対偶すきまを有する平面リンク機構の変位解析*

(対偶素接触位置の反復修正による組織的変位解析)

舟橋 宏明^{*1}, 武田 行生^{*1}, 川 渕 一 郎^{*2}

Displacement Analysis of Planar Link Mechanisms with Clearances (A Systematic Displacement Analysis with Iterative Correction of Contact Positions at Pairing Elements)

Hiroaki FUNABASHI, Yukio TAKEDA and Ichiro KAWABUCHI

The present paper proposes a method of determining the displacements of planar link mechanisms with clearances under specified load conditions. A virtual mechanism, of which the contact positions between pairing elements are assumed as pairing points without clearances, is introduced, and the geometric and static conditions which each link and joint should satisfy individually are considered separately. Then an algorithm, in which a systematic method of analysis for mechanisms without clearances is iteratively utilized, is proposed for searching the appropriate contact positions at each pair. The contact loss and the multiple solutions of the contact positions of pairs are also considered in the analysis. The effectiveness of the method is confirmed through an illustrative example of a four-bar mechanism.

Key Words: Mechanism, Kinematics, Planar Linkage, Displacement Analysis, Clearance, Contact Loss

1. 緒 言

対偶すきまを有するリンク機構の入出力関係について従来多くの研究が行われているが、それらの殆どは出力変位の対偶すきまによる変域を決定したり^{(1),(2)}、対偶すきまを分布変量とみなして統計学的に出力変位の分布状態を把握する^{(3)~(6)}ものである。これらは負荷・作動速度などの機構の作動条件が指定されない場合における出力誤差の僅少化のための機構総合に有用である。しかし、例えば特定の部品の搬送、装填、位置決めなどのように、機構に働く負荷の大きさや方向などの作動条件が予め判っており、その特定の指定された状態下における入出力関係を精密に把握することが要求される場合も多い。

特定の大きさ、方向の負荷が加わる状態の機構の変位解析において、各節の姿勢角、各対偶における対偶素間の接触位置、対偶作用力などを未知数として、全ての節に関する幾何学的条件式および力学的条件式を導きそれらを連立させて解く方法が考えられる。しかしこの場合には、機構毎に極めて複雑な式の誘導、変形を行わなければならない。

ところで、対偶すきまのない機構に対しては、機構毎に変位の方程式を導出する必要のない組織的変位解

析法⁽⁷⁾がすでに開発されており、また機構の変位が定まれば負荷に対する対偶作用力や入力トルクを求める力学的解析は力とモーメントのつりあい式からなる連立一次方程式を解くのみである。そこで、対偶すきまを有する機構において、対偶素間の接触点を半径が零の仮想の対偶点とみなし、その仮想対偶点間を結ぶ仮想の節からなる機構(仮想機構と呼ぶ)を考えれば、この仮想機構を対象として先に述べたような対偶すきまのない機構に対する解析法を適用することにより、機構の変位ならびに対偶作用力などを容易に解析することができる。ただし、この仮想機構の節長等の機構定数は各対偶素上の接触点の位置により変化するので、各接触点の位置をその機構が満足すべき幾何学的条件および力学的条件に基づいて求める必要がある。

そこで本論文では、特定の負荷条件における対偶すきまを有する機構の変位解析について、従来の組織的解析法を適用して変位および力が容易に求められるように仮想機構を導入するとともに、その機構において幾何学的条件と力学的条件がともに満足されるように各対偶素上の接触点の位置を決定するアルゴリズムを組み込んだ変位解析法を提案する。なお本論文では、すきまを有する回り対偶からなる平面リンク機構を対象として、節の弾性、対偶素間の摩擦および対偶素間の接触・分離によって生ずる衝撃力は無視する。

