilon_r < 2$ の場合には外の一組かみあい点になる。

(2) かみあい時ののはすば内歯車の $\sigma_{t\max}$ 、 $\sigma_{c\max}$ は、円周力 P/b (b : 歯幅) 一定のもとでは、内歯車、外歯車ともに、ねじれ角 β_0 、歯幅 b に依存して変化し、あるねじれ角、歯幅で極小値をもつ。

(3) 本報で用いた歯形形状のはすば内・外歯車対の $\sigma_{t\max}$ 、 $\sigma_{c\max}$ は、 $b = 30$ mm の場合には、 β_0 にかかわらず内歯車のほうが外歯車(相手歯車)の場合より大きい。また $\beta_0 = 20^\circ$ の場合には、 $\sigma_{t\max}$ は、 b が小さいときには内歯車のほうが外歯車の場合より小さいが、 b が大きいときには逆に大きくなり、 $\sigma_{c\max}$ は、 b にかかわらず内歯車のほうが外歯車の場合より大きい。

(4) はすば内・外歯車対の最大歯元応力が発生するかみあい位置の接触線上の荷重分布の最大値は、円周力 P/b 一定のもとでは、ねじれ角の増加、歯幅の減少とともに増大する。

(5) はすば内・外歯車対の $\sigma_{c\max}$ と $\sigma_{t\max}$ の比 $\gamma = |\sigma_{c\max}/\sigma_{t\max}|$ は、内歯車では、 β_0 、 b の増加とともにあるねじれ角 β_0 、歯幅 b までは減少し、さらに β_0 、 b が増加すると一定値になるのに対し、外歯車(相手歯車)の場合には、 β_0 、 b の増加とともにあるねじれ角 β_0 、歯幅 b までは逆に増大し、さらに β_0 、 b が増加すると一定値になる。

(6) はすば内・外歯車対の荷重分担率の最大値 $f_{LS\max}$ は、 P/b 一定のもとでは、 β_0 の増加とともにあるねじれ角 β_0 までは減少するが、さらに β_0 が増加すると一定値になる。また $f_{LS\max}$ は、 b の増加とともに減少する。

終わりに、本研究を行うに当たって、資料整理などに熱心にご協力いただいた鳥取大学文部技官・難波千秋氏に厚くお礼申し上げる。数値計算は、京都大学大形計算機センターの FACOM VP-2600 によって行ったことを付記し、謝意を表す。

文 献

- (1) 梅澤清彦、はすば歯車の負荷かみあい試験(第1報、たわみの近似式)、機論、38-308 (1972)、896-904。
- (2) 梅澤清彦、はすば歯車の負荷かみあい試験(第2報、曲げモーメント分布の近似式)、機論、38-310 (1972)、1602-1608。
- (3) 小田哲・小出隆夫・池田敏彦・梅澤清彦、歯のたわみと歯元応力に及ぼす圧力角の影響、機論、52-473, C (1986)、88-96。
- (4) 小田哲・小出隆夫・梅澤清彦、高圧力角はすば歯車の歯元応力、機論、52-473, C (1986)、97-104。
- (5) 久保愛三・梅澤清彦、誤差をもつ円筒歯車の荷重伝達特性に関する研究(第1報、基礎的考察)、機論、43-371 (1977)、2771-2783。
- (6) 小田哲・小出隆夫、はすば歯車のねじれ角係数、機論、52-479, C (1986)、1966-1971。
- (7) 小田哲・小出隆夫、はすば歯車の実用歯元曲げ応力計算式、機論、52-479, C (1986)、1979-1984。
- (8) 宮近幸逸・小出隆夫・小田哲、内歯はすば歯車の歯元応力、機論、60-576, C (1994)、2805-2810。
- (9) 小田哲・宮近幸逸、内歯平歯車の実用歯元実応力計算式、機論、51-470, C (1985)、2720-2725。
- (10) 小田哲・宮近幸逸・清水久夫、内歯平歯車の実用圧縮歯元

- 実応力計算式, 機論, 53-496, C (1987), 2629-2634.
- (11) 会田俊夫・寺内喜男, 平歯車の曲げ応力について(第2報, 歯の応力集中係数と曲げ応力計算式), 機論, 27-178 (1961), 862-868.
- (12) 会田俊夫・小田哲・田村喜昭, 歯車の曲げ疲れ強さに関する研究(第8報, 歯の圧縮側応力計算式と運転時の歯元応力), 機論, 33-252 (1967), 1321-1330.
- (13) 小田哲・宮近幸逸・荒木恵司, 内歯車の歯元応力と曲げ疲労強度に及ぼすリム厚さの影響, 機論, 49-448, C (1983), 2190-2196.
- (14) 会田俊夫・小田哲・井上聡, 歯車の曲げ疲れ強さに関する研究(第10報, 歯車の曲げ疲れ破壊機構), 機論, 34-264 (1968), 1469-1478.
-