* 1995年3月29日 第72期通常総会講演会において講演、原稿受付 1995年7月3日。

^{*1} 正員、東京工業大学工学部 (〒152 東京都目黒区大岡山2-12-1)。

^{*2} 正員、東京工業大学大学院。

Fig.1 Connection of links with clearances

2. 解析アルゴリズム

2・1 基本的考え方 対偶すきまを有する機構の個々の節および対偶において、次の四つの幾何学および力学的条件が同時に満足されたとき、機構の変位が決定できたとする。

[条件A] 二つの対偶素が接触する場合には、軸の輪郭円は穴の輪郭円に内接する。

[条件B] ある節に働く全ての対偶作用力および機構外からの外力(慣性力を含む)は、力とモーメントのつりあい条件を満足する。

[条件C] ある対偶素が受ける対偶作用力は、対偶素同士の接触点を作用点とし、その接触点を通る輪郭円の法線と方向が等しく、さらにその対偶素が軸であれば接触点から中心に向う力であり、穴であればその逆の力である。

[条件D] 対偶素同士が分離している対偶においては、対偶作用力は零でありかつ対偶素中心間距離は対偶すきまの半分より小さい。ここで対偶すきまは両対偶素の輪郭円の直径の差とする。

図1は2対偶素節 i が対偶 $J_{i-1,j}, J_{i,j}$ により節 $i-1$ および節 $i+1$ と連結している状態を示す。ここで i, j は機構内の節および対偶に付した番号である。さて対偶 $J_{i,j}$ における二つの対偶素の接触点を C_j とし、節 i 側の対偶素について中心点、接触点、対偶素半径および節 $i+1$ 側の対偶素より受ける対偶作用力をそれぞれ $J_{i,j}, C_j, r_{i,j}, F_{i,j}$ とする。対偶素接触位置を $\overrightarrow{J_{i,j}C_j}$ が $\overrightarrow{J_{i,j-1}J_{i,j}}$ となす角 $\psi_{i,j}$ で表し、これを接触方向角と呼ぶ。また節 i の節長 $\overrightarrow{J_{i,j-1}J_{i,j}}$ を l_i 、姿勢角を $\overrightarrow{J_{i,j-1}J_{i,j}}$ が静止座標系 $O-XY$ の X 軸となす角 β_i とする。節 i 上の点 P_i に機構外部から働く力とモーメントを F_{Pi}, M_{Pi} とする。なお、接触方向角 $\psi_{i,j}$ 、節の姿勢角 β_i などの角度は反時計回りを正とし、変域 $[-\pi, \pi]$ で考える。

さて、各対偶素における接触方向角 $\psi_{i,j}$ を定めれば、緒言で述べた仮想機構における仮想節の長さが定まり、

Fig.2 Flow chart of the displacement analysis

したがってこの仮想機構は従来の組織的変位解析アルゴリズムを適用して力学的条件を考えることなく変位解析が可能である。さらに、接触点の変位が求まれば力とモーメントのつりあい条件式を解くことにより[条件B]を満足する対偶作用力を得ることができる。そこで、接触方向角を制御変数として、接触方向角が暫定的に仮定された状態の仮想機構について暫定的な変位と対偶作用力を求め、さらにそれらが上記の4条件を満足するように接触方向角を逐次修正することによって機構変位を探索する。

2・2 解析の流れ 節長、対偶素半径などの幾何学的諸元ならびに外力や各節の質量などの力学的諸元が与えられた機構について、原動節の角変位に対する各節の変位、各対偶作用力などを求める。図2にその流れを示し、以下では各ステップについて説明する。

ステップ1: 原動節の角変位を与える。

ステップ2: 全対偶素のすきまを零とした機構について、与えられた原動節角変位における変位解析を行う。ついで対偶作用力を求め、その作用線と対偶素輪郭円の交点を対偶素接触点とみなす。さらにその接触点の位置を接触方向角で表し、これを接触方向角の初

期値とする。なお、接触点は穴については対偶素中心から見て対偶作用力と同方向に、軸についてはその反対方向に位置する。また対偶素が穴か軸かの区別は、対となる対偶素の輪郭円半径の大小の比較で行う。

ステップ3: 接触方向角を用いて仮想節長を求め、仮想機構の変位解析を行って機構の暫定的変位を求める。

ステップ4: 変位の探索過程においては、計算機内での各対偶における両対偶素の相対的位置関係は、一般的に図3に示すように[条件A]を満足しない状態となる。そこで全ての対偶において図中の角 γ_j が許容値 γ_{al} 以下であるかどうかを調べて、[条件A]が満たされているか否かを判定する。満たされている場合はステップ6へ進む。

ステップ5: 角 γ_j が小さくなるように全ての接触方向角の修正を行う。ここにおける接触方向角の修正を幾何学的接触方向角修正と呼ぶことにする。

ステップ6: 図4に示すような幾何学的接触方向角修正が完了した機構について、各節の力およびモーメントのつりあい式を解いて、[条件B]を満足する暫定的な対偶作用力 $\hat{F}_{i,j}$ の方向角 $\eta_{i,j}$ を求める。

ステップ7: 各対偶における二つの対偶素の接触関係から図4に示すような[条件C]を満足する対偶作用力 $F_{i,j}$ の方向角 $\xi_{i,j}$ を求め、この $\xi_{i,j}$ と $\eta_{i,j}$ を比較し両者の差 $\delta_j = \eta_{i,j} - \xi_{i,j}$ が許容誤差 δ_{al} より小さい場合には[条件C]が満足されたとしてステップ9へ進む。

ステップ8: δ_j を僅少化するように全ての接触方向角の修正を行う。ここにおける接触角の修正を力学的接触方向角修正と呼ぶことにする。この修正では[条件A]を考慮せずに接触角を変化させるため、この修正により対偶素の相対位置が再び図3に示したような状態となる可能性がある。従ってステップ3,4に戻り、全ての接触方向角について再度[条件A]の成立を判定する。

ステップ9: 機構の変位を出力する。

この後、さらに次の原動節角変位に対して解析を続行するか、または終了する。

2・3 接触方向角の修正 ステップ5および8における接触方向角の具体的な修正について述べる。

(1) 幾何学的接触方向角修正 図3に示す対偶 J_j において、接触方向角の誤差を表す角 γ_j は次式より得られる。

$$\gamma_j = (\beta_{i+1} + \psi_{i+1,j}) - (\beta_i + \psi_{i,j}) \quad (1)$$

そこで両対偶素の接触方向角を次式により修正する。

$$\left. \begin{aligned} \psi_{i,j} &\leftarrow \psi_{i,j} + w_{\gamma,j} \cdot \gamma_j \\ \psi_{i+1,j} &\leftarrow \psi_{i+1,j} - w_{\gamma,j} \cdot \gamma_j \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

ここで $w_{\gamma,j}$ は解を漸近的に収束させるための重み係数である。図3において各節の修正前後の姿勢角が変化しない場合には $w_{\gamma,j} = 0.5$ とすれば一回で修正を完了す

Fig.3 Contact position with error angle γ_j

Fig.4 Temporal joint force $\hat{F}_{i,j}$ with error angle δ_j

ることができるが、他の対偶における修正の影響も考慮してその数値は解析者が適宜与える。これについては第4章で考察する。

(2) 力学的接触方向角修正 図4に示す対偶 J_j において、対偶作用力 $F_{i,j}$ の方向角 $\xi_{i,j}$ は次式により得られる。

$$\xi_{i,j} = \beta_i + \psi_{i,j} + \pi/2 - \text{sgn}(r_{i,j} - r_{i+1,j}) \cdot \pi/2 \quad (3)$$

この方向角と[条件B]を満足する暫定的な対偶作用力 $\hat{F}_{i,j}$ の方向角 $\eta_{i,j}$ の差 $\delta_j = \eta_{i,j} - \xi_{i,j}$ を僅少化するように、両対偶素の接触方向角を次式により修正する。

$$\left. \begin{aligned} \psi_{i,j} &\leftarrow \psi_{i,j} + w_{\delta,j} \cdot \delta_j \\ \psi_{i+1,j} &\leftarrow \psi_{i+1,j} + w_{\delta,j} \cdot \delta_j \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

ここで $w_{\delta,j}$ は重み係数であり、前述の $w_{\gamma,j}$ と同様に、図4において各節の修正前後の姿勢角が変化しない場合には $w_{\delta,j} = 1$ とすると一回で修正が完了する。

なお、上述の接触方向角の修正操作は個々の対偶に共通に適用できるサブルーチン・プログラムとしてまとめられるので、節数や対偶数の異なる機構を解析するプログラムを組み立てる場合に有利であり、組織的解析に適する。

3. 特異状態における変位解析

以上で述べてきた機構の解析アルゴリズムでは、全ての対偶において対偶素同士は常に接触し、その接触位置はただ一組だけであることを前提としてきた。しかし、対偶素分離が生じたり、対偶素間の接触位置が複数存在し得る対偶があることが考えられる。本論文

Fig.5 A 6-bar mechanism with contact loss at J_6, J_7

ではこれらの現象が起こる状態を特異状態と呼ぶ。

3・1 対偶素分離 本来対偶素分離が生じるべき対偶を含む機構について前章の反復の変位解析を行った場合、変位の探索を続けても収束解が得られない。また対偶素分離が生じる対偶における対偶作用力の大きさは零である。そこで、変位の探索過程における力学および幾何学的接触方向角修正の回数 n が閾値 n_{lim} に達しても解が収束しない場合には、暫定的対偶作用力 $\hat{F}_{i,j}$ の大きさが最も小さい対偶から順に、その対偶で対偶素分離が生じる可能性があるかと判断する。まず $\hat{F}_{i,j}$ の大きさが最も小さい対偶について、幾何学的および力学的拘束がないものとして、すなわちその対偶の存在を無視した機構を考え、その機構に外力が作用した状態の変位を2・2節の順序に従って求めた場合に、この探索が繰り返し回数の限度 n_{lim} 以下で収束し、かつ無視された対偶において[条件D]が満足されるときの結果を解とする。解が得られないときには、 $\hat{F}_{i,j}$ の大きさが小さい順に無視する対偶を替えてゆき、解が得られるまで同様に探索を続ける。

なお、外力の作用しない2対偶素節について、一方の対偶において対偶素分離が生じるとみなす場合には、必然的に他方の対偶においても対偶素分離が生じるとする。さらに、対偶が無視されることに伴い機構の自由度が増加することによって、対偶作用力や外力が作用していても幾何学的拘束のみでは変位が定まらない節が現れるため、その節については特に幾何学的拘束と力学的拘束を同時に考慮してその変位を求める。

具体的な例を考える。図5は、破線で描かれた節6の対偶 J_6 および J_7 において対偶素分離が生じると判断された6節機構を示している。接触方向角の探索を対偶 $J_1 \sim J_5$ について行う。このとき節5の姿勢角は、外力 F_P と $J_{5,5}$ の対偶作用力がつりあう状態として3点 $P, J_{5,5}, J_{3,5}$ が一直線上に存在することに基づき定める。さらに節6について[条件D]に基づき、

$$|\overline{J_{5,6}J_{1,7}} - l_6| < |(r_{5,6} - r_{6,6}) + (r_{1,7} - r_{6,7})|$$

の成立を確認する。

3・2 複数解 対偶作用力の向きが瞬間的に大きく変化する、例えば反転する状態の近傍においては、対偶素間の接触位置に関して対偶作用力の向きが変化する前と変化した後それぞれに対応する複数の位置のいずれもが存在し得る状態が現れる。この状態において、対偶作用力の大きさは極めて微小となるから、閾値 F_{th} を設定して、暫定的対偶作用力 $\hat{F}_{i,j}$ の絶対値がその閾値 F_{th} 以下となる対偶においては接触位置について複数の解が存在する可能性があるかと判断する。そして、その対偶について複数の初期接触方向角を仮定し、それぞれの場合について解析を行って収束した結果を解とする。特に、2対偶素節を結合する対偶の場合は考えられる解の数は最大2であるから、2・2節のステップ2で得られるものを第一の初期値とし、それに対し180°反転したものを第二の初期値とすればよい。なお、解析の結果、複数の初期接触方向角に対して最終的に得られた変位が一致する場合もあり、その場合には一致した結果を一つの解と見なす。

実際の解析システム構築に際しては図2の解析手順に上述の特異状態における解析手順を付加する。

4. 解析例

図6に示す4節近似直線運動機構をとりあげて解析例を示す。各節の質量は零とし、各節長、対偶素半径は原動節(節2)の長さ l_2 を単位長1として図中に示す。また w_7, w_6, F_{th} などの解析に用いた数値は全ての対偶について同一とし、その値を表1に示す。ここで中間節上の点PにY軸方向の単位大きさの外力 $F_P = (0, 1), (0, -1)$ が作用している場合を考える。

4・1 中間節曲線 原動節角変位 θ を0.5°ずつ増加させて変位解析を行い、それぞれの θ に対する点Pの位置を結んだ曲線を図6中に示す。同図から、本解析法を用いることで特定の大きさ、方向の外力が加わる状態の中間節曲線を決定できることがわかる。また、対偶すきまによる点Pの変位のずれが外力 F_P と同一方向でないことも明らかとなる。

4・2 特異状態 図6中の中間節曲線には途切れている箇所や急激に変化している部分が存在するが、それらの近傍では従動節(節4)上の対偶において対偶素分離が生じたり、両対偶素の接触位置について二つの解が存在する。

F_P がY軸の正方向の力の場合、原動節角変位が $\theta = 24 \sim 31^\circ$ においては、図7に示すように中間節(節3)において外力 F_P と対偶作用力 $F_{3,2}$ がつりあい、対偶 J_3 および J_4 では対偶作用力が零となって対偶素分離が生じる。同様の現象は $\theta = 278.5 \sim 284^\circ$ でも生じる。

Fig.6 Result of analysis of a 4-bar straight-line mechanism

Table.1 Constants for the analysis

w_γ	0.05	γ_{al}	0.05°
w_δ	0.05	δ_{al}	0.05°
F_{th}	0.5	n_{lim}	2000

Fig.7 Configuration and force-balance at $\theta = 28^\circ$ where contact losses occur at J_3, J_4

また F_P が Y 軸の負方向の力の場合、 $\theta = 275.5 \sim 279.5^\circ$ において、図 8 に示すように従動節に微小な圧縮力が働く状態と引張力が働く状態の 2 通りの解 P^+, P^- が存

Fig.8 Configuration and force-balance at $\theta = 277^\circ$ where dual solutions are possible at J_3, J_4

Fig.9 The locus and the movable regions of P

在する。同様の現象は $\theta = 24 \sim 29.5^\circ$ でも生じる。

ここで、中間節曲線が途切れている箇所における点 P の運動について考察する。図 9 において太い実線は本論文の解析法により得られた点 P の軌跡曲線である。細い実線は $\theta = 275.5^\circ, 277^\circ$ および 279.5° において幾何学条件のみを満足する点 P の変域の境界線を示す。これらの境界線上において力学的条件が満足される点は、外力 F_P が Y 軸の負方向の力であるから、境界線の Y 軸方向に対する極小点 A, P^- , P^+ , C であり、またこれらは軌跡曲線上に載っている。そして点 B, D は境界線の変極点である。そこで、点 P が左側の軌跡曲線上を進んできた場合、変曲点 B から境界線上をたどって右側の軌跡曲線上の点 C へ渡る。原動節の回転方向が逆の場合には、右側の軌跡曲線上の変曲点 D から境界線上をたどって左側の軌跡曲線上の点 A へ移動する。

Fig.10 Changes of $\gamma_{max}, \delta_{max}$ with respect to n

4・3 接触方向角の修正過程と重み係数の関係 全対偶における $|\gamma_j|$ および $|\delta_j|$ の内の最大値をそれぞれ $\gamma_{max}, \delta_{max}$ とし, $F_p = (0, -1), \theta = 0^\circ$ のときの変位探索について, 接触方向角の修正回数 n に対する γ_{max} および δ_{max} の推移を図 10 に示す. $w_\gamma = 0.05, w_\delta = 0.05$ の場合, 全ての初期接触方向角の誤差 γ_j は 31 回の幾何学的接触方向角修正で γ_{al} 以下に収束し, その後は力学的接触方向角修正も含めて修正が実行され, 最終的に 268 回で修正が完了している. 重み係数 w_γ, w_δ を変えたところ, $w_\gamma = 0.5, w_\delta = 1$ のときに修正回数が最小の 12 となった. これは, 解析対象の機構の対偶数が少なくまた対偶すきまも大きくないため, 接触方向角の修正による各節の姿勢角の変化が十分小さく, よって 2・3 節で述べたようにこの値を用いた場合に一回の修正量が誤差とほぼ等しくなるからである.

しかし, w_γ と w_δ がそれぞれ 0.2, 0.4 より大きいときには, 二つの解が得られるべき状態において一方の解が得られない場合が現れた. 図 11 は $w_\gamma = 0.5, w_\delta = 1$ のときの点 P の位置の解析結果を, 本来なら二つの解が得られるべき領域 ($275.5^\circ \leq \theta \leq 279.5^\circ$) の近傍について示したものであり, 黒丸は解として得られなかった点 P の位置である. この原因は, 異なる複数の解それぞれに適切な初期接触方向角が与えられても, 収束過程における修正量が大きすぎる場合には, ある解の暫定値がそれに固有の適切な収束範囲から出て他方の解のそれに移り, 適切な値へ収束しなくなるからである. 従って, 複数の解が存在する状態の近傍の機構変位を精密に計算する場合には, 重み係数を十分小さくすることが重要である.

最後に, この解析例で得られる点 P の座標について, 幾何学条件式と力学条件式を連立させて解くことにより得た厳密解に対する差はほぼ 10^{-6} 以下であった. また θ を 0.5° ずつ変化させた場合に原動節 1 回転に対する計算時間は, パーソナルコンピュータ (CPU: 486DX2 66MHz) を使用した場合に最大で 5 分程度であった.

Fig.11 Absence of one of the dual solutions

5. 結 論

本論文では回転対偶からなる平面リンク機構について, 対偶のすきまを考慮して, 特定の外力が加わる場合の変位解析を行った. 得られた結果を要約すれば以下の通りである.

- (1) 対偶すきまを有する機構において, 対偶素間の接触点を対偶素半径が零の対偶点とみなし, それらを結ぶ仮想的な節からなる仮想機構を考え, この仮想機構に対し対偶すきまのない機構を対象とした従来の変位および力の組織的解析法を適用するとともに, その機構において幾何学的条件と力学的条件が全て同時に満足されるように各対偶素上の接触点の位置を探索するアルゴリズムを組み込んだ変位解析法を提案した.
- (2) 機構が満足すべき幾何学的および力学的条件をまとめ, その条件に基づく接触方向角の修正法と解析の流れを具体的に示した.
- (3) 対偶素分離が生じる状態, ならびに複数の解を有する状態の変位解析を行う方法を具体的に示した.
- (4) 具体例として 4 節近似直線運動機構の変位解析を行い, 特定の大きさ, 方向の外力が加わる場合の変位を決定可能なことを示すとともに, 解の収束性について検討した.

なお本論文の解析手法は, 対象とする機構の節数, 対偶数によらず適用可能である.

文 献

- (1) 木内・ほか 2 名, 機論, 40-334(1974-6), 1759.
- (2) 堀江・ほか 3 名, 機論, 46-401(1980-1), 51.
- (3) Garrett, R.E. and Hall, A.S.Jr., *Trans. ASME, J. Eng. Ind.*, 91(1969-2), 198.
- (4) Dubowsky, S., Massatuk, J. and Perreira, N.D., *Trans. ASME, J. Eng. Ind.*, 97(1975-5), 635.
- (5) Rhyu, J.H. and Kwak, B.M., *Trans. ASME, Mech. Transm. Auto. Des.*, 110(1988-9), 255.
- (6) Lee, S.J. and Gilmore, B.J., *Trans. ASME, J. Mech. Des.*, 113(1991-3), 84.
- (7) 舟橋・ほか 2 名, 機論, 42-359(1976-7), 2157.